Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Wolfgang Krull

Dualitätstheorie in den Moduln über einem Dedekindschen Ring

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, nº 2 (1968-1969), exp. nº 19,
p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_2_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et théorie des nombres)
22e année, 1968/69, n° 19, 4 p.

14 et 16 mai 1969

DUALITÄTSTHEORIE IN DEN MODULN ÜBER EINEM DEDEKINDSCHEN RING

von Wolfgang KRULL

[Verfassung von Karl O. STÖHR]

Die Grundbegriffe der homologischen Algebra werden als bekannt vorausgesetzt. Das Operationsgebiet ist die Kategorie der lokalkompakten Moduln über einem diskreten Ring $\mathcal{O}$, der der Einfachheit halber von vornherein als kommutativer Integritätsbereich angenommen werden möge. $\mathrm{Hom}(M , N)$ ist der $\mathcal{O}$-Modul aller Homomorphismen des $\mathcal{O}$-Moduls M in den $\mathcal{O}$-Modul N, versehen mit der Topologie der kompakt-offenen Konvergenz. Die Schreibweise $\mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{Z}}(M , N)$ deutet an, dass es sich um die additive Gruppe aller Homomorphismen der Gruppe M in die Gruppe N handelt, die nachträglich in naheliegender Weise zu einem $\mathcal{O}$-Modul gemacht wird. Zwei Moduln die (topologisch) isomorph bzw. zwei Funktoren, die im Sinne der homologischen Algebra funktoriell isomorph sind, werden als nicht wesentlich verschieden angesehen. $D_P(M) = \mathrm{Hom}(M , P)$ ist der kontravariante Funktor, der jedem Modul M den Modul aller Homomorphismen von M in den fest vorgegebenen Modul P zuordnet. D_P wird reflexiv genannt, und es wird P als dualisierender Modul bezeichnet, wenn $D_P(D_P M)$ stets in einer naheliegenden kanonischen Weise zu M isomorph ist. Bahnbrechend für die Dualitätstheorie war die Arbeit von L. S. PONTRJAGIN [1]. Dort wird gezeigt, dass für $\mathcal{O} = \underset{\sim}{Z}$ die Gruppe $P = \underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ ein dualisierender Modul ist. Darüber hinaus wird für $\mathrm{Hom}(M , \underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})$ der bekannte Satz von Hahn-Banach bewiesen, und es wird gezeigt, dass bei Beschränkung auf abgeschlossene Untermoduln der Satz von der exakten Sequenz gilt : Aus

$$0 \to N \to M \to \bar{M} \to 0$$

folgt für $\mathcal{O} = \underset{\sim}{Z}$, $P = \underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ stets die Exaktheit der Sequenz

$$0 \to D_P \bar{M} \to D_P M \to D_P N \to 0 .$$

Für einen beliebigen Multiplikatorenring $\mathcal{O}$ ist $P^* = \mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{Z}}(\mathcal{O} , \underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})$ stets ein dualisierender Modul. Es bleibt aber in jedem Einzelfall die Aufgabe, entweder P^* explizit zu berechnen, oder auf andere Weise einen dem speziellen Problem besonders gut angepassten dualisierenden Modul zu finden.

---

(1) PONTRJAGIN (L. S.). - The theory of topological commutative groups, Annals of Math., Series 2, t. 35, 1934, p. 361-388.

Ist insbesondere $\mathcal{O}$ die Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers K , so liegt die folgende Überlegung nahe : Es seien $p(x)$, $q(x)$, ... Polynome aus $\underset{\sim}{Q}[x]$ und insbesondere $K = \underset{\sim}{Q}(\xi)$, wobei ξ Nullstelle des Primpolynoms $p(x)$. Über $\underset{\sim}{C}$ sei

$$p(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \alpha_i) \times \prod_{k=1}^{s} (x - \beta_k).(x - \bar{\beta}_k) ,$$

wobei die α_i reell und die Paare $\langle \beta_k , \bar{\beta}_k \rangle$ konjugiert komplex. Ferner sei $R_{r,s}$ der topologische Ring :

$$\begin{aligned} R_{r,s} &= \underbrace{\underset{\sim}{R} \times \dots \times \underset{\sim}{R}}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\underset{\sim}{C} \times \dots \times \underset{\sim}{C}}_{s\text{-mal}} \\ &= \{\langle \gamma_i , \delta_k \rangle \mid \gamma_i \in \underset{\sim}{R} \ (i = 1 , \dots , r) ; \ \delta_k \in \underset{\sim}{C} \ (k = 1 , \dots , s)\} \end{aligned}$$

und es werde K durch die Vorschrift :

$$k = \langle q(\alpha_i) , q(\beta_k) \rangle \quad \text{wenn} \quad k = q(\xi)$$

in $R_{r,s}$ injiziert, so dass $R_{r,s}$ in trivialer Weise zum K und damit erst recht zum $\mathcal{O}$-Modul gemacht werden kann. Dann weiss man : $R_{r,s}$ ist als $\mathcal{O}$-Modul kompakt, und schon die klassische Zahlentheorie, insbesondere die Theorie der Einheiten und der Klassenzahl zeigt die fundamentale Bedeutung, die $R_{r,s}$ für die Untersuchung von K überall dort besitzt, wo analytische Überlegungen ins Spiel kommen. Diese Überlegung und ein gewisser Glaube an die in der Mathematik herrschende praestabilisierte Harmonie führte W. KRULL zu der Vermutung :

Bei dem endlichen algebraischen Zahlkörper K ist $R_{r,s}/\mathcal{O}$ ein dualisierender Modul.

Merkwürdigerweise kam KRULL nicht auf den an sich naheliegenden Gedanken, neben $R_{r,s}/\mathcal{O}$ auch die Moduln $R_{r,s}/\mathfrak{a}$ in Betracht zu ziehen.

Mit dem Beweis der Krullschen Vermutung beschäftigten sich F. Eduard PETERS und Karl Otto STÖHR. F. E. PETERS kam bei den quadratischen Zahlkörpern zu dem gewünschten Ziel, während er im allgemeinen Fall auf Schwierigkeiten stiess. Er arbeitete dann in anderer Richtung weiter, so dass seine Dissertation (2) aus dem Rahmen des Vortrages herausfällt. Erwähnt sei nur, dass F. E. PETERS notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angibt, dass seine Methode der Ringverschiebung auf den Fall der algebraischen Zahlkörper angewandt werden kann. Bei K. O. STÖHR gelang es die Krullsche Vermutung dadurch zu beweisen, dass er gleich eine wesentlich allgemeinere Aufgabe vollständig löste, nämlich die Bestimmung aller dualisierenden

---

(2) PETERS (F. E.). - Natürliche Pontrjagin Dualität topologischer Moduln (Dissertation Univ. Bonn, 1969).

Moduln bei beliebigen Dedekindschen Ringen. Die wichtigsten Resultate können in den folgenden Sätzen zusammengefasst werden : Es sei G die multiplikative Gruppe aller (ganzen oder nicht ganzen) umkehrbaren Ideale, die zugehörige Klassengruppe $\overline{G}$ sei wie üblich die Quotientengruppe von G nach der Untergruppe H der Hauptideale.

THEOREM 1. - Für jedes $\mathfrak{a} \in G$ ist $P_{\mathfrak{a}} = \mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{Z}}(\mathfrak{a}, M)$ ein dualisierender Modul. $P_{\mathfrak{a}_1}$ und $P_{\mathfrak{a}_2}$ sind genau dann isomorph, wenn $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ in derselben Idealklasse von G liegen.

THEOREM 2. - Bei einem Dedekindschen Ring, wo jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$ zu G gehört, ist jeder dualisierende Modul P zu einem der Moduln $P_{\mathfrak{a}}$ isomorph. Es entsprechen also die Isomorphieklassen dualisierender Moduln umkehrbar eindeutig den Klassen von $\overline{C}$.

THEOREM 3. - Im Falle der Hauptordnung $\mathfrak{O}$ eines endlichen algebraischen Zahlkörpers gibt es zu jedem Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Ideal $\mathfrak{a}'$, derart dass $P_{\mathfrak{a}}$ zu $R_{r,s}/\mathfrak{a}'$ isomorph ist. Insbesondere besteht Isomorphie zwischen $R_{r,s}/\mathfrak{O}$ und $P_{\mathfrak{d}^{-1}}$, wobei $\mathfrak{d}$ die Differente von K .

Der Beweis von Theorem 1-3 stützt sich auf ein Hauptlemma, dessen wesentlicher Inhalt kurz, wenn auch nicht ganz präzis so formuliert werden kann : Zu jedem kontravarianten Funktor D mit der Eigenschaft, dass DD zum identischen Funktor funktoriell isomorph ist ("Dualfunktor"), gibt es einen dualisierenden Modul P , derart dass DM und $D_P(M) = \mathrm{Hom}(M, P)$ funktoriell isomorph werden. Dabei gilt innerhalb unserer Kategorie für einen derartigen Funktor der Satz von Hahn-Banach und der Satz von der exakten Sequenz. Natürlich ist der Beweis des Hauptlemmas durchaus nicht kurz ; doch verläuft ein nicht unbeträchtlicher Teil der notwendigen Überlegungen im Sinne der Kategorienlehre nach geläufigem Schema, so dass man sich an den betreffenden Stellen mit Andeutungen begnügen darf.

Die Bedeutung des Hauptlemmas beruht vor allem darauf, dass es für Theorem 1-3 elegante funktorielle Beweise liefert. So gelingt es bei Theorem 1, die Untersuchung des kontravarianten Funktors $D_{\mathfrak{a}}$ weitgehend zurückzuführen auf das Studium der rechnerisch leichter zu behandelnden kovarianten Funktors $F_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, M)$. Zum Beweis von Theorem 2 hat man zu zeigen : Ist jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$ umkehrbar, so ist jeder Funktor $D_P M = \mathrm{Hom}(M, P)$ zu einem Funktor $D_{\mathfrak{a}}$ funktoriell isomorph. Hier bilden den Ausgangspunkt zwei Bemerkungen :

(a) Bei beliebigem $\mathfrak{O}$ gibt es immer einen stetigen Homomorphismus von $D_{\mathfrak{O}} P$ auf ein Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$.

(b) Jedes umkehrbare Ideal $\mathfrak{a}$ ist ein projektiver Modul.

Es kommt dann darauf an, auf Grund von (b) zu zeigen, dass im Dedekindschen Fall der Homomorphismus von (a) sogar ein Isomorphismus wird. Der Beweis ist zwar kurz und elegant ; erfordert aber recht subtile Überlegungen. Ist $\mathcal{O}$ nach Voraussetzung von Theorem 3 die Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers K , so ist jedes Ideal $\mathfrak{a}$ ein freier $\underline{Z}$-Modul, K selbst ein freier $\underline{Q}$-Modul, und man kann für den Aufbau von K über $\underline{Q}$ sich des Dedekindschen Spurenkalküls bedienen, in dessen Mittelpunkt das Differentenideal $\mathfrak{d}$ von K über $\underline{Q}$ steht. Man gewinnt so den Satz : $\mathrm{Hom}_{\underline{Z}}(\mathfrak{a}, \underline{R}/\underline{Z})$ ist isomorph zu dem über $\underline{Z}$ gebildeten Tensorprodukt von $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$ und $\underline{R}/\underline{Z}$. Daraus folgt dann weiter sehr rasch die Behauptung von Theorem 3 .

Zu K. O. STÖHR ist es kürzlich gelungen, diese Ergebnisse auf lokal-kompakte Moduln über einem beliebigen kommutativen Ring $\mathcal{O}$ mit Einselement zu verallgemeinern. Er kam zu dem überraschenden Ergebnis, dass die dualisierenden Moduln immer kompakt sind und konnte schliesslich sogar zeigen, dass die dualisierenden Moduln umkehrbar eindeutig den Elementen der Picardschen Gruppe von $\mathcal{O}$ entsprechen.

(Texte reçu le 16 novembre 1970)

Wolfgang KRULL
Meckenheimer Allee 81
D-5300 BONN (Allemagne fédérale)