Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Marc Krasner

Un principe d'approximation pour les variétés algébriques dans les corps valués complets

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, nº 1 (1969-1970), exp. nº 1-2, p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_1_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
23e année, 1969/70, n° 1-2, 2 p.

24 novembre 1969 et 19 janvier 1970

UN PRINCIPE D'APPROXIMATION POUR LES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES DANS LES CORPS VALUÉS COMPLETS

par Marc KRASNER

Résumé

L'objet de ces conférences a été l'exposé avec démonstration du théorème (un peu plus général que ne l'indique le titre de l'exposé), dont l'énoncé suit. Il n'est pas utile de donner, ici, même une idée de démonstration de ce théorème, car elle a été publiée dans mes quatre Notes (portant le même titre) des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [1].

THÉORÈME. - *Soient* k *un corps hypervalué (c'est-à-dire valué au sens de Krull) hensélien,* p *sa caractéristique,* $|..|$ *son hypervaluation,* Γ *son groupe des valeurs,* $\mathfrak{K}$ *une clôture algébrique hypervaluée (sous-entendu : par l'unique hypervaluation prolongeant celle* $|..|$ *du corps hensélien* k , *qui sera aussi notée* $|..|$ *dans* $\mathfrak{K}$ *et dans tous ses sous-corps) de* k , K *un corps arbitraire entre* k *et* $\mathfrak{K}$ $(k \subseteq K \subseteq \mathfrak{K})$, K^n *la somme directe (au sens de la théorie des anneaux) de* n *exemplaires de corps (hypervalué)* K *(donc, si* $x = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ *appartient à* K^n , x^i *signifie* $(x_1^i , x_2^i , \ldots , x_n^i)$), $|..|_n$ *et* $d_n(\, , \,)$ *l'hypervaluation produit de* K^n *et la distance hyperultramétrique correspondante (autrement dit, si* $x = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ *et* $y = (y_1 , y_2 , \ldots , y_n)$ *appartiennent à* K^n , *on a* $|x|_n = \max_i |x_i|$ *et* $d_n(x , y) = |x - y|_n = \max_i |x_i - y_i|$). *Soit* $\mathfrak{a} = (f_1 , f_2 , \ldots , f_s)$ *un idéal de l'anneau* $A = k[X_1 , X_2 , \ldots , X_n]$ *engendré par l'ensemble* $F = \{f_1 , f_2 , \ldots , f_s\} \subseteq A$. *Alors, on peut choisir des constantes* $c(F)$, $d(F)$, $i(F)$, $j(F)$, $q(\mathfrak{a})$, *et une fonction* $u(\mathfrak{a} \, ; \,)$ *ne dépendant que des paramètres explicitement indiqués, telles que* :

1° $c(F)$, $d(F) \in \Gamma$;

2° $i(F)$, $j(F)$ *et* $q(\mathfrak{a})$ *sont rationnelles, et* $i(F) \leqslant 0$, $j(F) \geqslant 0$, $q(\mathfrak{a}) > 0$;

3° $u(\mathfrak{a} \, ; \,)$ *est définie sur l'ensemble des corps* K *entre* k *et* $\mathfrak{K}$, *et sa valeur* $u(\mathfrak{a} \, ; K)$ *est un entier rationnel* $\geqslant 0$, *qui est* $= 0$ *si* K *est parfait, ces constantes et fonction ayant, en plus, la propriété suivante* :

Pour tout $R \in \Gamma$ *tel que* $R \leqslant 1$ (1 *signifie ici l'élément neutre du groupe* Γ), *pour tout* $\varepsilon \in \Gamma$ *tel que* $\varepsilon \leqslant d(F) \, R^{i(F)}$, *et pour tout corps* K *tel que*

$k \subseteq K \subseteq \mathfrak{K}$, <u>l'existence d'un</u> $x \in K^n$ <u>tel que</u> $|x|_n \leq R$ <u>et que, pour tout</u> $i = 1 , 2 , \ldots , s$, $|f_i(x)| < \varepsilon$, <u>implique l'existence d'un zéro</u> $y \in \mathfrak{K}^n$ <u>de l'idéal</u> $\mathfrak{a}$ <u>tel que</u> $d_n(x , y) < c(F)\, R^{j(F)}\, \varepsilon^{q(\alpha)}$ <u>et</u> $y^{p^{u(\alpha;K)}} \in K^n$.

<u>Remarque</u>. - Le cas particulier de ce théorème, où k est discrètement valué et $R = 1$, a été prouvé antérieurement (comme J.-P. SERRE me l'avait signalé) par M. GREENBERG dans [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRASNER (Marc). - Un principe d'approximation pour les variétés algébriques dans les corps valués complets, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, Série A, p. 757-760 et p. 1057-1060 ; t. 270, 1970, Série A, p. 21-24 et p. 1147-1149.

[2] GREENBERG (Marvin J.). - Rational points in henselian discrete valuation rings. - Paris, Presses universitaires de France, 1966 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 31 ; p. 59-64).

(Texte reçu le 16 décembre 1970)

Marc KRASNER
Prof. Fac. Sc. Paris
1 rue Ernest Gouin
75 - PARIS 17