CHRISTIAN PITTI

Éléments de norme 1 des corps cubiques non galoisiens. Généralisation

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, nº 1 (1969-1970), exp. nº 3, p. 1-25

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_1_A2_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
23e année, 1969/70, n° 3, 25 p.

1er décembre 1969

ÉLÉMENTS DE NORME 1 DES CORPS CUBIQUES NON GALOISIENS. GÉNÉRALISATION,

par Christian PITTI

1. Introduction.

Considérons le problème de la résolution de l'équation $N_{k(\theta)/k}(\beta) = 1$, $k(\theta)$ étant une extension cubique non galoisienne d'un corps de nombres k .

On sait que, si K désigne la clôture galoisienne de $k(\theta)$, on a $[K:k] = 6$.

De plus, si θ , θ' , θ'' sont les conjugués de θ , et si σ , τ sont les automorphismes de K , définis par

$$\sigma : \quad \theta \to \theta' \to \theta'' \to \theta \quad ,$$

$$\tau : \quad \theta \to \theta \ , \qquad \theta' \leftrightarrow \theta'' \quad ,$$

le groupe de Galois $G_{K/k}$ est engendré par σ et τ .

On vérifie que $\sigma^3 = \tau^2 = 1$, $\tau\sigma = \sigma^{-1} \tau$. G est donc le groupe diédral d'ordre 2×3 .

2. Généralisation de cette situation.

Soient k un corps de nombres, et K une extension galoisienne de k dont le groupe de Galois $G_{K/k}$ est diédral d'ordre $2p$.

$G_{K/k}$ est donc engendré par σ et τ vérifiant

$$\begin{cases} \sigma^p = \tau^2 = 1 \quad , \\ (\forall\ i) \quad \tau\sigma^i = \sigma^{-i} \tau \quad . \end{cases}$$

Soient

$$\begin{cases} k(\theta) \quad \text{le corps fixe par} \quad \tau \quad , \\ k(\alpha) \quad \text{le corps fixe par} \quad \sigma \quad . \end{cases}$$

Le but de cet exposé est la recherche des solutions de l'équation

(E) $$N_{k(\theta)/k}(\beta) = 1 \quad .$$

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, dash, "2"'] \arrow[dr, dash, "p"] & \\ k(\theta) \arrow[dr, dash, "p"'] & & k(\alpha) \arrow[dl, dash, "2"] \\ & k & \end{tikzcd} \quad .$$

Nous allons tout d'abord donner une interprétation géométrique de cette équation. $\beta \in k(\theta)$ s'écrit, de façon unique, $\beta = x_1 + \theta x_2 + \dots + \theta^{p-1} x_p$, avec $x_i \in k$ pour tout i. Donc

$$N_{k(\theta)/k}(\beta) = f(x_1, \dots, x_p) \in k[x_1, x_2, \dots, x_p] .$$

Soient alors S l'hypersurface de K^p, d'équation $f(x_1, \dots, x_p) = 1$, et F l'ensemble des points de S à coordonnées dans k (nous dirons par la suite, pour abréger, que les points de F sont les points rationnels de S).

$$N_{k(\theta)/k}(\beta) = 1 \iff (x_1, \dots, x_p) \in F .$$

Posons

$$\theta_i = \sigma^i(\theta) , \qquad \text{pour } i = 0, \dots, p-1 ,$$

$$E_r = \text{espace projectif sur K de dimension } r , \qquad \text{pour } r \in N .$$

L'hypersurface projective d'équation $f(x_1, \dots, x_p) = t^p$ admet sur E_{p-1} la représentation birationnelle définie par

$$x_1 + \theta_{i-1} x_2 + \dots + \theta_{i-1}^{(p-1)} x_p = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} , \qquad \text{pour } i = 1, \dots, p ,$$

$$t = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i ,$$

avec, à partir de maintenant, la convention que $\lambda_{p+r} = \lambda_r$ pour $r = 1, \dots, (p-1)$. La restriction de cette représentation à S définit une bijection de S sur l'ensemble des points de E_{p-1} tels que $\prod_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$ (que nous noterons T).

$$T : m(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in E_{p-1} \to P(x_1, \dots, x_p) \in S$$

est donc définie par

$$x_1 + \theta_{i-1} x_2 + \dots + \theta_{i-1}^{(p-1)} x_p = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} , \qquad \text{pour } i = 1, \dots, p .$$

On a

$$P \in F \iff \begin{cases} P \in S , \\ \sigma(P) = P , \\ \tau(P) = P . \end{cases}$$

Or

$$P = T(m) \implies \begin{cases} \sigma(P) = \sigma(T)(\sigma(m)) , \\ \tau(P) = \tau(T)(\tau(m)) . \end{cases}$$

Donc

$$\sigma(P) = P \iff \sigma(T)(\sigma(m)) = T(m) \iff (\sigma(T^{-1}) \circ T)(m) = \sigma(m) ,$$
$$\tau(P) = P \iff \tau(T)(\tau(m)) = T(m) \iff (\tau(T^{-1}) \circ T)(m) = \tau(m) .$$

Soient $\mathcal{A}_\sigma$, $\mathcal{A}_\tau$ les transformations birationnelles de E_{p-1} en lui-même, définies par

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\sigma = \sigma(T^{-1}) \circ T , \\ \mathcal{A}_\tau = \tau(T^{-1}) \circ T , \end{cases}$$

(1) $$P \in F \iff \begin{cases} P \in S , \\ \mathcal{A}_\sigma(m) = \sigma(m) , \\ \mathcal{A}_\tau(m) = \tau(m) , \end{cases}$$

$$(\lambda_1 , \dots , \lambda_p) \in E_{p-1} \xrightarrow{T} (x_1 , \dots , x_p) \in S \xrightarrow{\sigma(T^{-1})} (\lambda_1' , \dots , \lambda_p') \in E_{p-1} ,$$

$x_1 , \dots , x_p$ étant définis par $x_1 + \theta_{i-1} x_2 + \dots + \theta_{i-1}^{(p-1)} x_p = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}$, pour tout i ,

$\lambda_1' , \dots , \lambda_p'$ étant définis par $x_1 + \theta_i x_2 + \dots + \theta_i^{(p-1)} x_p = \dfrac{\lambda_i'}{\lambda_{i+1}'}$, pour tout i ,

d'où on déduit

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+2}} = \frac{\lambda_i'}{\lambda_{i+1}'} , \qquad \text{pour tout } i ,$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\lambda_1'}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2'}{\lambda_3} = \dots = \frac{\lambda_i'}{\lambda_{i+1}} = \dots = \frac{\lambda_p'}{\lambda_1} .$$

$\mathcal{A}_\sigma$ est donc une homographie de E_{p-1} .

Pour former $\mathcal{A}_\tau$, remarquons d'abord que

$$\tau(\theta_i) = \tau\sigma^i(\theta) = \sigma^{-i}\,\tau(\theta) = \sigma^{-i}(\theta) = \theta_{p-i} ,$$

$$(\lambda_1 , \dots , \lambda_p) \in E_{p-1} \xrightarrow{T} (x_1 , \dots , x_p) \in S \xrightarrow{\tau(T^{-1})} (\lambda_1' , \dots , \lambda_p') \in E_{p-1} ,$$

avec

$$x_1 + \theta_{i-1}\, x_2 + \dots + \theta_{i-1}^{(p-1)}\, x_p = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}\,, \qquad \text{pour tout } i \;,$$

$$x_1 + \theta_{p-i+1}\, x_2 + \dots + \theta_{p-i+1}^{(p-1)}\, x_p = \frac{\lambda'_i}{\lambda'_{i+1}}\,, \qquad \text{pour tout } i \;,$$

d'où on déduit

$$\frac{\lambda'_i}{\lambda'_{i+1}} = \frac{\lambda_{p-i+2}}{\lambda_{p-i+3}}\,, \qquad \text{pour tout } i \;,$$

que l'on peut écrire

$$\lambda'_1\, \lambda_2 = \dots = \lambda'_i\, \lambda_{p+3-i} = \dots = \lambda'_p\, \lambda_3 \;.$$

Définissons l'application

$$\varphi : \; M(u_1 , \dots , u_p , v_1 , \dots , v_p) \in E_{2p-1} \;\to\; m(\lambda_1 , \dots , \lambda_p) \in E_{p-1}$$

par

(2) $$\lambda_i = \frac{v_i}{u_{p+3-i}}\,, \qquad \text{pour tout } i \;.$$

Supposons trouvé un couple $(\mathcal{B}_\sigma , \mathcal{B}_\tau)$ de transformations birationnelles de E_{2p-1} , à coefficients dans K , vérifiant

(3) $$\begin{cases} \mathcal{A}_\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \mathcal{B}_\sigma \;, \\ \mathcal{A}_\tau \circ \varphi = \varphi \circ \mathcal{B}_\tau \;. \end{cases}$$

On constate alors que, si M est solution de

(4) $$\begin{cases} \mathcal{B}_\sigma(M) = \sigma(M) \;, \\ \mathcal{B}_\tau(M) = \tau(M) \;, \end{cases}$$

$m = \varphi(M)$ est solution de (1).

En effet, les formules (4) montrent que

$$\begin{cases} \sigma(m) = \varphi(\sigma(M)) \;, \\ \tau(m) = \varphi(\tau(M)) \;. \end{cases}$$

Donc

$$\mathcal{A}_\sigma(m) \overset{(3)}{=} \varphi(\mathcal{B}_\sigma(M)) \overset{(4)}{=} \varphi(\sigma(M)) = \sigma(m) \;,$$

$$\mathcal{A}_\tau(m) = \varphi(\mathcal{B}_\tau(M)) = \varphi(\tau(M)) = \tau(m) \;.$$

Toute solution M de (4) fournit ainsi un point $(T \circ \varphi)(M)$ rationnel sur S.

Remarquons encore que l'on a

$$(5) \quad (\forall \sigma_1 \in G) \quad (\forall \sigma_2 \in G) \quad \mathcal{A}_{\sigma_1\sigma_2} = \sigma_1 \sigma_2(T^{-1}) \circ T$$
$$= \sigma_1[\sigma_2(T^{-1}) \circ T] \circ \sigma_1(T^{-1}) \circ T = \sigma_1(\mathcal{A}_{\sigma_2}) \circ \mathcal{A}_{\sigma_1} .$$

Considérons les conditions

$$(6) \qquad (\forall \sigma_1 \in G) \quad (\forall \sigma_2 \in G) \qquad \mathcal{B}_{\sigma_1\sigma_2} = \sigma_1(\mathcal{B}_{\sigma_2}) \circ \mathcal{B}_{\sigma_1} ,$$

$$(6) \implies (\forall \sigma_1 \in G) \quad (\forall \sigma_2 \in G) \quad \mathcal{A}_{\sigma_1\sigma_2} \circ \varphi = \varphi \circ \mathcal{B}_{\sigma_1\sigma_2} = \varphi \circ \sigma_1(\mathcal{B}_{\sigma_2}) \circ \mathcal{B}_{\sigma_1}$$
$$= \sigma_1[\varphi \circ \mathcal{B}_{\sigma_2}] \circ \mathcal{B}_{\sigma_1} = \sigma_1(\mathcal{A}_{\sigma_2} \circ \varphi) \circ \mathcal{B}_{\sigma_1}$$
$$= \sigma_1(\mathcal{A}_{\sigma_2}) \circ \varphi \circ \mathcal{B}_{\sigma_1} = \sigma_1(\mathcal{A}_{\sigma_2}) \circ \mathcal{A}_{\sigma_1} \circ \varphi ,$$

puisque $\sigma_1(\varphi) = \varphi$. φ étant surjective, cela équivaut à $(\forall \sigma_1 \in G)$ $(\forall \sigma_2 \in G)$ $\mathcal{A}_{\sigma_1\sigma_2} = \sigma_1(\mathcal{A}_{\sigma_2}) \circ \mathcal{A}_{\sigma_1}$, qui sont les conditions (5).

Cela nous conduit à étudier les couples $(\mathcal{B}_\sigma , \mathcal{B}_\tau)$ de transformations birationnelles de E_{2p-1}, à coefficients dans K, vérifiant (3) et (6). Nous nous limiterons à la recherche de celles de ces transformations qui sont des homographies. Nous déterminerons ensuite la famille $\mathfrak{F}$ de ces couples d'homographies pour lesquels (4) admet des solutions.

Nous montrerons alors que, pour tout $P \in F$, il existe $(\mathcal{B}_\sigma , \mathcal{B}_\tau) \in \mathfrak{F}$, et $M \in E_{2p-1}$ vérifiant (4), tels que $P = (T \circ \varphi)(M)$.

En dernier lieu, on étudiera à quelles conditions un seul couple de $\mathfrak{F}$ suffit à obtenir tous les points de F (dans ce cas, en effet, une seule formule fournira toutes les solutions de (E)).

3. Transformations homographiques $\mathcal{B}_\sigma$ de E_{2p-1}, à coefficients dans K, vérifiant $\mathcal{A}_\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \mathcal{B}_\sigma$.

$(u_1 , \dots , u_p , v_1 , \dots , v_p) \in E_{2p-1}$

$$\xrightarrow{\mathcal{B}_\sigma} (u'_1 , \dots , u'_p , v'_1 , \dots , v'_p) \in E_{2p-1} \xrightarrow{\varphi} (\lambda'_1 , \dots , \lambda'_n) \in E_{p-1} ,$$

avec, pour $i = 1 , \dots , n$,

$$\begin{cases} u'_i = \sum\limits_{j=1}^{n} (a_i^j\, u_j + b_i^j\, v_j) \quad , \\ v'_i = \sum\limits_{j=1}^{n} (\alpha_i^j\, u_j + \beta_i^j\, v_j) \quad , \\ \lambda'_i = \dfrac{v'_i}{u'_{p+3-i}} = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} (\alpha_i^j\, u_j + \beta_i^j\, v_j)\right) \Big/ \left(\sum\limits_{j=1}^{n} (a_{p+3-i}^j\, u_j + b_{p+3-i}^j\, v_j)\right) \quad ; \end{cases}$$

$$(u_1 , \dots , u_p , v_1 , \dots , v_p) \in E_{2p-1}$$

$$\xrightarrow{\varphi} (\lambda_1 , \dots , \lambda_n) \in E_{p-1} \xrightarrow{\mathfrak{A}_\sigma} (\lambda''_1 , \dots , \lambda''_n) \in E_{p-1} \quad ,$$

avec, pour $i = 1 , \dots , n$,

$$\begin{cases} \lambda_i = \dfrac{v_i}{u_{p+3-i}} \quad , \\ \lambda''_i = \lambda_{i+1} = \dfrac{v_{i+1}}{u_{p+2-i}} \quad ; \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}_\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \mathfrak{B}_\sigma \iff (\exists\, c \in K) \quad (\forall\, i)$$

$$c\,\frac{v_{i+1}}{u_{p+2-i}} = \left(\sum_{j=1}^{n} (\alpha_i^j\, u_j + \beta_i^j\, v_j)\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{p+3-i}^j\, u_j + b_{p+3-i}^j\, v_j)\right)$$

$$\iff (\exists\, c \in K) \quad (\forall\, i)$$

$$\begin{cases} \alpha_i^j = 0 \text{ pour tout } j \; , \; b_i^j = 0 \text{ pour tout } j \quad , \\ \beta_i^j = 0 \text{ pour } j \neq i+1 \; , \; a_i^j = 0 \text{ pour } j \neq i-1 \quad , \\ c = \dfrac{\beta_i^{i+1}}{a_{p+3-i}^{p+2-i}} \quad . \end{cases}$$

Les équations de $\mathfrak{B}_\sigma$ sont donc de la forme

$$\begin{cases} u'_i = c_i\, u_{i-1} \; , \\ v'_i = c\,c_{3-i}\, v_{i+1} \; , \end{cases} \qquad \text{pour } i = 1 , \dots , n \quad ,$$

avec $c , c_1 , \dots , c_n \in K$.

4. Transformations homographiques $\mathcal{B}_\tau$ de E_{2p-1} , à coefficients dans K , vérifiant $\mathcal{A}_\tau \circ \varphi = \varphi \circ \mathcal{B}_\tau$.

$(u_1 , \dots , u_p , v_1 , \dots , v_p) \in E_{2p-1}$

$$\xrightarrow{\mathcal{B}_\tau} (u'_1 , \dots , u'_p , v'_1 , \dots , v'_p) \in E_{2p-1} \xrightarrow{\varphi} (\lambda'_1 , \dots , \lambda'_n) \in E_{p-1} ,$$

avec, pour $i = 1 , \dots , n$,

$$\begin{cases} u'_i = \sum\limits_{j=1}^{n} (a_i^j\, u_j + b_i^j\, v_j) , \\ v'_i = \sum\limits_{j=1}^{n} (\alpha_i^j\, u_j + \beta_i^j\, v_j) , \\ \lambda'_i = \dfrac{v'_i}{u'_{p+3-i}} = \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} (\alpha_i^j\, u_j + \beta_i^j\, v_j)\Big) / \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} (a_{p+3-i}^j\, u_j + b_{p+3-i}^j\, v_j)\Big) ; \end{cases}$$

$(u_1 , \dots , u_p , v_1 , \dots , v_p) \in E_{2p-1}$

$$\xrightarrow{\varphi} (\lambda_1 , \dots , \lambda_n) \in E_{p-1} \xrightarrow{\mathcal{A}_\tau} (\lambda''_1 , \dots , \lambda''_n) \in E_{2p-1} ,$$

avec, pour $i = 1 , \dots , n$,

$$\begin{cases} \lambda_i = \dfrac{v_i}{u_{p+3-i}} , \\ \lambda''_i = \dfrac{1}{\lambda_{p+3-i}} = \dfrac{u_i}{v_{p+3-i}} ; \end{cases}$$

$\mathcal{A}_\tau \circ \varphi = \varphi \circ \mathcal{B}_\tau \iff (\exists\, d \in K) \quad (\forall\, i)$

$$d\, \frac{u_i}{v_{p+3-i}} = \Big(\sum_{j=1}^{n} (\alpha_i^j\, u_j + \beta_i^j\, v_j)\Big) / \Big(\sum_{j=1}^{n} (a_{p+3-i}^j\, u_j + b_{p+3-i}^j\, v_j)\Big)$$

$\iff (\exists\, d \in K) \quad (\forall\, i)$

$$\begin{cases} \beta_i^j = 0 \text{ pour tout } j , \quad a_i^j = 0 \text{ pour tout } j , \\ b_i^j = 0 \text{ pour } j \neq i , \quad \alpha_i^j = 0 \text{ pour } j \neq i , \\ d = \dfrac{\alpha_i^i}{b_{p+3-i}^{p+3-i}} . \end{cases}$$

Les équations de $\mathcal{B}_\tau$ sont donc de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} u_i' = d_i\ v_i\ , \\ v_i' = dd_{3-i}\ u_i\ , \end{array}\right. \quad \text{pour } i = 1\ , \ldots , n\ .$$

5. Système de conditions équivalentes aux conditions (6).

Rappelons que (6) est l'ensemble de conditions $(\forall\ \sigma_1 \in G)\ \ (\forall\ \sigma_2 \in G)$ $\mathcal{B}_{\sigma_1\sigma_2} = \sigma_1(\mathcal{B}_{\sigma_2}) \circ \mathcal{B}_{\sigma_1}$. Cela est vérifié si σ_1 (ou σ_2) est l'identité I .

Supposons cette relation vérifiée par deux automorphismes σ_1 et σ_1' , quel que soit σ_2 ; autrement dit,

$$(\forall\ \sigma_2 \in G) \qquad \mathcal{B}_{\sigma_1\sigma_2} = \sigma_1(\mathcal{B}_{\sigma_2}) \circ \mathcal{B}_{\sigma_1}\ ,$$

$$(\forall\ \sigma_2 \in G) \qquad \mathcal{B}_{\sigma_1'\sigma_2} = \sigma_1'(\mathcal{B}_{\sigma_2}) \circ \mathcal{B}_{\sigma_1'}\ .$$

On en déduit

$$\begin{aligned}(\forall\ \sigma_2 \in G) \quad \sigma_1\ \sigma_1'(\mathcal{B}_{\sigma_2}) \circ \mathcal{B}_{\sigma_1\sigma_1'} &= \sigma_1\ \sigma_1'(\mathcal{B}_{\sigma_2}) \circ \sigma_1(\mathcal{B}_{\sigma_1'}) \circ \mathcal{B}_{\sigma_1} \\ &= \sigma_1[\sigma_1'(\mathcal{B}_{\sigma_2}) \circ \mathcal{B}_{\sigma_1'}] \circ \mathcal{B}_{\sigma_1} = \sigma_1(\mathcal{B}_{\sigma_1'\sigma_2}) \circ \mathcal{B}_{\sigma_1} \\ &= \mathcal{B}_{(\sigma_1\sigma_1')\sigma_2}\ ,\end{aligned}$$

qui montre que la relation est vérifiée par $\sigma_1\ \sigma_1'$, quel que soit σ_2 .

Il résulte de là qu'il suffit de se limiter à un système de générateurs de G . Dans le cas présent, on prendra $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_1' = \tau$.

On peut encore limiter le nombre de cas à étudier en utilisant les égalités $(\forall\ i)\ \ \sigma^i\ \tau = \tau\sigma^{-i}$.

Supposons, en effet, vérifiées les relations

$$(\mathrm{R}) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathcal{B}_{\sigma\sigma'} = \sigma(\mathcal{B}_{\sigma'}) \circ \mathcal{B}_\sigma\ , & \text{pour tout } \sigma' \in G\ , \\ \mathcal{B}_{\tau\sigma^i} = \tau(\mathcal{B}_{\sigma^i}) \circ \mathcal{B}_\tau\ , & \text{pour tout } i\ , \\ \tau(\mathcal{B}_\tau) \circ \mathcal{B}_\tau = I\ . & \end{array}\right.$$

On en déduit, pour tout i ,

$$\tau(\mathcal{B}_{\sigma^i\tau}) \circ \mathcal{B}_\tau = \tau(\mathcal{B}_{\tau\sigma^{-i}}) \circ \mathcal{B}_\tau = \tau[\tau(\mathcal{B}_{\sigma^{-i}}) \circ \mathcal{B}_\tau] \circ \mathcal{B}_\tau$$

$$= \mathcal{B}_{\sigma^{-i}} \circ \tau(\mathcal{B}_\tau) \circ \mathcal{B}_\tau = \mathcal{B}_{\sigma^{-i}} = \mathcal{B}_{\tau(\tau\sigma^{-i})} = \mathcal{B}_{\tau(\sigma^i\tau)} \quad .$$

Les conditions (6) équivalent donc aux conditions (R). Explicitons-les :

$$\begin{array}{ll}
(\alpha_1) \quad \sigma(\mathcal{B}_\sigma) \circ \mathcal{B}_\sigma = \mathcal{B}_{\sigma^2} & (\beta_1) \quad \sigma(\mathcal{B}_\tau) \circ \mathcal{B}_\sigma = \mathcal{B}_{\sigma\tau} \\
\ldots & \ldots \\
(\alpha_i) \quad \sigma(\mathcal{B}_{\sigma^i}) \circ \mathcal{B}_\sigma = \mathcal{B}_{\sigma^{i+1}} & (\beta_i) \quad \sigma(\mathcal{B}_{\sigma^i\tau}) \circ \mathcal{B}_\sigma = \mathcal{B}_{\sigma^{i+1}\tau} \\
\ldots & \ldots \\
(\alpha_{p-1}) \quad \sigma(\mathcal{B}_{\sigma^{p-1}}) \circ \mathcal{B}_\sigma = I & (\beta_{p-1}) \quad \sigma(\mathcal{B}_{\sigma^{p-1}\tau}) \circ \mathcal{B}_\sigma = \mathcal{B}_\tau
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(\gamma_1) \quad \tau(\mathcal{B}_\sigma) \circ \mathcal{B}_\tau = \mathcal{B}_{\tau\sigma} = \mathcal{B}_{\sigma^{p-1}\tau} \\
\ldots \\
(\gamma_i) \quad \tau(\mathcal{B}_{\sigma^i}) \circ \mathcal{B}_\tau = \mathcal{B}_{\tau\sigma^i} = \mathcal{B}_{\sigma^{-i}\tau} \\
\ldots \\
(\gamma_{p-1}) \quad \tau(\mathcal{B}_{\sigma^{p-1}}) \circ \mathcal{B}_\tau = \mathcal{B}_{\tau\sigma^{p-1}} = \mathcal{B}_{\sigma\tau} \\
\qquad \tau(\mathcal{B}_\tau) \circ \mathcal{B}_\tau = I
\end{array}$$

Le premier ensemble de formules équivaut de façon évidente à

$$\mathcal{B}_{\sigma^{i+1}} = \sigma^i(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^{i-1}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \ldots \circ \mathcal{B}_\sigma , \qquad \text{pour } i = 1 , \ldots , p-2 ,$$

$$(\delta_1) \qquad \sigma^{p-1}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^{p-2}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \ldots \circ \mathcal{B}_\sigma = I \quad .$$

Le deuxième ensemble de formules équivaut de façon évidente à

$$\mathcal{B}_{\sigma^{i+1}\tau} = \sigma^{i+1}(\mathcal{B}_\tau) \circ \sigma^i(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^{i-1}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \ldots \circ \mathcal{B}_\sigma , \qquad \text{pour } i = 1 , \ldots , p-2 ,$$

$$(\delta_1) \qquad \sigma^{p-1}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^{p-2}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \ldots \circ \mathcal{B}_\sigma = I \quad .$$

Compte tenu des valeurs obtenues,

$$(\delta_2) \iff \tau(\mathcal{B}_\sigma) \circ \mathcal{B}_\tau = \sigma^{p-1}(\mathcal{B}_\tau)\ \sigma^{p-2}(\mathcal{B}_\sigma)\ \sigma^{p-3}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \ldots \circ \mathcal{B}_\sigma$$

$$\ldots$$

$$(\delta_{i+1}) \iff \sigma^{p-1+i}\ \tau(\mathcal{B}_\sigma) \circ \ldots \circ \tau(\mathcal{B}_\sigma)\ \mathcal{B}_\tau$$

$$= \sigma^{p-1}(\mathcal{B}_\tau)\ \sigma^{p-i-1}(\mathcal{B}_\sigma)\ \sigma^{p-i-2}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \ldots \circ \mathcal{B}_\sigma \quad (\gamma_i) \quad .$$

Posons

$$(\delta_{p+1}) \qquad \tau(\mathcal{B}_\tau) \circ \mathcal{B}_\tau = I \quad .$$

Supposons maintenant vérifiées les relations (δ_1) et (δ_{p+1}). Par application de σ^i, on obtient

$$(\delta_{i+1}) \iff \sigma\tau(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^2\,\tau(\mathcal{B}_\sigma) \circ \dots \circ \sigma^i\,\tau(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^i(\mathcal{B}_\tau)$$
$$= \mathcal{B}_\tau \circ \sigma^{p-1}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^{p-2}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \dots \circ \sigma^i(\mathcal{B}_\sigma) \quad .$$

Par multiplication à gauche par $\tau(\mathcal{B}_\tau)$, à droite par $\sigma^{i-1}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^{i-2}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \dots \circ \mathcal{B}_\sigma$,

$$(\delta_{i+1}) \iff \tau(\mathcal{B}_\tau) \circ \sigma\tau(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^2\,\tau(\mathcal{B}_\sigma)$$
$$\circ \dots \circ \sigma^i\,\tau(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^i(\mathcal{B}_\tau) \circ \sigma^{i-1}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^{i-2}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \dots \circ \mathcal{B}_\sigma$$
$$= \tau(\mathcal{B}_\tau) \circ \mathcal{B}_\tau \circ \sigma^{p-1}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^{p-2}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \dots \circ \mathcal{B}_\sigma \quad ,$$

soit, en tenant compte de (δ_1) et (δ_{p+1}),

$$(\delta_{i+1}) \iff \sigma^i\,\tau[\sigma^i(\mathcal{B}_\tau) \circ \sigma^{i-1}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^{i-2}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \dots \circ \mathcal{B}_\sigma]$$
$$\circ\, \sigma^i(\mathcal{B}_\tau) \circ \sigma^{i-1}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^{i-2}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \dots \circ \mathcal{B}_\sigma = I$$
$$\iff \tau(\mathcal{B}_\tau) \circ \sigma\tau(\mathcal{B}_\sigma)\ \sigma\{\sigma^{i-1}\,\tau[\sigma^{i-2}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \dots \circ \mathcal{B}_\sigma]$$
$$\circ\, \sigma^{i-1}(\mathcal{B}_\tau)\ \sigma^{i-2}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \dots \circ \mathcal{B}_\sigma\} \circ \mathcal{B}_\sigma = I \quad .$$

Remarquons que $(\forall\ i)\ \ \sigma^i\ \tau\sigma^{i-1} = \sigma^i\ \sigma^{1-i}\ \tau = \sigma\tau$, d'où

$$(\delta_{p+1}) \implies \sigma\tau[\tau(\mathcal{B}_\tau) \circ \mathcal{B}_\tau] = I \implies \sigma(\mathcal{B}_\tau) \circ \sigma^i\ \tau\sigma^{i-1}(\mathcal{B}_\tau) = I \quad .$$

Plaçons cette expression après les deux premiers termes de celle obtenue pour (δ_{i+1}),

$$(\delta_{i+1}) \iff \sigma\tau[\sigma(\mathcal{B}_\tau) \circ \mathcal{B}_\sigma]\ \sigma(\mathcal{B}_\tau)\ \sigma\{\sigma^{i-1}\ \tau[\sigma^{i-1}(\mathcal{B}_\tau) \circ \sigma^{i-2}(\mathcal{B}_\sigma)$$
$$\circ \dots \circ \mathcal{B}_\sigma]\ \sigma^{i-1}(\mathcal{B}_\tau) \circ \sigma^{i-2}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \dots \circ \mathcal{B}_\sigma\} \circ \mathcal{B}_\sigma = I \quad .$$

On constate que, si (δ_i) est vérifiée, $(\delta_{i+1}) \iff (\delta_2)$.

Il en résulte que les conditions (R) équivalent à (δ_1), (δ_2) et (δ_{p+1}). Récrivons-les :

(I) $\sigma^{p-1}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \sigma^{p-2}(\mathcal{B}_\sigma) \circ \ldots \circ \mathcal{B}_\sigma = I$,
(II) $\tau(\mathcal{B}_\tau) \circ \mathcal{B}_\tau = I$,
(III) $\sigma\tau[\sigma(\mathcal{B}_\tau) \circ \mathcal{B}_\sigma] \circ [\sigma(\mathcal{B}_\tau) \circ \mathcal{B}_\sigma] = I$.

6. Couples $(\mathcal{B}_\sigma , \mathcal{B}_\tau)$ de transformations homographiques de E_{2p-1} , à coefficients dans K , vérifiant (3) et (6).

D'après les études précédentes, cela revient à chercher les couples $(\mathcal{B}_\sigma , \mathcal{B}_\tau)$ de la forme

$$\mathcal{B}_\sigma \begin{cases} u_i' = c_i\, u_{i-1} , \\ v_i' = cc_{3-i}\, v_{i+1} , \end{cases} \qquad \mathcal{B}_\tau \begin{cases} u_i' = d_i\, v_i , \\ v_i' = dd_{3-i}\, u_i , \end{cases}$$

$$(c , d , c_1 , \ldots , c_p , d_1 , \ldots , d_p \in K) ,$$

vérifiant les relations (I), (II), (III).

$$(u_1 , \ldots , u_p , v_1 , \ldots , v_p) \xrightarrow{\sigma^{p-1}(\mathcal{B}_\sigma)\circ\sigma^{p-2}(\mathcal{B}_\sigma)\circ\ldots\circ\mathcal{B}_\sigma} (u_1' , \ldots , u_p' , v_1' , \ldots , v_p') ,$$

avec, pour tout i ,

$$\begin{cases} u_i' = \sigma^{p-1}(c_i)\, \sigma^{p-2}(c_{i-1}) \ldots \sigma(c_{i+2})\, c_{i+1}\, u_i , \\ v_i' = \sigma^{p-1}(cc_{3-i})\, \sigma^{p-2}(cc_{2-i}) \ldots \sigma(cc_{5-i})\, cc_{4-i} , \end{cases}$$

d'où on déduit

$$(I) \iff \begin{cases} c_p\, \sigma(c_1)\, \sigma^2(c_2) \ldots \sigma^{p-1}(c_{p-1}) = \sigma[c_p\, \sigma(c_1)\, \sigma^2(c_2) \ldots \sigma^{p-1}(c_{p-1})] \\ N_{K/k(\alpha)}(c) = 1 \end{cases}$$

$$\iff (A) \begin{cases} c_p\, \sigma(c_1)\, \sigma^2(c_2) \ldots \sigma^{p-1}(c_{p-1}) = \gamma , \quad \gamma \in k(\alpha) , \\ N_{K/k(\alpha)}(c) = 1 \ ; \end{cases}$$

$$(u_1 , \ldots , u_p , v_1 , \ldots , v_p) \xrightarrow{\tau(\mathcal{B}_\tau)\circ\mathcal{B}_\tau} (u_1' , \ldots , u_p' , v_1' , \ldots , v_p') ,$$

avec, pour tout i ,

$$\begin{cases} u_i' = \tau(d_i)\, dd_{3-i}\, u_i \quad , \\ v_i' = \tau(dd_{3-i})\, d_i\, v_i \quad , \end{cases}$$

d'où on déduit

$$\text{(II)} \iff (\forall\, i) \quad \tau(d_i)\, dd_{3-i} = \tau(dd_{3-i})\, d_i = \tau(d_1)\, dd_2 = \tau(dd_2)\, d_1$$

$$\iff \begin{cases} d = \tau(d) \\ \dfrac{d_2}{d_1} = \tau\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right) \\ (\forall\, i) \quad \tau(d_i)\, d_{3-i} = d_i\, \tau(d_{3-i}) = \tau(d_1)\, d_2 \end{cases}$$

$$\iff \text{(B)} \begin{cases} d \in k(\theta) \quad , \\ d_2 = \delta d_1 \ , \quad \delta \in k(\theta) \quad , \\ (\forall\, i) \quad d_i = \dfrac{\delta d_1\, \tau(d_1)}{\tau(d_{3-i})} \quad . \end{cases}$$

- Si p est pair, on obtient ainsi :

  - d_p , en fonction de δ , d_1 et d_3 ,
  - d_{p-1} , en fonction de δ , d_1 et d_4 ,

  ...
  - $d_{(p/2)+1}$, en fonction de δ , d_1 et $d_{(p/2)+2}$,

et une relation de compatibilité pour $i = \frac{p}{2} + 2$.

- Si p est impair, on obtient :

  - d_p , en fonction de δ , d_1 et d_3 ,
  - d_{p-1} , en fonction de δ , d_1 et d_4 ,

  ...
  - $d_{(p+5)/2}$, en fonction de δ , d_1 et $d_{(p+1)/2}$,

et une relation de compatibilité pour $i = \frac{p+3}{2}$.

$$(u_1 \ , \ \dots \ , \ u_p \ , \ v_1 \ , \ \dots \ , \ v_p) \xrightarrow{\sigma(\mathcal{B}_\tau)\circ\mathcal{B}_\sigma} (u_1' \ , \ \dots \ , \ u_p' \ , \ v_1' \ , \ \dots \ , \ v_p') \quad ,$$

avec, pour tout i ,

$$\begin{cases} u_i' = \sigma(d_i)\, cc_{3-i}\, v_{i+1} \quad , \\ v_i' = \sigma(dd_{3-i})\, c_i\, u_{i-1} \quad , \end{cases}$$

d'où on déduit

$$\text{(III)} \iff (\forall\, i) \quad \tau(d_i)\ \sigma\tau(cc_{3-i})\ \sigma(dd_{2-i})\ c_{i+1} = \tau(dd_{3-i})\ \sigma\tau(c_i)\ \sigma(d_{i-1})\ cc_{4-i}$$

$$= \tau(d_1)\ \sigma\tau(cc_2)\ \sigma(dd_1)\ c_2 = \tau(dd_1)\ \sigma\tau(c_2)\ \sigma(d_1)\ cc_2$$

$$\iff \text{(C)} \begin{cases} c\tau(d) = \sigma\tau(c)\ \sigma(d) \quad , \\ (\forall\, i) \quad \tau(d_{3-i})\ \sigma\tau(c_i)\ \sigma(d_{i-1})\ c_{4-i} = c_2\ \sigma(d_1)\ \sigma\tau(c_2)\ \tau(d_1) \quad . \end{cases}$$

Compte tenu de $d \in k(\theta)$, la première de ces relations s'écrit $\tau(cd) = \sigma\tau(cd)$, soit

$$\begin{cases} cd = r \quad , \\ r = \sigma\tau(r) \quad . \end{cases}$$

Remarquons que l'application de $\sigma\tau$ au deuxième membre de la deuxième relation ci-dessus le laisse invariant, et transforme le premier membre de rang i en celui de rang $4 - i$. On pourra donc se limiter à

$$i = 3\ , \ldots , \frac{p}{2} + 2\ , \qquad \text{si } p \text{ est pair} \quad ,$$

$$i = 3\ , \ldots , \frac{p+3}{2}\ , \qquad \text{si } p \text{ est impair} \quad .$$

Tenant compte de (B), on obtiendra un système (D) équivalent à (C), en remplaçant d_{3-i} en fonction de d_i .

$$\text{(D)} \iff \begin{cases} cd = r\ , \quad \text{avec} \quad r = \sigma\tau(r) \\ \dfrac{\delta d_1\ \tau(d_1)}{d_i}\ \sigma\tau(c_i)\ \sigma(d_{i-1})\ c_{4-i} = c_2\ \sigma(d_1)\ \sigma\tau(c_2)\ \tau(d_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} cd = r\ , \quad \text{avec} \quad r = \sigma\tau(r) \quad , \\ d_i = \dfrac{\delta d_1\ \sigma\tau(c_i)\ c_{4-i}}{c_2\ \sigma(d_1)\ \sigma\tau(c_2)}\ \sigma(d_{i-1}) \quad , \end{cases}$$

pour

$$i = 3\ , \ldots , \frac{p}{2} + 2\ , \qquad \text{si } p \text{ est pair} \quad ,$$

$$i = 3\ , \ldots , \frac{p+3}{2}\ , \qquad \text{si } p \text{ est impair} \quad .$$

La deuxième de ces relations permet le calcul des d_i correspondants, compte tenu de $d_2 = \delta d_1$. On obtient

$$d_i = \frac{\delta\sigma(\delta)\ \ldots\ \sigma^{i-2}(\delta)\ \sigma\tau(c_i)\ \sigma^2\ \tau(c_{i-1})\ \ldots\ \sigma^{i-2}\ \tau(c_3)\ c_{4-i}\ \sigma(c_{5-i})\ \ldots\ \sigma^{i-3}(c_1)}{c_2\ \sigma(c_2)\ \ldots\ \sigma^{i-3}(c_2)\ \sigma\tau(c_2)\ \sigma^2\ \tau(c_2)\ \ldots\ \sigma^{i-2}\ \tau(c_2)}\ d_1 .$$

Ecrivons maintenant, dans chacun des cas, la condition de compatibilité.

- Si p est pair, elle s'écrit :

$$\delta d_1\ \tau(d_1) = d_{(p/2)+2}\ \tau(d_{(p/2)+1}) = \frac{\delta d_1\ \sigma\tau(c_{(p/2)+2})\ c_{(p/2)+2}}{c_2\ \sigma(d_1)\ \sigma\tau(c_2)}\ \sigma(d_{(p/2)+1})\ \tau(d_{(p/2)+1}) ,$$

soit

$$\frac{c_{(p/2)+2}\ \tau(d_{(p/2)+1})}{c_2\ \tau(d_1)}\ \sigma\tau\left[\frac{c_{(p/2)+2}\ \tau(d_{(p/2)+1})}{c_2\ \tau(d_1)}\right] = 1 .$$

Or $c_{(p/2)+2}$

$$= \frac{\gamma}{\sigma^{(p/2)-1}(c_1)\sigma^{p/2}(c_2)\ldots\sigma^{p-1}(c_{(p/2)+1})\sigma(c_{(p/2)+3})\ldots\sigma^{(p/2)-3}(c_{p-1})\sigma^{(p/2)-2}(c_p)} ,$$

$d_{(p/2)+1}$

$$= \frac{\delta\sigma(\delta)\ldots\sigma^{(p/2)-1}(\delta)\sigma\tau(c_{(p/2)+1})\ldots\sigma^{(p/2)-1}\tau(c_3)c_{(p/2)+3}\sigma(c_{(p/2)+4})\ldots\sigma^{(p/2)-2}(c_1)}{c_2\sigma(c_2)\ldots\sigma^{(p/2)-2}(c_2)\sigma\tau(c_2)\sigma^2\tau(c_2)\ldots\sigma^{(p/2)-1}\tau(c_2)}\ d_1 .$$

On en déduit $c_{(p/2)+2}\ \tau(d_{(p/2)+1})$

$$= \frac{\gamma\tau(d_1)c_{(p/2)+2}\ \prod_{i=(p/2)+1}^{p} \sigma^i(\delta)\ \prod_{i=(p/2)+3}^{p+1} \sigma^{(p/2)-i+3}\tau(c_i)}{\prod_{i=(p/2)+2}^{p+2} \sigma^{(p/2)+i-2}(c_i)\ \prod_{i=(p/2)+1}^{p-1} \sigma^i(c_2)\sigma^{i+1}\tau(c_2)} ,$$

avec la convention suivante (valable pour la suite) : $c_{p+r} = c_r$. La condition s'écrit $N_{K/k}(c_2) = N_{k(\alpha)/k}(\gamma)\ N_{k(\theta)/k}(\delta)$.

- Si p est impair, elle s'écrit :

$$\delta d_1\ \tau(d_1) = d_{(p+3)/2}\ \tau(d_{(p+3)/2}) .$$

Or

$$c_{(p+3)/2} = \frac{\gamma}{\sigma^{(p-1)/2}(c_1)\sigma^{(p+1)/2}(c_2)\ldots\sigma^{p-1}(c_{(p+1)/2})\sigma(c_{(p+5)/2})\ldots\sigma^{(p-3)/2}(c_p)} ,$$

$$d_{(p+3)/2} = \frac{d_1 \prod_{i=0}^{(p-1)/2} \sigma^i(\delta) \prod_{i=3}^{(p+3)/2} \sigma^{((p+5)/2)-i}\tau(c_i) \prod_{i=(p+5)/2}^{p+1} \sigma^{((p-5)/2)+i}(c_i)}{\prod_{i=0}^{(p-3)/2} \sigma^i(c_2)\sigma^{i+1}\tau(c_2)}$$

$$= \frac{d_1\tau(\gamma) \prod_{i=0}^{(p-1)/2} \sigma^i(\delta) \prod_{i=3}^{(p+1)/2} \sigma^{((p+5)/2)-i}\tau(c_i) \prod_{i=(p+5)/2}^{p+1} \sigma^{((p-5)/2)+i}(c_i)\sigma\tau(c_{(p+3)/2})}{\prod_{i=0}^{(p-3)/2} \sigma^i(c_2)\sigma^{i+1}\tau(c_2) \prod_{i=1}^{p} \sigma^{((p+5)/2)-i}\tau(c_i)} .$$

La condition s'écrit ici encore $N_{K/k}(c_2) = N_{k(\alpha)/k}(\gamma)\ N_{k(\theta)/k}(\delta)$.

Remarquons encore que

$$\begin{Bmatrix} cd = r\ , \quad d \in k(\theta)\ , \quad r = \sigma\tau(r) \\ N_{K/k(\alpha)}(c) = 1 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} c = \frac{r}{d}\ , \quad d \in k(\theta)\ , \quad r = \sigma\tau(r) \\ N_{k(\theta)/k}(d) = N_{K/k(\alpha)}(r) \end{Bmatrix} .$$

Nous avons obtenu le résultat suivant.

Les couples $(\mathfrak{B}_\sigma\ , \mathfrak{B}_\tau)$ vérifiant (3) et (6) sont obtenus en considérant une solution arbitraire des équations

(R_1) $$N_{k(\theta)/k}(d) = N_{K/k(\alpha)}(r) \quad ,$$

(R_2) $$N_{K/k}(c_2) = N_{k(\alpha)/k}(\gamma)\ N_{k(\theta)/k}(\delta) \quad ,$$

avec $c_2 \in K$, $d \in k(\theta)$, $\delta \in k(\theta)$, $\gamma \in k(\alpha)$, $r = \sigma\tau(r)$, et un ensemble de valeurs arbitraires pour $c_3 , \dots , c_p , d_1$.

Les autres constantes sont alors déterminées par

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{\gamma}{\sigma(c_2)\ \sigma^2(c_3)\ \dots\ \sigma^{p-1}(c_p)} \ , \\ d_2 = \delta d_1 \ , \\ d_i = \dfrac{\delta\sigma(\delta)\ \dots\ \sigma^{i-2}(\delta)\ \sigma\tau(c_i)\ \dots\ \sigma^{i-2}\ \tau(c_3)\ c_{4-i}\ \sigma(c_{5-i})\ \dots\ \sigma^{i-3}(c_1)}{c_2\ \sigma(c_2)\ \dots\ \sigma^{i-3}(c_2)\ \sigma\tau(c_2)\ \sigma^2\ \tau(c_2)\ \dots\ \sigma^{i-2}\ \tau(c_2)} d_1 \ , \end{cases}$$

pour $i = 3 , \dots , p$.

7. Détermination de la famille $\mathfrak{F}$ des couples pour lesquels (4) admet des solutions.

$$(4) \iff \begin{cases} \mathcal{B}_\sigma(M) = \sigma(M) \\ \mathcal{B}_\tau(M) = \tau(M) \end{cases} \iff (\exists\ \rho \in K)(\exists\ \rho' \in K) \begin{cases} \rho\sigma(u_i) = c_i\ u_{i-1} \\ \rho\sigma(v_i) = cc_{3-i}\ v_{i+1} \end{cases} \text{1er groupe} \quad \begin{cases} \rho'\tau(u_i) = d_i\ v_i \\ \rho'\tau(v_i) = dd_{3-i}\ u_i \end{cases} \text{2e groupe} \ .$$

Les p premières équations du 1er groupe donnent

$$(\forall\ i) \qquad u_i = \frac{\sigma^{1-i}(c_2)\ \sigma^{2-i}(c_3)\ \dots\ \sigma^{p-1}(c_i)\ \sigma^{1-i}(u_1)}{\sigma^{1-i}(\rho)\ \sigma^{2-i}(\rho)\ \dots\ \sigma^{p-1}(\rho)} \ .$$

En faisant $i = 1$, on obtient une condition de compatibilité

$$u_1 = \frac{c_2\ \sigma(c_3)\ \dots\ \sigma^{p-1}(c_p)\ \sigma^{p-1}(c_1)}{\rho\sigma(\rho)\ \dots\ \sigma^{p-1}(\rho)}\, u_1 \ ,$$

soit

$$c_p = \frac{N_{K/k(\alpha)}(\rho)}{\sigma(c_1)\ \sigma^2(c_2)\ \dots\ \sigma^{p-1}(c_{p-1})} \ .$$

On retrouve la relation (A), lorsqu'on pose $\gamma = N_{K/k(\alpha)}(\rho)$.

Les p premières équations du 2e groupe donnent

$$(\forall\ i) \qquad v_i = \frac{\rho'\tau(u_i)}{d_i} = \frac{\rho'\sigma^{i-1}\ \tau(c_2)\ \sigma^{i-2}\ \tau(c_3)\ \dots\ \sigma\tau(c_i)\ \sigma^{i-1}\ \tau(u_1)}{d_i\ \sigma^{i-1}\ \tau(\rho)\ \sigma^{i-2}\ \tau(\rho)\ \dots\ \sigma\tau(\rho)} \ .$$

Portons ces valeurs dans les p dernières équations du 2e groupe. On obtient

$$(\forall\ i) \quad \frac{\rho'\tau(\rho')}{\tau(d_i)} = dd_{3-i} \ , \qquad \text{soit} \qquad (\forall\ i) \quad d_i = \frac{\rho'\tau(\rho')}{\tau(dd_{3-i})} \ ,$$

qui équivalent à

$$\begin{cases} d = \tau(d) \ , \\ (\forall\ i) \quad d_i = \dfrac{\rho'\tau(\rho')}{d\tau(d_{3-i})} \ . \end{cases}$$

On retrouve la condition (B) de la première partie dans laquelle on a remplacé δ par $\dfrac{\rho'\tau(\rho')}{dd_1\ \tau(d_1)}$.

Il reste à considérer les p dernières équations du 1er groupe.

$$(\forall\ i)\quad \frac{\rho\sigma(\rho')\sigma^i\tau(c_2)\sigma^{i-1}\tau(c_3)\ldots\sigma^2\tau(c_i)\sigma^i\tau(u_1)}{\sigma^i\tau(\rho)\sigma^{i-1}\tau(\rho)\ldots\sigma^2\tau(\rho)\sigma(d_i)} = \frac{cc_{3-i}\rho'\sigma^i\tau(c_2)\ldots\sigma\tau(c_{i+1})\sigma^i\tau(u_1)}{\sigma^i\tau(\rho)\ldots\sigma\tau(\rho)d_{i+1}}$$

$$\Longleftrightarrow\quad (\forall\ i)\quad \rho\sigma(\rho')\ \sigma\tau(\rho)\ d_{i+1} = c\rho'\sigma\tau(c_{i+1})\ c_{3-i}\ \sigma(d_i)$$

$$\Longleftrightarrow\quad (\forall\ i)\quad d_i = \frac{c\rho'\sigma\tau(c_i)\ c_{4-i}}{\rho\sigma(\rho')\ \sigma\tau(\rho)}\,\sigma(d_{i-1})\quad ,$$

qui est la deuxième relation de (D), lorsqu'on pose $\delta = \dfrac{\rho' cc_2\ \sigma\tau(c_2)\ \sigma(d_1)}{\rho\sigma(\rho')\ \sigma\tau(\rho)\ d_1}$.

Les résultats de la première partie sont encore valables, pourvu que les deux valeurs trouvées pour δ soient égales, c'est-à-dire pourvu que

$$\frac{\rho'\tau(\rho')}{dd_1\ \tau(d_1)} = \frac{\rho' cc_2\ \sigma\tau(c_2)\ \sigma(d_1)}{\rho\sigma(\rho')\ \sigma\tau(\rho)\ d_1}\quad ,$$

soit

$$cd = \frac{\rho\tau(\rho')}{c_2\ \tau(d_1)}\,\sigma\tau\Big[\frac{\rho\tau(\rho')}{c_2\ \tau(d_1)}\Big]\quad .$$

On obtiendra donc les conditions cherchées en remplaçant, dans les résultats précédents :

$$\begin{cases} \gamma \ \text{ par }\ N_{K/k(\alpha)}(\rho)\quad , \\[2mm] \delta \ \text{ par }\ \dfrac{\rho'\tau(\rho')}{dd_1\ \tau(d_1)}\quad , \\[2mm] r \ \text{ par }\ \dfrac{\rho\tau(\rho')}{c_2\ \tau(d_1)}\,\sigma\tau\Big[\dfrac{\rho\tau(\rho')}{c_2\ \tau(d_1)}\Big]\quad . \end{cases}$$

On a bien $r = \sigma\tau(r)$.

R_1 s'écrit

$$N_{k(\theta)/k}(d) = \frac{N_{K/k(\alpha)}(\rho\tau(\rho')\ \sigma\tau(\rho)\ \sigma(\rho'))}{N_{K/k(\alpha)}(c_2\ \tau(d_1)\ \sigma\tau(c_2)\ \sigma(d_1))} = N_{K/k}\Big(\frac{\rho\rho'}{c_2\ d_1}\Big)\quad ,$$

soit

(U) $$N_{k(\theta)/k}(t) = 1\ ,\qquad \text{avec}\quad t = \frac{\rho\rho'\tau(\rho\rho')}{dc_2\ d_1\ \tau(c_2\ d_1)}\quad ;$$

R_2 s'écrit

$$N_{K/k}(c_2) = N_{K/k}(\rho)\,\frac{N_{K/k}(\rho')}{N_{k(\theta)/k}(d)\ N_{K/k}(d_1)} \iff (U)\ .$$

On retrouve ainsi l'équation de départ (E).

En utilisant les résultats du paragraphe précédent, on voit que les couples $(\mathcal{B}_\sigma , \mathcal{B}_\tau)$ de $\mathfrak{F}$ sont obtenus en choisissant t_0 solution de (E) ; ρ , ρ' , d_1 , c_2 , ... , c_p arbitraires, puis en prenant

$$d = \frac{\rho\rho'\tau(\rho\rho')}{t_0\ c_2\ d_1\ \tau(c_2\ d_1)}\ ,$$

$$\gamma = N_{K/k(\alpha)}(\rho)\ ,\quad \delta = \frac{\rho'\tau(\rho')}{dd_1\ \tau(d_1)}\ ,$$

$$d_2 = \delta d_1\ ,$$

$$c = \frac{\rho\tau(\rho')}{c_2\ \tau(d_1)}\ \sigma\tau\Big[\frac{\rho\tau(\rho')}{c_2\ \tau(d_1)}\Big] \times \frac{1}{d}\ ,$$

$$c_1 = \frac{\gamma}{\sigma(c_2)\ \sigma^2(c_3)\ \dots\ \sigma^{p-1}(c_p)}\ ,$$

$$d_i = \frac{\delta\sigma(\delta)\dots\sigma^{i-2}(\delta)\sigma\tau(c_i)\sigma^2\tau(c_{i-1})\dots\sigma^{i-2}\tau(c_3)c_{4-i}\sigma(c_{5-i})\dots\sigma^{i-3}(c_1)d_1}{c_2\sigma(c_2)\dots\sigma^{i-3}(c_2)\sigma\tau(c_2)\sigma^2\tau(c_2)\dots\sigma^{i-2}\tau(c_2)}\ .$$

Démontrons maintenant la proposition suivante :

<u>Pour tout</u> $p \in F$, <u>il existe</u> $(\mathcal{B}_\sigma , \mathcal{B}_\tau) \in \mathfrak{F}$ <u>et</u> $M \in E_{2p-1}$ (<u>vérifiant</u> (4)) <u>tels que</u> $P = (T \circ \varphi)(M)$.

$$P = T(\lambda_1 , \dots , \lambda_p) \in F \iff \begin{cases} N_{K/k(\alpha)}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = 1\ ,\quad N_{K/k(\alpha)}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = 1\ , \\[2ex] \mathfrak{a}_\sigma(m) = \sigma(m) \iff (\forall\ i)\ \ \dfrac{\sigma(\lambda_1)}{\lambda_2} = \dfrac{\sigma(\lambda_i)}{\lambda_{i+1}}\ , \\[2ex] \mathfrak{a}_\tau(m) = \tau(m) \iff (\forall\ i)\ \ \tau(\lambda_1)\ \lambda_2 = \tau(\lambda_i)\ \lambda_{p+3-i}\ . \end{cases}$$

Si on pose $M = (u_1 , \dots , u_p , v_1 , \dots , v_p)$,

$$P = (T \circ \varphi)(M) \iff (\exists\ s \in K)\ \ (\forall\ i)\ \ \lambda_i = s\,\frac{v_i}{u_{p+3-i}}$$

$$\iff (\exists\ s \in K)\ \ (\forall\ i)\ \ v_i = \frac{\lambda_i\ u_{p+3-i}}{s}\ ,$$

$$(4) \iff \begin{cases} \mathcal{B}_\sigma(M) = \sigma(M) \\ \mathcal{B}_\tau(M) = \tau(M) \end{cases} \iff (\exists\ \rho \in K) \quad (\exists\ \rho' \in K) \quad \begin{cases} \rho\sigma(u_i) = c_i\ u_{i-1} \ , \\ \rho\sigma(v_i) = cc_{3-i}\ v_{i+1} \ , \\ \rho'\tau(u_i) = d_i\ v_i \ , \\ \rho'\tau(v_i) = dd_{3-i}\ u_i \ . \end{cases}$$

D'où les valeurs des constantes. Pour tout i ,

$$c_i = \rho\,\frac{\sigma(u_i)}{u_{i-1}} \ , \quad d_i = \frac{\rho'\tau(u_i)}{v_i} = \rho'\,\frac{\tau(u_i)}{\lambda_i}\,\frac{s}{u_{p+3-i}} \ ,$$

$$c = \frac{\rho\sigma(v_i)}{c_{3-i}\ v_{i+1}} = \frac{u_{2-i}}{\sigma(u_{3-i})}\,\frac{\sigma(\lambda_i\ u_{3-i})}{\sigma(s)}\,\frac{s}{\lambda_{i+1}\ u_{2-i}} = \frac{s}{\sigma(s)}\,\frac{\sigma(\lambda_i)}{\lambda_{i+1}} \ ,$$

$$d = \frac{\rho'\tau(v_i)}{d_{3-i}\ u_i} = \frac{\rho'}{u_i}\,\frac{\lambda_{3-i}\ u_i}{\tau(u_{3-i})s}\,\frac{\tau(\lambda_i\ u_{3-i})}{\tau(s)} = \frac{\lambda_{3-i}\ \tau(\lambda_i)}{s\tau(s)} \ .$$

Compte tenu des conditions exprimant $P \in F$, on vérifie que les diverses expressions obtenues pour c (ou d) sont égales. En particulier, faisant $i = 1$, on obtient

$$c = \frac{s}{\sigma(s)}\,\frac{\sigma(\lambda_1)}{\lambda_2} \ , \qquad d = \frac{\lambda_2\ \tau(\lambda_1)}{s\tau(s)} \ .$$

Montrons maintenant que les couples $(\mathcal{B}_\sigma\ ,\ \mathcal{B}_\tau)$ obtenus appartiennent à $\mathfrak{F}$.

Posons $t = (\rho\rho'\tau(\rho\rho'))/(dc_2\ d_1\ \tau(c_2\ d_1))$,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\tau(\lambda_1)}{\tau(\lambda_2)} \implies \lambda_2\ \tau(\lambda_1) = \tau[\lambda_2\ \tau(\lambda_1)]$$

$$\implies \lambda_2\ \tau(\lambda_1) \in k(\theta) \implies d \in k(\theta) \implies t \in k(\theta) \ .$$

De plus,

$$t = \rho\rho'\tau(\rho\rho')\ \frac{s\tau(s)}{\lambda_2\ \tau(\lambda_1)} \times \frac{u_1}{\rho\sigma(u_2)} \times \frac{\lambda_1\ u_2}{\rho' s\tau(u_1)} \times \frac{\tau(u_1)}{\tau(\rho)\ \tau\sigma(u_2)} \times \frac{\tau(\lambda_1\ u_2)}{\tau(\rho' s)u_1}$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \times \frac{u_2\ \tau(u_2)}{\sigma(u_2)\ \tau\sigma(u_2)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \times \frac{u_2/(\tau\sigma(u_2))}{\sigma(u_2/(\tau\sigma(u_2)))} \implies N_{k(\theta)/k}(t) = N_{k(\theta)/k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = 1 \ .$$

$$c_1\ \sigma(c_2)\ \ldots\ \sigma^{p-1}(c_p) = \rho\,\frac{\sigma(u_1)}{u_p} \times \frac{\sigma(\rho)\ \sigma^2(u_2)}{\sigma(u_1)} \times \ldots \times \frac{\sigma^{p-1}(\rho)u_p}{\sigma^{p-1}(u_{p-1})} = N_{K/k(\alpha)}(\rho) \ .$$

$$\frac{\rho\tau(\rho')}{c_2\ \tau(d_1)} = \rho\tau(\rho')\ \frac{u_1}{\rho\sigma(u_2)}\ \frac{\tau(\lambda_1\ u_2)}{\tau(\rho')u_1\ \tau(s)} = \frac{\tau(\lambda_1\ u_2)}{\sigma(u_2)\ \tau(s)}\ .$$

Donc $\dfrac{\rho\tau(\rho')}{c_2\ \tau(d_1)}\ \sigma\tau[\dfrac{\rho\tau(\rho')}{c_2\ \tau(d_1)}] = \dfrac{\tau(\lambda_1\ u_2)}{\sigma(u_2)\ \tau(s)} \times \dfrac{\sigma(\lambda_1\ u_2)}{\tau(u_2)\ \sigma(s)} = \dfrac{\sigma(\lambda_1)\ \tau(\lambda_1)}{\sigma(s)\ \tau(s)} = cd$.

$\delta = \dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{\tau(u_2)\ \lambda_1\ u_2}{\tau(u_1)\ \lambda_2\ u_1}$ entraîne

$$\frac{\delta\sigma(\delta)\cdots\sigma^{i-2}(\delta)\sigma\tau(c_i)\sigma^2\tau(c_{i-1})\cdots\sigma^{i-2}\tau(c_3)c_{4-i}\sigma(c_{5-i})\cdots\sigma^{i-3}(c_1)d_1}{c_2\sigma(c_2)\cdots\sigma^{i-3}(c_2)\sigma\tau(c_2)\sigma^2\tau(c_2)\cdots\sigma^{i-2}\tau(c_2)} = \frac{\rho' s\tau(u_i)}{\lambda_i u_{p+3-i}} = d_i\ .$$

$$\frac{\rho'\tau(\rho')}{dd_1\ \tau(d_1)} = \rho'\tau(\rho')\ \frac{s\tau(s)}{\lambda_2\ \tau(\lambda_1)}\ \frac{\lambda_1\ u_2}{\rho' s\tau(u_1)}\ \frac{\tau(\lambda_1\ u_2)}{\tau(\rho' s)u_1} = \frac{\tau(u_2)\ \lambda_1\ u_2}{\tau(u_1)\ \lambda_2\ u_1}$$

montre que les deux expressions obtenues pour δ sont égales.

8. Conditions pour qu'un seul couple de $\mathfrak{F}$ fournisse tous les points rationnels de S .

Donnons-nous un couple $(\mathcal{B}_\sigma\ ,\ \mathcal{B}_\tau)$, correspondant à des valeurs t_0 , ρ_1 , ρ_1' , c_i , d_i , et cherchons à quelles conditions ce couple suffit à obtenir les points de F . Nous nous servirons des résultats du paragraphe précédent. Tout revient à trouver, pour tout $(\lambda_1\ ,\ \ldots\ ,\ \lambda_p) \in E_{p-1}$ tel que $P = T(\lambda_1\ ,\ \ldots\ ,\ \lambda_p) \in F$, un ensemble de nombres s , ρ , ρ' , u_1 , ... , u_p de K tels que

$$\frac{s}{\sigma(s)} \times \frac{\sigma(\lambda_1)}{\lambda_2} = t_0\Big(\sigma\tau[\frac{\rho_1\ \tau(\rho_1')}{c_2\ \tau(d_1)}] \Big/ \frac{\rho_1'\ \tau(\rho_1)}{d_1\ \tau(c_2)}\Big) = t_0\Big(\sigma\Big(\frac{\rho_1'\ \tau(\rho_1)}{d_1\ \tau(c_2)}\Big) \Big/ \frac{\rho_1'\ \tau(\rho_1)}{d_1\ \tau(c_2)}\Big)\ ,$$

$$\frac{\lambda_2\ \tau(\lambda_1)}{s\tau(s)} = \frac{\rho_1\ \rho_1'\ \tau(\rho_1\ \rho_1')}{t_0\ c_2\ d_1\ \tau(c_2\ d_1)}\ ,$$

$$\rho\ \frac{\sigma(u_i)}{u_{i-1}} = c_i\ ,$$

$$\rho'\ \frac{\tau(u_1)}{\lambda_1} \times \frac{s}{u_2} = d_1\ ,$$

$$\rho'\ \frac{\tau(u_2)}{\lambda_2} \times \frac{s}{u_1} = \delta d_1\ .$$

Ce système équivaut à :

$$(\alpha_1) \qquad \frac{s}{\sigma(s)} = \frac{\lambda_2}{\sigma(\lambda_1)}\, t_0\Big(\sigma\Big(\frac{\rho_1'\ \tau(\rho_1)}{d_1\ \tau(c_2)}\Big) \Big/ \frac{\rho_1'\ \tau(\rho_1)}{d_1\ \tau(c_2)}\Big) \quad ,$$

$$(\alpha_2) \qquad s\tau(s) = t_0\ \lambda_2\ \tau(\lambda_1)\ \frac{c_2\ d_1\ \tau(c_2\ d_1)}{\rho_1\ \rho_1'\ \tau(\rho_1\ \rho_1')} \quad ,$$

$$(\alpha_3) \qquad u_i = \sigma^{-1}\Big(\frac{c_i\ u_{i-1}}{\rho}\Big) \quad ,$$

$$(\alpha_4) \qquad \rho' s\tau(u_1) = d_1\ \lambda_1\ u_2 \quad ,$$

$$(\alpha_5) \qquad \rho' s\tau(u_2) = \delta d_1\ \lambda_2\ u_1 \quad .$$

Si (α_2) est vérifiée, on a

$$(\alpha_5) \iff \frac{\lambda_2}{s} = \frac{\rho'\tau(u_2)}{\delta d_1\ u_1} \iff \frac{\tau(s)\ \rho_1\ \rho_1'\ \tau(\rho_1\ \rho_1')}{t_0\ \tau(\lambda_1)\ c_2\ d_1\ \tau(c_2\ d_1)} = \frac{\rho'\tau(u_2)}{\delta d_1\ u_1}$$

$$\iff \frac{s}{\lambda_1\ t_0}\ \frac{\rho_1\ \rho_1'\ \tau(\rho_1\ \rho_1')}{c_2\ d_1\ \tau(c_2\ d_1)} = \frac{u_2\ \tau(\rho')}{\delta\tau(d_1)\ \tau(u_1)}$$

$$\iff \frac{s\tau(u_1)}{\lambda_1\ u_2} = \frac{t_0\ \tau(\rho')}{\delta\tau(d_1)}\ \frac{c_2\ d_1\ \tau(c_2\ d_1)}{\rho_1\ \rho_1'\ \tau(\rho_1\ \rho_1')} = \frac{d_1\ \tau(\rho')}{\rho_1'\ \tau(\rho_1')} \ .$$

D'où $[(\alpha_4)$ et $(\alpha_5)] \iff [(\alpha_4)$ et $\rho'\tau(\rho') = \rho_1'\ \tau(\rho_1')]$.

Supposons pour l'instant trouvée une solution s_0 de (α_1) et (α_2),

$$(\alpha_4) \iff \frac{s_0}{\lambda_1} = d_1\ \frac{u_2}{\tau(u_1)} = \frac{d_1}{\tau(u_1)}\ \sigma^{-1}\Big(\frac{c_2\ u_1}{\rho}\Big) = \frac{\sigma^{-1}(u_1)}{\tau(u_1)}\ d_1\ \sigma^{-1}\Big(\frac{c_2}{\rho}\Big)$$

$$\iff \frac{u_1}{\sigma\tau(u_1)} = \sigma\Big(\frac{s_0}{\lambda_1}\Big)\ \frac{\rho}{c_2\ \sigma(d_1)} \quad .$$

D'après le théorème 90 de Hilbert, cette équation aura des solutions si, et seulement si, en appelant K_1 le corps fixe par $\sigma\tau$, $N_{K/K_1}[\sigma\Big(\frac{s_0}{\lambda_1}\Big)\ \frac{\rho}{c_2\ \sigma(d_1)}] = 1$. Or

$$N_{K/K_1}\left[\sigma\left(\frac{s_0}{\lambda_1}\right)\frac{\rho}{c_2\ \sigma(d_1)}\right] = \frac{\sigma(s_0)\ \tau(s_0)}{\sigma(\lambda_1)\ \tau(\lambda_1)}\ \frac{\rho\sigma\tau(\rho)}{c_2\ \sigma\tau(c_2)\ \sigma(d_1)\ \tau(d_1)}$$

$$= \frac{\rho_1'\ \tau(\rho_1)}{d_1\ \tau(c_2)} \Big/ \left(\lambda_2\ t_0\ \sigma\left[\frac{\rho_1'\ \tau(\rho_1)}{d_1\ \tau(c_2)}\right]\right) \times t_0\ \lambda_2\ \frac{c_2\ d_1\ \tau(c_2\ d_1)}{\rho_1\ \rho_1'\ \tau(\rho_1\ \rho_1')} \times \frac{\rho\sigma\tau(\rho)}{c_2\ \sigma\tau(c_2)\ \sigma(d_1)\ \tau(d_1)}$$

$$= \frac{\rho\sigma\tau(\rho)}{\rho_1\ \sigma(\rho_1')\ \sigma\tau(\rho_1)\ \tau(\rho_1')} = N_{K/K_1}\left[\frac{\rho}{\rho_1\ \sigma(\rho_1')}\right] .$$

Il suffit donc de prendre $\rho = \rho_1\ \sigma(\rho_1')$.

Soit alors u_1^0 tel que

$$\frac{u_1^0}{\sigma\tau(u_1^0)} = \sigma\left(\frac{s_0}{\lambda_1}\right)\frac{\rho_1\ \sigma(\rho_1')}{c_2\ \sigma(d_1)} .$$

(α_3) admet pour solutions :

$$(\forall\ i) \qquad u_i = \sigma^{-i+1}(u_1^0)\ \sigma^{-1}\left(\frac{c_i\ c_{i-1}\ \cdots\ c_2}{\rho^{i-1}}\right) .$$

Tout revient donc à étudier (α_1) et (α_2).

(α_1) a des solutions, car

$$N_{K/k(\alpha)}\left\{\frac{\lambda_2\ t_0}{\sigma(\lambda_1)}\left(\sigma\left(\frac{\rho_1'\ \tau(\rho_1)}{d_1\ \tau(c_2)}\right) \Big/ \frac{\rho_1'\ \tau(\rho_1)}{d_1\ \tau(c_2)}\right)\right\} = N_{K/k(\alpha)}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) N_{K/k(\alpha)}(t_0) = 1 .$$

Soit s_1 l'une de ces solutions,

$$(\alpha_1) \iff s = ws_1\ , \qquad w \in k(\alpha) ,$$

$$(\alpha_2) \iff w\tau(w) = \frac{t_0}{\beta_0}\ \frac{\lambda_1\ c_2\ d_1}{\rho_1\ \rho_1'\ s_1}\ \tau\left(\frac{\lambda_1\ c_2\ d_1}{\rho_1\ \rho_1'\ s_1}\right), \qquad \text{avec} \quad \beta_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} .$$

(α_2) aura donc des solutions si, et seulement si, il existe $\eta \in K$ tel que $\frac{t_0}{\beta_0} = \eta\tau(\eta)$. Cela doit être vrai, quelle que soit la solution β_0 de (E), donc quel que soit $\frac{t_0}{\beta_0}$ (solution de (E)).

Autrement dit, toutes les solutions de (E) doivent être des normes de nombres de K par rapport à $k(\theta)$. Remarquons que cette condition ne dépend pas du couple $(\beta_\sigma\ ,\ \beta_\tau)$ choisi. On pourra donc, si elle est remplie, choisir le couple correspondant à tous les coefficients égaux à 1 . On trouve que les solutions de (E) sont données par

$$\beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{u_1\ v_1}{u_2\ v_2}, \qquad \text{avec} \begin{cases} v_1 = \tau(u_1) \ , \\ u_2 = \sigma^{-1}(u_1) \ , \qquad\qquad u_1 \in K \ , \\ v_2 = \tau(u_2) = \sigma\tau(u_1) \ , \end{cases}$$

c'est-à-dire par l'unique formule

$$\beta = \frac{u_1\ \tau(u_1)}{\sigma^{-1}(u_1)\ \sigma\tau(u_1)}, \qquad u_1 \in K \ .$$

Remarque. - Si la condition trouvée n'est pas vérifiée, la formule ci-dessus fournit les solutions de (E) de la forme $N_{K/k(\theta)}(\zeta)$, $\zeta \in K$.

En effet, si $t_0 = 1$, la condition d'existence de solutions pour (α_2) se réduit à

$$(\exists\ \eta \in K) \qquad \frac{1}{\beta_0} = N_{K/k(\theta)}(\eta) \ .$$

9. Etude du cas p impair.

Nous allons montrer que, dans ce cas, la condition que l'on a trouvée est remplie.

(E) $N_{k(\theta)/k}(\beta) = 1 \iff (\beta \in k(\theta)$ et $N_{K/k(\alpha)}(\beta) = 1)$

$$\xLeftrightarrow{\text{(théorème 90)}} (\beta_1) \begin{cases} \beta = \dfrac{\delta}{\sigma(\delta)}, \quad \delta \in K \ , \\ \tau(\beta) = \beta \ . \end{cases}$$

Mais $\tau\left(\dfrac{\delta}{\sigma(\delta)}\right) = \dfrac{\delta}{\sigma(\delta)} \iff \tau(\delta)\ \sigma(\delta) = \delta\tau\sigma(\delta) = \sigma^{-1}[\sigma(\delta)\ \tau(\delta)]$

$$\iff \sigma(\delta)\ \tau(\delta) = \sigma[\sigma(\delta)\ \tau(\delta)] \ .$$

D'autre part $\tau[\sigma(\delta)\ \tau(\delta)] = \sigma^{-1}\ \tau(\delta)\delta = \sigma^{-1}[\sigma(\delta)\ \tau(\delta)] = \sigma(\delta)\ \tau(\delta)$. Donc

$$(\beta_1) \iff \left\{\begin{array}{l} \beta = \dfrac{\delta}{\sigma(\delta)}, \quad \delta \in K \\ \sigma(\delta)\ \tau(\delta) = \sigma[\sigma(\delta)\ \tau(\delta)] = \tau[\sigma(\delta)\ \tau(\delta)] \end{array}\right\}$$

$$\iff (\beta_2) \left\{\begin{array}{l} \beta = \dfrac{\delta}{\sigma(\delta)}, \quad \delta \in K \\ \sigma(\delta)\ \tau(\delta) \in k \end{array}\right\} .$$

Notons que ces résultats sont également valables dans le cas p pair.

Posons

$$\lambda = \frac{N_{K/k(\alpha)}(\delta)}{[\sigma(\delta)\ \tau(\delta)]^{(p-1)/2}} \ .$$

D'après (β_2), $\lambda \in k(\alpha)$. De plus

$$\lambda\tau(\lambda) = \frac{\prod_{K=1}^{p} \sigma^K(\delta) \prod_{K=1}^{p} \tau\sigma^K(\delta)}{[\sigma(\delta)\ \tau(\delta)]^{(p-1)}} = \frac{\prod_{K=1}^{p} \sigma^{K+1}(\delta) \prod_{K=1}^{p} \sigma^K\ \tau(\delta)}{[\sigma(\delta)\ \tau(\delta)]^{(p-1)}}$$

$$= \frac{\prod_{K=1}^{p} \sigma^K[\sigma(\delta)\ \tau(\delta)]}{[\sigma(\delta)\ \tau(\delta)]^{(p-1)}} = \frac{[\sigma(\delta)\ \tau(\delta)]^p}{[\sigma(\delta)\ \tau(\delta)]^{(p-1)}} = \sigma(\delta)\ \tau(\delta) \ .$$

Donc $\beta = \dfrac{\delta\tau(\delta)}{\sigma(\delta)\ \tau(\delta)} = \dfrac{\delta}{\lambda}\ \tau\left(\dfrac{\delta}{\lambda}\right) = N_{K/k(\theta)}\left(\dfrac{\delta}{\lambda}\right)$, qui montre que les solutions de (E) sont des normes de nombres de K par rapport à $k(\theta)$. Elles sont donc données par

$$\beta = \frac{u_1\ \tau(u_1)}{\sigma^{-1}(u_1)\ \sigma\tau(u_1)} , \qquad u_1 \in K \ .$$

11. Etude, dans le cas p impair, de l'équation
(E_1) $N_{k(\theta)/k}(\beta_1) = A$, $A \in k$.

Associons à (E_1) l'équation

(E_2)
$$N_{K/k(\alpha)}(\beta_2) = A \ .$$

Si (E_1) a pour solution β_1^0 , (E_2) a pour solution $\beta_2 = \beta_1^0$, car

$$N_{K/k(\alpha)}(\beta_1^0) = \beta_1^0\ \sigma(\beta_1^0)\ \ldots\ \sigma^{p-1}(\beta_1^0) = N_{k(\theta)/k}(\beta_1^0) = A \ .$$

Si (E_2) a pour solution β_2^0 , (E_1) a pour solution $\beta_1 = A/\left(N_{K/k(\theta)}((\beta_2^0)^{(p-1)/2})\right)$, car

$$N_{k(\theta)/k}\left(\frac{A}{N_{K/k(\theta)}((\beta_2^0)^{(p-1)/2})}\right) = \frac{A^p}{N_{K/k}((\beta_2^0)^{(p-1)/2})} = \frac{A^p}{N_{k(\alpha)/k}[N_{K/k(\alpha)}((\beta_2^0)^{(p-1)/2})]}$$

$$= \frac{A^p}{N_{k(\alpha)/k}(A^{(p-1)/2})} = \frac{A^p}{A^{p-1}} = A \ .$$

L'étude de (E_1) est donc équivalente à celle de (E_2). Mais, K étant une extension cyclique de $k(\alpha)$ (de groupe de Galois $\{1, \sigma, \ldots, \sigma^{p-1}\}$), l'étude de (E_2) résulte du théorème de Hasse sur les restes normiques : (E_2) a des solutions si, et seulement si, elle en a pour toute extension $\mathfrak{P}$-adique de $k(\alpha)$. De plus, il y a des solutions pour toutes les extensions dont $\mathfrak{P}$ ne divise, ni A, ni le discriminant D de K par rapport à $k(\alpha)$. Il suffit donc de faire un nombre fini de vérifications, correspondant aux extensions $\mathfrak{P}$-adiques, dont $\mathfrak{P}$ divise A ou D.

(Texte reçu le 26 janvier 1970)

Christian PITTI
Faculté des Sciences de Marseille
Place Victor Hugo
13 - MARSEILLE 03