MOHAMMAD ISHAQ

Sur une congruence et l'homomorphisme faible des algèbres universelles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, n° 2 (1968-1969), exp. n° 21, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_2_A9_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
22e année, 1968/69, n° 21, 11 p.

2 juin 1969

SUR UNE CONGRUENCE ET L'HOMOMORPHISME FAIBLE DES ALGÈBRES UNIVERSELLES

par Mohammad ISHAQ

Dans cet exposé, nous prendrons comme point de départ le concept de l'homomorphisme faible des algèbres universelles introduit récemment par A. GOETZ dans son article ([3]). Une lecture de cet article montre l'absence d'une congruence qui pourrait rendre l'homomorphisme faible plus fructueux. Dans ce but, nous définissons une congruence d'algèbres, appelée ici congruence-B , qui nous permet d'obtenir un certain nombre de propriétés intéressantes portant sur l'homomorphisme faible et la congruence-B dans les algèbres.

1. Soit $[A , \Omega]$ une algèbre ([4]), munie d'une famille d'opérations Ω définie sur A ; le rang ou le poids de chaque opération est supposé fini. Soient $[A , \Omega]$ et $[B , \Lambda]$ deux algèbres, θ une application de A dans B , et ρ_θ une relation de Ω vers Λ définie comme suit [1] :

(1) $$\omega \rho_\theta \lambda \iff \omega \circ \theta = \theta \circ \lambda , \quad \omega \in \Omega , \quad \lambda \in \Lambda ,$$

c'est-à-dire, pour tout $(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$, $a_i \in A$, on a

$$(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)(\omega \circ \theta) = (a_1 \theta , a_2 \theta , \ldots , a_n \theta)\lambda .$$

Si $\omega \in \Omega$ est de rang n , noté $r(\omega) = n$, n entier positif, on notera (1) sous la forme :

(1') $$\omega \rho_\theta \lambda \iff \omega \circ \theta = \theta^n \circ \lambda , \quad \omega \in \Omega , \quad \lambda \in \Lambda ,$$

où θ^n est l'extension fonctorielle des produits cartésiens aux applications, et $r(\omega) = r(\lambda)$.

L'application θ est un <u>homomorphisme faible</u> appliquant $[A , \Omega]$ dans $[B , \Lambda]$ si, pour tout $\omega \in \Omega$, il existe au moins un $\lambda \in \Lambda$ tel que $\omega \rho_\theta \lambda$ et, inversement, si, pour tout $\lambda' \in \Lambda$, il existe au moins un $\omega' \in \Omega$ tel que $\omega' \rho_\theta \lambda'$.

---

[1] Les notations que nous employons dans cet exposé diffèrent de celles généralement utilisées en France : $(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)\omega$ pour $\omega(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ et $\omega \circ \theta$ pour $\theta \circ \omega$.

Soient $[A , \Omega]$ une algèbre, R et σ des relations d'équivalence, définies respectivement dans A et dans Ω. Le couple (R , σ) sera dit [2] congruence-B de l'algèbre $[A , \Omega]$ si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées:

(i) $\omega , \omega' \in \Omega , \quad \omega \equiv \omega' \pmod{\sigma} \implies r(\omega) = r(\lambda)$;

(ii) $\omega , \omega' \in \Omega , \quad \omega \equiv \omega' \pmod{\sigma}$, $\forall (a_1 , a_2 , \dots , a_n)$, $(a'_1 , a'_2 , \dots , a'_n)$, $a_i , a'_i \in A$, si

$$a_i \equiv a'_i \pmod{R} \qquad (i = 1 , 2 , \dots , n) ,$$

on a

$$(a_1 , a_2 , \dots , a_n)\omega \equiv (a'_1 , a'_2 , \dots , a'_n)\omega' \pmod{R} ,$$

$r(\omega) = n = r(\omega')$.

Soient θ un homomorphisme faible appliquant $[A , \Omega]$ dans $[B , \Lambda]$ avec θ surjectif, et $\omega \, \rho_\theta \, \lambda$, $\omega \in \Omega$, $\lambda \in \Lambda$, et (R_2 , σ_2) une congruence-B de $[B , \Lambda]$. Désignons par N l'équivalence d'application définie dans A par

$$a \equiv a' \pmod{N} \iff a\theta = a'\theta , \quad a , a' \in A ,$$

et par ν l'équivalence définie dans Ω par

$$\omega \equiv \omega' \pmod{\nu} \iff (\forall \lambda \in \Lambda , \quad \omega \, \rho_\theta \, \lambda \iff \omega' \, \rho_\theta \, \lambda , \quad \omega , \omega' \in \Omega) .$$

Ainsi défini, le couple (N , ν) est une congruence-B de $[A , \Omega]$; on l'appellera la congruence-B associée à l'homomorphisme faible θ .

On définit maintenant deux relations binaires R_1 et σ_1 , respectivement dans A et dans Ω , par

$$a \, R_1 \, a' \iff a\theta \equiv a'\theta \pmod{R_2} ,$$

et

$$\omega \, \sigma_1 \, \omega' \iff \lambda \equiv \lambda' \pmod{\sigma_2} ,$$

avec $\omega' \, \rho_\theta \, \lambda'$, $a , a' \in A$, $\omega , \omega' \in \Omega$, et $\lambda , \lambda' \in \Lambda$.

On vérifie que le couple (R_1 , σ_1) est une congruence-B de $[A , \Omega]$ et, de plus,

$$N \subseteq R_1 , \qquad \nu \subseteq \sigma_1 ,$$

ce que l'on écrira

$$(R_1 , \sigma_1) \supseteq (N , \nu) .$$

---

(2) C'est une généralisation du concept classique de congruence ([1]).

2. Dans cette section, nous allons étudier les propriétés de l'homomorphisme faible.

Soit θ un homomorphisme faible appliquant $[A , \Omega]$ dans $[B , \Lambda]$ avec θ surjectif. En résumant ce qui précède, nous avons les résultats suivants :

LEMME 1. - Si (R_2 , σ_2) est une congruence-B de $[B , \Lambda]$, le couple (R_1 , σ_1) défini par

$$(2) \qquad \begin{aligned} a \equiv a' \pmod{R_1} &\iff a\theta \equiv a'\theta \pmod{R_2} , \\ \omega \equiv \omega' \pmod{\sigma_1} &\iff \lambda \equiv \lambda' \pmod{\sigma_2} , \end{aligned}$$

avec $a , a' \in A$, $\omega \rho_\theta \lambda$, $\omega' \rho_\theta \lambda'$, $\omega , \omega' \in \Omega$, et $\lambda , \lambda' \in \Lambda$, est une congruence-B de $[A , \Omega]$ et vérifie

$$(R_1 , \sigma_1) \supseteq (N , \nu) ,$$

où (N , ν) est la congruence-B associée à θ, à savoir :

$$(3) \qquad \begin{aligned} a \equiv a' \pmod{N} &\iff a\theta = a'\theta , \\ \omega \equiv \omega' \pmod{\nu} &\iff (\forall \lambda \in \Lambda , \ \omega \rho_\theta \lambda \iff \omega' \rho_\theta \lambda) . \end{aligned}$$

La relation entre (R_1 , σ_1) et (R_2 , σ_2), définie plus haut, permet de préciser une application de l'ensemble $\{(R_1 , \sigma_1)\}$ dans l'ensemble $\{(R_2 , \sigma_2)\}$.

LEMME 2. - L'application

$$(4) \qquad \Phi : (R_1 , \sigma_1) \longmapsto (R_2 , \sigma_2) ,$$

appliquant l'ensemble $\{(R_1 , \sigma_1)\}$ sur l'ensemble $\{(R_2 , \sigma_2)\}$, est surjective ; chaque congruence-B, $(R_1 , \sigma_1) \in \{(R_1 , \sigma_1)\}$, est définie par (2) et vérifie

$$(R_1 , \sigma_1) \supseteq (N , \nu) ,$$

où (N , ν) est défini par (3).

Dans ce qui suit, nous écrirons

$$(R_1 , \sigma_1)\Phi = (R_1 \Phi , \sigma_1 \Phi) .$$

LEMME 3. - Soient (R_2 , σ_2) une congruence-B de $[B , \Lambda]$, et Φ l'application définie par (4). Le couple

$$(R_2 , \sigma_2)\Phi^{-1} = (R_2 \Phi^{-1} , \sigma_2 \Phi^{-1}) ,$$

défini par

$$a_1 \equiv a'_1 \pmod{R_2\, \Phi^{-1}} \iff a_1\, \theta \equiv a'_1\, \theta \pmod{R_2} ,$$

$$\omega_1 \equiv \omega'_1 \pmod{\sigma_2\, \Phi^{-1}} \iff \lambda_1 \equiv \lambda'_1 \pmod{\sigma_2} ,$$

<u>est une congruence</u>-B <u>de</u> $[A , \Omega]$ <u>telle que</u>

$$(R_2\, \Phi^{-1} , \sigma_2\, \Phi^{-1}) \supseteq (N , \nu) .$$

LEMME 4. - <u>Si</u> (R_1 , σ_1) <u>est une congruence</u>-B <u>de</u> $[A , \Omega]$ <u>vérifiant</u>

$$(R_1 , \sigma_1) \supseteq (N , \nu) ,$$

<u>et</u> Φ <u>l'application définie par</u> (4), <u>on a</u>

$$(R_1 , \sigma_1) = ((R_1\, \Phi)\Phi^{-1} , (\sigma_1\, \Phi)\Phi^{-1}) .$$

LEMME 5. - <u>L'application</u> Φ , <u>définie par</u> (4), <u>est injective</u>.

En effet, si l'on a

$$(R_1 , \sigma_1)\Phi = (R'_1 , \sigma'_1)\Phi ,$$

avec $(R_1 , \sigma_1) \supseteq (N , \nu)$, $(R'_1 , \sigma'_1) \supseteq (N , \nu)$, on aura alors

$$\begin{aligned}(R_1 , \sigma_1) &= ((R_1\, \Phi)\Phi^{-1} , (\sigma_1\, \Phi)\Phi^{-1}) \\ &= ((R'_1\, \Phi)\Phi^{-1} , (\sigma'_1\, \Phi)\Phi^{-1}) \\ &= (R'_1 , \sigma'_1) .\end{aligned}$$

<u>Remarque</u>. - D'après les lemmes 2 et 5, on voit que l'application Φ en question est bijective.

LEMME 6. - <u>Soient</u> (R_1 , σ_1) <u>et</u> (R'_1 , σ'_1) <u>deux congruences</u>-B <u>de</u> $[A , \Omega]$ <u>vérifiant</u>

$$(R_1 , \sigma_1) \supseteq (N , \nu) , \qquad (R'_1 , \sigma'_1) \supseteq (N , \nu) ,$$

<u>où</u> (N , ν) <u>est défini par</u> (3). <u>On a alors</u>

$$(R_1 , \sigma_1) \subset (R'_1 , \sigma'_1) \iff (R_1 , \sigma_1)\Phi \subset (R'_1 , \sigma'_1)\Phi ,$$

<u>où l'application</u> Φ <u>est définie par</u> (4).

Soit $(R_1 , \sigma_1) \subset (R'_1 , \sigma'_1)$, on a alors

$$(R_1\ ,\ \sigma_1)\Phi = (R_1\ \Phi\ ,\ \sigma_1\ \Phi) \subseteq (R_1'\ \Phi\ ,\ \sigma_1'\ \Phi)\ .$$

Si $(R_1\ \Phi\ ,\ \sigma_1\ \Phi) = (R_1'\ \Phi\ ,\ \sigma_1'\ \Phi)$, on aura

$$(R_1\ ,\ \sigma_1) = (R_1'\ ,\ \sigma_1')\ ,$$

car l'application Φ est bijective. Il s'ensuit donc

$$(R_1\ ,\ \sigma_1)\Phi \subset (R_1'\ ,\ \sigma_1')\Phi\ .$$

Inversement, si $(R_1\ ,\ \sigma_1)\Phi \subset (R_1'\ ,\ \sigma_1')\Phi$, on a alors

$$(R_1\ ,\ \sigma_1) = ((R_1\ ,\ \sigma_1)\Phi)\Phi^{-1} \subseteq ((R_1'\ ,\ \sigma_1')\Phi)\Phi^{-1} = (R_1'\ ,\ \sigma_1')\ ,$$

d'où

$$(R_1\ ,\ \sigma_1) \subseteq (R_1'\ ,\ \sigma_1')\ .$$

Si $(R_1\ ,\ \sigma_1) = (R_1'\ ,\ \sigma_1')$, on aura

$$(R_1\ ,\ \sigma_1)\Phi = (R_1'\ ,\ \sigma_1')\Phi\ .$$

Il s'ensuit donc

$$(R_1\ ,\ \sigma_1) \subset (R_1'\ ,\ \sigma_1')\ .$$

3. Soient $[A\ ,\ \Omega]$ une algèbre, $(R\ ,\ \sigma)$ une congruence-B de $[A\ ,\ \Omega]$, et

$$A/R = \{(a)R\ ,\ \ldots\}\ ,\qquad \Omega/\sigma = \{(\omega)\sigma\ ,\ \ldots\}\ ,$$

où $(a)R$ et $(\omega)\sigma$ sont les classes contenant respectivement $a \in A$ et $\omega \in \Omega$ par rapport aux relations d'équivalence R et σ . On peut faire de $[A/R\ ,\ \Omega/\sigma]$ une algèbre de la façon suivante.

Soient $(\omega)\sigma \in \Omega/\sigma$ et $r((\omega)\sigma) = n$, $\forall\ ((a_1)R\ ,\ (a_2)R\ ,\ \ldots\ ,\ (a_n)R)$, $(a_i)R \in A/R$, $a_i \in A$, posons

$$((a_1)R\ ,\ (a_2)R\ ,\ \ldots\ ,\ (a_n)R)((\omega)\sigma) = ((a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_n)\omega)R\ .$$

On voit que $(\omega)\sigma$ est une opération bien définie dans A/R , et que $r(\omega) = n$.

Le couple $[A/R\ ,\ \Omega/\sigma]$ définit donc une algèbre, appelée <u>algèbre-quotient</u> de $[A\ ,\ \Omega]$, relative à la congruence-B $(R\ ,\ \sigma)$.

Soient $[A\ ,\ \Omega]$ une algèbre, $(R\ ,\ \sigma)$ une congruence-B de $[A\ ,\ \Omega]$, et $[A/R\ ,\ \Omega/\sigma]$ l'algèbre-quotient de $[A\ ,\ \Omega]$ relative à $(R\ ,\ \sigma)$. On considère maintenant une application θ de A sur A/R définie par

$$\theta\ :\ a \longmapsto (a)R\ ,\qquad a \in A\ ,\ \ (a)R \in A/R\ .$$

$\forall\ (a_1\ , a_2\ , \ldots\ , a_n)\ ,\ a_i \in A\ ,\ \forall\ \omega \in \Omega\ ,\ r(\omega) = n$, on a

$$\begin{aligned}(a_1\ , a_2\ , \ldots\ , a_n)(\omega \circ \theta) &= ((a_1\ , a_2\ , \ldots\ , a_n)\omega)\theta \\ &= ((a_1\ , a_2\ , \ldots\ , a_n)\omega)R \\ &= ((a_1)R\ , (a_2)R\ , \ldots\ , (a_n)R)((\omega)\sigma) \\ &= (a_1\ , a_2\ , \ldots\ , a_n)(\theta^n \circ (\omega)\sigma)\ .\end{aligned}$$

Cela entraîne

$$\omega\ \rho_\theta\ ((\omega)\sigma)\ ,\qquad \forall\ \omega \in \Omega\ ,$$

où $(\omega)\sigma$ est la classe contenant ω relative à la relation d'équivalence σ dans Ω , c'est-à-dire $(\omega)\sigma \in \Omega/\sigma$.

Inversement, $\forall\ (\omega')\sigma \in \Omega/\sigma\ ,\ \omega' \in \Omega$, l'opération ω' vérifie $\omega'\ \rho_\theta\ ((\omega')\sigma)$.

On voit donc que l'application θ , définie plus haut, est un homomorphisme faible surjectif appliquant $[A\ , \Omega]$ sur $[A/R\ , \Omega/\sigma]$. On a donc le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Soit $[A\ , \Omega]$ une algèbre. Toute congruence-B $(R\ , \sigma)$ de $[A , \Omega]$ définit l'algèbre-quotient $[A/R\ , \Omega/\sigma]$, et l'application θ de A sur A/R , définie par

$$\theta :\ a \longmapsto (a)R\ ,$$

est un homomorphisme faible surjectif appliquant $[A\ , \Omega]$ sur $[A/R\ , \Omega/\sigma]$.

Remarques.

1° On constatera que, dans le cas du théorème précédent, il s'agit des applications

$$A \to A/R\ ,\qquad \Omega \to \Omega/\sigma\ ,$$

définies respectivement par

$$a \longmapsto a(R) = a\theta \qquad \text{et} \qquad \omega \longmapsto (\omega)\sigma\ ,$$

$a \in A\ ,\ \omega \in \Omega$, telles que

$$\omega \circ \theta = \theta^n \circ ((\omega)\sigma)\ ,\qquad \omega(\sigma) \in \Omega/\sigma\ ,\qquad r((\omega)\sigma) = n\ .$$

On pourra donc définir un certain homomorphisme faible, appelons-le morphisme α-faible, appliquant $[A\ , \Omega]$ dans $[B\ , \Lambda]$ comme suit.

Soient $[A\ , \Omega]$ et $[B\ , \Lambda]$ deux algèbres, et θ une application de A dans B . L'application θ s'appellera morphisme α-faible appliquant $[A\ , \Omega]$ dans

$[B , \Lambda]$, si, et seulement si, il existe une application f de Ω dans Λ , définie par

$$f : \omega \longmapsto \lambda , \qquad \omega \in \Omega , \quad \lambda \in \Lambda ,$$

telle que

$$\omega \circ \theta = \theta^n \circ \lambda , \qquad r(\omega) = n .$$

Il est clair que cette définition nous conduira naturellement à celle de l'<u>isomorphisme faible</u> étudié par A. GOETZ [3]. L'étude de cette notion fera l'objet de la section 4.

2° Si (R , σ) est une congruence au sens de BIRKHOFF [1], c'est-à-dire si $\sigma = \sigma_\varepsilon$ est l'égalité, l'application θ est un homomorphisme d'algèbres appliquant $[A , \Omega]$ sur $[A/R , \Omega]$.

Soient θ un homomorphisme faible appliquant $[A , \Omega]$ dans $[B , \Lambda]$ avec θ surjectif et $\omega \, \rho_\theta \, \lambda$, $\omega \in \Omega$, $\lambda \in \Lambda$, et (N , ν) la congruence-B faible de $[A , \Omega]$ associée à θ et définie par (3).

Soit $[A/N , \Omega/\nu]$ l'algèbre-quotient de $[A , \Omega]$ relative à (N , ν) . Définissons une application θ' de A/N dans B par

$$\theta' : (a)N \longmapsto a\theta , \qquad (a)N \in A/N , \quad a \in A .$$

Il existe alors une relation $\rho'_{\theta'}$ de Ω/ν vers Λ vérifiant

$$((\omega)\nu) \circ \theta' = \theta'^n \circ \lambda ,$$

avec $(\omega)\nu \in \Omega/\nu$, $r((\omega)\nu) = n$, $\lambda \in \Lambda$ et $\omega \, \rho_\theta \, \lambda$.

En effet, $\forall \, ((a_1)N , (a_2)N , \ldots , (a_n)N)$, $(a_i)N \in A/N$, $a_i \in A$, $\forall \, (\omega)\nu \in \Omega/\nu$ et $r((\omega)\nu) = n$, on a

$$\begin{aligned}
((a_1)N , (a_2)N , \ldots , (a_n)N)(((\omega)\nu) \circ \theta') &= (((a_1)N , (a_2)N , \ldots , (a_n)N)(\omega)\nu)\theta' \\
&= (((a_1 , a_2 , \ldots , a_n)\omega)N)\theta' \\
&= ((a_1 , a_2 , \ldots , a_n)\omega)\theta \\
&= (a_1 , a_2 , \ldots , a_n)(\omega \circ \theta) \\
&= (a_1 , a_2 , \ldots , a_n)(\theta \circ \lambda)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((a_1)N , (a_2)N , \ldots , (a_n)N)(\theta' \circ \lambda) &= (((a_1)N)\theta' , ((a_2)N)\theta' , \ldots , ((a_n)N)\theta')\lambda \\
&= (a_1 \theta , a_2 \theta , \ldots , a_n \theta)\lambda \\
&= (a_1 , a_2 , \ldots , a_n)(\theta \circ \lambda) .
\end{aligned}$$

Inversement, pour tout $\lambda' \in \Lambda$, il existe une opération $(\omega')\nu \in \Omega/\nu$, avec $\omega' \rho'_{\theta'} \lambda'$, $\omega' \in \Omega$ tel que

$$((\omega')\nu) \rho'_{\theta'} \lambda' .$$

En outre, l'application θ' est surjective ; elle est aussi injective.

L'application θ' est donc un homomorphisme faible de $[A/N , \Omega/\nu]$ dans $[B , \Lambda]$ avec θ' bijective. On a donc le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 2. - Soient θ un homomorphisme faible appliquant $[A , \Omega]$ dans $[B , \Lambda]$ avec θ surjectif, (N , ν) la congruence-B de $[A , \Omega]$ associée à θ, et $[A/N , \Omega/\nu]$ l'algèbre-quotient de $[A , \Omega]$ relative à (N , ν). Dans ces conditions, la bijection

$$\theta' : A/N \to B ,$$

définie par

$$(a)N \mapsto a\theta , \qquad (a)N \in A/N , \quad a \in A ,$$

est un homomorphisme faible de $[A/N , \Omega/\nu]$ dans $[B , \Lambda]$.

Remarque. - L'application θ' étant bijective, θ'^{-1} est un homomorphisme faible de $[B , \Lambda]$ dans $[A/N , \Omega/\nu]$. Dans les conditions du théorème 2, l'application θ' est un isomorphisme faible ([3]) de $[A/N , \Omega/\nu]$ sur $[B , \Lambda]$.

Soient θ un homomorphisme faible appliquant $[A , \Omega]$ dans $[B , \Lambda]$ avec θ surjectif, (R_2 , σ_2) une congruence-B de $[B , \Lambda]$, et (R_1 , σ_1) la congruence-B de $[A , \Omega]$ définie par (2) et vérifiant

$$(R_1 , \sigma_1) \supseteq (N , \nu) ,$$

où (N , ν) est définie par (3). Dans ces conditions, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 3. - Si $[A/R_1 , \Omega/\sigma_1]$ et $[B/R_2 , \Lambda/\sigma_2]$ sont les algèbres-quotients définies à partir de (R_1 , σ_1) et de (R_2 , σ_2) et vérifiant

$$\Phi : (R_1 , \sigma_1) \mapsto (R_2 , \sigma_2) ,$$

où l'application Φ est définie par (4), les ensembles

$$\{[A/R_1 , \Omega/\sigma_1]\} \quad \text{et} \quad \{[B/R_2 , \Lambda/\sigma_2]\}$$

se correspondent bijectivement, et l'application bijective

$$\Psi : A/R_1 \to B/R_2 ,$$

définie par

$$(a)R_1 \longmapsto (a\theta)R_2 \,, \qquad a \in A \,,$$

<u>est un isomorphisme faible appliquant</u>

$$[A/R_1 \,,\, \Omega/\sigma_1] \quad \underline{\text{sur}} \quad [B/R_2 \,,\, \Lambda/\sigma_2] \,.$$

<u>Démonstration</u>. - La première partie découle de la bijection Φ. Quant à la seconde, soient en effet, $\forall\ ((a_1)R_1 \,,\, (a_2)R_1 \,,\, \ldots \,,\, (a_n)R_1) \,,\ (a_i)R_1 \in A/R_1 \,,$ $a_i \in A \,,\ \forall\ (\omega)\sigma_1 \in \Omega/\sigma_1 \,,\ r((\omega)\sigma_i) = n \,,\ \omega \in \Omega$. On a alors

$$\begin{aligned}
&((a_1)R_1 \,,\, (a_2)R_1 \,,\, \ldots \,,\, (a_n)R_1)((\omega)\sigma_1 \circ \Psi) \\
&\qquad = (((a_1)R_1 \,,\, (a_2)R_1 \,,\, \ldots \,,\, (a_n)R_1)(\omega)\sigma_1)\Psi \\
&\qquad = (((a_1 \,,\, a_2 \,,\, \ldots \,,\, a_n)\omega)R_1)\Psi \\
&\qquad = (((a_1 \,,\, a_2 \,,\, \ldots \,,\, a_n)\omega)\theta)R_2 \\
&\qquad = ((a_1\theta \,,\, a_2\theta \,,\, \ldots \,,\, a_n\theta)\lambda)R_2 \\
&\qquad = (((a_1)R_1)\Psi \,,\, ((a_2)R_1)\Psi \,,\, \ldots \,,\, ((a_n)R_1)\Psi)(\lambda)\sigma_2 \\
&\qquad = ((a_1)R_1 \,,\, (a_2)R_1 \,,\, \ldots \,,\, (a_n)R_1)(\Psi \circ (\lambda)\sigma_2) \,,
\end{aligned}$$

où $(\omega)\sigma_1 \in \Omega/\sigma_1 \,,\ (\lambda)\sigma_2 \in \Lambda/\sigma_2 \,,\ \omega \in \Omega$, et $\lambda \in \Lambda$. Cela entraîne donc

$$((\omega)\sigma_1)\ \rho_\Psi\ ((\lambda)\sigma_2) \,.$$

Inversement, pour tout $(\lambda')\sigma_2 \in \Lambda/\sigma_2 \,,\ \lambda' \in \Lambda$, il existe une opération $(\omega')\sigma_1 \in \Omega/\sigma_1 \,,\ \omega' \in \Omega$ tel que

$$((\omega')\sigma_1)\ \rho_\Psi\ ((\lambda')\sigma_2) \,.$$

L'application Ψ est surjective, elle est aussi injective et, par conséquent, l'application bijective Ψ est un homomorphisme faible appliquant $[A/R_i \,,\, \Omega/\sigma_1]$ dans $[B/R_2 \,,\, \Lambda/\sigma_2]$. Il s'ensuit donc que l'application Ψ^{-1} est un homomorphisme faible appliquant $[B/R_2 \,,\, \Lambda/\sigma_2]$ dans $[A/R_1 \,,\, \Omega/\sigma_1]$; l'application Ψ est donc un isomorphisme faible ([3]) appliquant $[A/R_1 \,,\, \Omega/\sigma_1]$ sur $[B/R_2 \,,\, \Omega/\sigma_2]$. Cela achève la démonstration.

4. Dans cette section, nous étudierons le concept du morphisme α-faible appliquant $[A \,,\, \Omega]$ dans $[B \,,\, \Lambda]$. Utilisant les notations introduites antérieurement, nous considérons les cas suivants de morphisme α-faible.

Soit θ un morphisme α-faible appliquant $[A , \Omega]$ dans $[B , \Lambda]$:

$$\omega \circ \theta = \theta^n \circ \lambda , \qquad r(\omega) = n ,$$

$$f : \omega \longmapsto \lambda , \qquad \omega \in \Omega , \quad \lambda \in \Lambda .$$

(i) Si les applications θ et f sont surjectives, on appellera θ un <u>épimorphisme</u> <u>α-faible</u> de $[A , \Omega]$ sur $[B , \Lambda]$, et $[B , \Lambda]$ l'<u>image épimorphe</u> <u>α-faible</u> de $[A , \Omega]$.

(ii) Si l'application f est injective, on dira que θ est un <u>homomorphisme</u> <u>α-faible</u> de $[A , \Omega]$ dans $[B , \Lambda]$.

(iii) Si les applications θ et f sont injectives, on dira que θ est un <u>monomorphisme</u> <u>α-faible</u> de $[A , \Omega]$ dans $[B , \Lambda]$.

(iv) Soit θ un homomorphisme α-faible de $[A , \Omega]$ dans $[B , \Lambda]$. Si les applications θ et f sont surjectives, on dira que θ est un <u>homomorphisme surjectif</u> <u>α-faible</u> de $[A , \Omega]$ dans $[B , \Lambda]$.

(v) Soit θ un monomorphisme α-faible de $[A , \Omega]$ dans $[B , \Lambda]$. Si les applications θ et f sont surjectives, alors θ est un <u>isomorphisme faible</u> ([3]) de $[A , \Omega]$ sur $[B , \Lambda]$.

Il est évident qu'un isomorphisme faible est une relation d'équivalence.

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier les algèbres de type différent, et d'obtenir des résultats analogues à ceux des algèbres de même type. Mentionnons-en quelques-uns, par exemple.

(a) Soient $\mathfrak{I}[A , \Omega]$ le treillis complet formé des sous-algèbres de $[A , \Omega]$, et $[B , \Lambda]$ l'image épimorphe α-faible de $[A , \Omega]$. Il existe alors une application isotone du treillis complet $\mathfrak{I}[A , \Omega]$ sur le treillis complet $\mathfrak{I}[B , \Lambda]$.

(b) Soit $[A , \Omega]$ une algèbre.

L'ensemble des morphismes α-faibles de $[A , \Omega]$ dans elle-même constitue un demi-groupe $D[A , \Omega]$.

L'ensemble $D'[A , \Omega]$ des épimorphismes α-faibles de $[A , \Omega]$ sur elle-même constitue un sous-demi-groupe de $D[A , \Omega]$.

L'ensemble $H[A , \Omega]$ des endomorphismes α-faibles de $[A , \Omega]$ constitue un sous-demi-groupe de $D[A , \Omega]$.

L'ensemble $H'[A , \Omega]$ des homomorphismes surjectifs α-faibles de $[A , \Omega]$ sur elle-même constitue un sous-demi-groupe de $H[A , \Omega]$.

L'ensemble $I[A , \Omega]$ des monomorphismes α-faibles de $[A , \Omega]$ dans elle-même constitue un sous-demi-groupe de $H[A , \Omega]$.

L'ensemble $I'[A , \Omega]$ des automorphismes faibles de $[A , \Omega]$ constitue un sous-groupe de $I[A , \Omega]$.

Finalement, l'ensemble $G[A , \Omega]$ des automorphismes faibles de $[A , \Omega]$, tel que $\Omega \to \Omega$ soit l'application identique, constitue un sous-groupe de $I'[A , \Omega]$. $G[A , \Omega]$ est le groupe des automorphismes de $[A , \Omega]$ au sens de BIRKHOFF [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKHOFF (G.). - Lattice theory. 3rd edition. - Providence, American mathematical Society, 1967 (American mathematical Society, Colloquium Publications, 25).

[2] DUBREIL (P.). - Endomorphismes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 18e année, 1964/65, n° 23, 20 p.

[3] GOETZ (A.). - On weak isomorphisms and weak homomorphisms of abstract algebras, Coll. Math., Warszawa, t. 14, 1966, p. 163-167.

[4] MARCZEWSKI (E.). - Independence and homomorphisms in abstract algebras, Fund. Math., Warszawa, t. 50, 1961, p. 45-61.

(Texte reçu le 23 juin 1969)

Mohammad ISHAQ
Professeur
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Université Laval
QUÉBEC 10, P. Q. (Canada)