Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Robert P. Hunter

Sur les homomorphismes des demi-groupes compacts

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, nº 2 (1968-1969), exp. nº 20, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_2_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
22e année, 1968/69, n° 20, 5 p.

19 mai 1969

SUR LES HOMOMORPHISMES DES DEMI-GROUPES COMPACTS

par Robert P. HUNTER

On se propose d'étudier certains aspects de la structure des demi-groupes topologiques, notamment la nature des homomorphismes (continus) des demi-groupes compacts. Nous abordons essentiellement le problème de la dimension (il s'agit de la dimension cohomologique).

1. Homomorphismes qui élèvent la dimension.

Soient G un groupe compact, et f un homomorphisme (continu) de G. On connait bien la formule

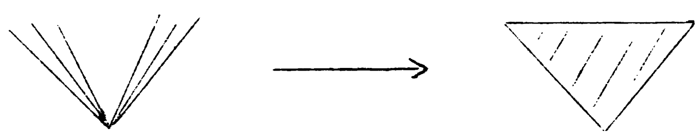
$$\dim G = \dim f(G) + \dim N \quad ,$$

où N désigne le noyau de f. En particulier,

$$\dim f(G) \leqslant \dim G \quad .$$

Le résultat analogue pour les demi-groupes est faux.

Exemple 1 (KOCH). - Soit C l'ensemble de Cantor considéré comme sous-ensemble de l'intervalle, muni de la multiplication $xy = \min(x , y)$. Alors C est un demi-groupe compact de dimension 0. Soit f une application de C sur $[0 , 1]$ préservant l'ordre (on peut, par exemple, considérer la décomposition qui identifie les extrémités d'une composante du complément). En prenant $[0 , 1] = J$, avec la multiplication $xy = \min(x , y)$, on voit que f est un homomorphisme continu qui élève la dimension de 1. En formant les cônes avec l'intervalle ordinaire I, on a un exemple connexe.



C'est-à-dire : Soient $B_1 = C \times I / \{0\} \times I$, $T_1 = J \times I / \{0\} \times I$, et f_1 l'homomorphisme induit par f. De plus, en commençant avec $C \times C \xrightarrow{f \times f} J \times J$, on construit un homomorphisme $f_2 : B_2 \to T_2$ élevant la dimension de 2. Evidemment, il existe une suite (∞ compris)

$$f_i : B_i \to T_i \quad ,$$

où B_i est un demi-groupe compact connexe (avec identité) de dimension 1 , et f_i est un homomorphisme élevant la dimension de i .

Néanmoins, dans le cas de B_1 , on peut démontrer que la dimension la plus haute parmi toutes les images est 2 .

PROPOSITION 1.1. - *Etant donnés deux entiers* n , k , *il existe un demi-groupe compact et connexe, avec identité de dimension* n , *tel que la dimension la plus élevée parmi toutes les images est précisément* $n+k$.

On dit qu'un demi-groupe satisfaisant aux conditions précédentes est k-stable. Pour la stabilité elle-même (0-stabilité), il semble que le résultat le plus net soit le suivant.

PROPOSITION 1.2. - *Soit* S *un demi-groupe compact connexe avec identité de dimension* 1 . *Si* S *est localement connexe, alors* S *est stable.*

2. Homomorphismes abaissant la dimension.

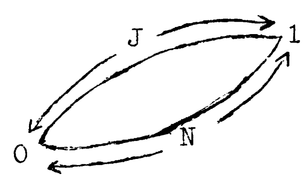
Si G est un groupe abélien compact, il est bien connu que G possède des caractères, c'est-à-dire des homomorphismes continus dans le cercle unité. En particulier, chaque G , de dimension $\geqslant 2$, possède des homomorphismes qui abaissent la dimension. Là encore le résultat analogue pour les demi-groupes est faux.

Exemple (URSELL). - Considérons le demi-groupe V :

$$V = J \times N / \{0\} \times N \cup J \times \{0\} \quad ,$$

$$J = [0 \; , \; 1] \qquad (xy = \min(x \; , \; y)) \; ,$$

$$N = [0 \; , \; 1] / [0 \; , \; \tfrac{1}{2}] \qquad (\text{multiplication habituelle}) \; ,$$



Supposons qu'il existe un homomorphisme continu f sur T , où T est de dimension 1 . Rappelons qu'un demi-groupe compact et connexe de dimension 1 , avec zéro et identité, contient précisément un arc (fil) entre zéro et l'identité. Puisque cet arc est contenu dans $f(J)$, il est idempotent, mais il est contenu aussi bien dans $f(N)$ qui est nilpotent.

Propriétés de V .

(1) Tout homomorphisme est monotone.

(2) Bien qu'on puisse croire le contraire, il existe des homomorphismes non dégénérés (c'est-à-dire : qui ne soient pas des homomorphismes de Rees sur un idéal).

(3) Chaque image homomorphe de V est homéomorphe à V .

3. Dimension et congruence.

Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{J}$, les équivalences de Green. On considère les dimensions des espaces quotients $S/\mathcal{H}$, etc.

Soit S un demi-groupe compact avec identité :

1° Si $\dim S = 0$, alors $\dim S/\mathcal{H} = 0$;

2° Si $\dim S \geqslant 2$, alors il est possible d'avoir $\dim S/\mathcal{H} = \dim S + k$ pour tout $k < \infty$;

3° Si $\dim S = 1$, il n'est pas encore connu que cela implique que la dimension de $S/\mathcal{H}$ soit 1 .

Soit H_x une $\mathcal{H}$-classe du demi-groupe compact S . Il existe un idempotent e minimal relativement à la condition $x = xe$. Il en résulte que $H_x \subseteq xH_e$, d'où

$$\dim H_x \leqslant \dim H_e \quad .$$

Il est commode ici de définir la dimension de groupe d'un demi-groupe S ,

$$\dim_g S = \max\{\dim H_e \ : \ e^2 = e\} \quad ,$$

alors on a

$$\dim S \leqslant \dim S/\mathcal{H} + \dim_g S \quad .$$

Un résultat fondamental de A. D. WALLACE est que le sous-groupe maximal contenant l'élément unité d'un demi-groupe compact et connexe, de dimension n , est de dimension au plus $n - 1$. Il en résulte, en faisant usage des résultats précédents, que si S est un demi-groupe compact et connexe de dimension n , et H une $\mathcal{H}$-classe de dimension n , alors H est un groupe, et c'est l'idéal minimal.

Le résultat suivant est lié au problème original sur la stabilité.

PROPOSITION 3.1. - <u>Soit S un demi-groupe compact et connexe avec identité. Si $\mathcal{H}$ est une congruence telle que $S/\mathcal{H}$ soit localement connexe, et de dimension 1 , alors S est stable.</u>

Un tel demi-groupe peut être assez compliqué, même s'il est commutatif et si $S/\mathcal{H}$ est un arc (voir [3]).

Notons que la condition $\dim S/\mathcal{H} = 1$ entraîne, soit $\dim S = 1 + \dim_g S$, soit $\dim S = \dim_g S$. Et comme nous l'avons mentionné, ceci implique que S est un homogroupe (c'est-à-dire qu'il contient un idéal comme sous-groupe).

En tout cas, pour un homomorphisme continu quelconque f , on a

$$\dim_g f(S) \leqslant \dim_g S \quad .$$

En effet, si G est un sous-groupe compact de $f(S)$, on considère un sous-groupe M de l'idéal minimal de $f^{-1}(G)$. On voit que

$$f(M) = G \quad .$$

Il en résulte que si $f : S \to T$ élève la dimension de 2 , alors

$$\tilde{f} : S/\mathcal{K} \to T/\mathcal{K} \qquad \text{(l'application induite)}$$

élève aussi la dimension de 2 .

Si G est un sous-groupe compact d'un demi-groupe contenant l'élément unité, alors G opère à gauche et à droite. Soient ${}_g(S/G)$ et ${}_d(S/G)$ les espaces quotients associés.

Finalement, nous mentionnons le résultat suivant, qui établit une connection très nette entre la dimension et l'existence d'une congruence.

PROPOSITION 3.2. - <u>Soient</u> S <u>un demi-groupe compact et connexe avec identité, et</u> G <u>un sous-groupe compact et connexe de</u> H_1 . <u>Si</u> ${}_g(S/G)$ <u>est de dimension</u> 1 , <u>alors</u> $xG \subseteq Gx$ <u>pour tout</u> x . <u>Ainsi les orbites forment une congruence</u>.

Supposons, au contraire, qu'il existe x tel que Gx ne contienne pas xG . Nous nous bornons au cas où S a un zéro. Considérons

$$T_x = \{g \mid g \in G , \quad xg \in Gx\} \quad .$$

Evidemment T_x est un sous-groupe compact de G . Soit $\gamma : S \to {}_g(S/G)$ l'application canonique. Alors il existe un homéomorphisme entre les espaces ${}_g(G/T_x)$ et $\gamma(xG)$. Il en résulte que ${}_g(S/G)$ contient l'espace homogène ${}_g(G/T_x)$. Puisque l'espace ${}_g(G/T_x)$ est un sous-espace avec une cohomologie non dégénérée, nous avons une contradiction. En effet, faisant usage de l'opération de S sur ${}_g(S/G)$, on voit que chaque sous-espace de ${}_g(S/G)$ a une cohomologie dégénérée.

Si K (l'idéal minimal de S) n'est pas dégénéré, on note que, soit $\gamma(L)$ est dégénéré pour tout $\mathcal{L}$-classe dans K , soit chaque $\mathcal{L}$-classe de K est une orbite à gauche (sinon, K/G serait un produit cartésien non dégénéré). Alors, K étant une seule $\mathcal{L}$-classe, il en résulte que $kG \subseteq Gk$, puisque $kG = H_k$ pour tout $k \in K$.

Evidemment, si les espaces ${}_g(S/G)$ et ${}_d(S/G)$ sont de dimension 1 , alors l'idéal minimal de S est simple à gauche ou simple à droite.

On note aussi que, pour qu'un sous-groupe G de H_1 ait la propriété que $g^{(S/G)}$ soit de dimension 1, il faut que G contienne une composante de H_1.

Un demi-groupe S, satisfaisant aux conditions précédentes, contient un arc A contenant l'identité tel que l'homomorphisme canonique défini par G est un isomorphisme local sur A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDERSON (L. W.) and HUNTER (R. P.). - The $\mathcal{H}$-equivalence in compact semigroups, Bull. Soc. math. Belg., t. 14, 1962, p. 274-296.

[2] ANDERSON (L. W.) and HUNTER (R. P.). - Homomorphisms and dimension, Math. Annalen, t. 147, 1962, p. 248-268.

[3] COHEN (H.) and KRULE (I. S.). - Continuous homomorphic images of real clans with zero, Proc. Amer. math. Soc., t. 10, 1959, p. 106-109.

[4] HUNTER (R. P.). - On one dimensional semigroups, Math. Annalen, t. 146, 1962, p. 383-396.

[5] STRALKA (A.). - On the Green equivalences, **Doct. Dissert.**, Pennsylvania State University, 1966.

(Texte reçu le 6 novembre 1969)

Robert P. HUNTER
Department of Mathematics
University of Georgia
ATHENS, Ga (Etats-Unis)