Ladislav Beran

Treillis sous-modulaires, II

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, n° 2 (1968-1969), exp. n° 18, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_2_A6_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
22e année, 1968/69, n° 18, 18 p.

12 mai 1969

TREILLIS SOUS-MODULAIRES, II

par Ladislav BERAN

Dans un précédent exposé [1], nous avons démontré que l'étude des treillis sous-modulaires peut être ramenée (sous l'hypothèse que L satisfait à la condition de chaîne descendante et à la condition de chaîne ascendante), à l'aide des produits sous-directs, au cas des treillis parfaitement sous-modulaires. Comme les treillis parfaitement sous-modulaires sont simples, et donc sous-directement indécomposables, les constructions utilisant l'idée des amalgames deviennent des moyens tout à fait naturels pour l'analyse ou la synthèse de ce type de treillis. Une autre interprétation de l'idée des amalgames dans la théorie des algèbres de Boole peut être trouvée dans le travail de DWINGER [4].

1. Notations.

Nous utiliserons les mêmes symboles et définitions que dans [1]. Si a/b , c/d sont des quotients premiers transposés, c'est-à-dire si, par exemple, $b \cap c = d$, $b \cup c = d$, nous écrirons (Cf. [5]) $a/b \ \ell \ c/d$ ou $c/d \ u \ a/b$. S'il existe une chaîne de quotients premiers

(1) $$a_0/b_0 = a/b \ , \ a_1/b_1 \ , \ \ldots \ , \ a_n/b_n = c/d \ ,$$

tels que les quotients voisins soient transposés, on écrit plus brièvement

$$a/b \ \pi \ c/d \ ,$$

et on appelle les quotients premiers, a/b et c/d , π-projectifs. Nous écrirons $\delta(a/b \ , \ c/d) = n$ si $a/b \ \pi \ c/d$ et si n est la plus petite des longueurs des chaînes (1).

Nous notons :

($\hat{C} \downarrow$) condition de chaîne descendante,
($\hat{C} \uparrow$) condition de chaîne ascendante,
($\hat{C}$) , ($\hat{C} \downarrow$) et ($\hat{C} \uparrow$) ,
(C_1) condition de quotients premiers, $u \cap v \prec u \implies v \prec u \cup v$.

Les lettres L , T (éventuellement avec des indices) seront réservées pour les treillis, la lettre S pour les ensembles ordonnés.

2. Amalgames des ensembles ordonnés.

2.1. Définition. - Un ensemble ordonné S est dit amalgame des ensembles ordonnés S_λ , $\lambda \in \Lambda$, relativement aux isomorphismes $\varphi_{\lambda_1/\lambda_2} : S^0_{\lambda_1} \simeq S^0_{\lambda_2}$, s'il existe des isomorphismes $\varphi_\lambda : S_\lambda \to S$, tels que

(i) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(S_\lambda) = S$,

(ii) $\forall\ \lambda_1 \neq \lambda_2$, $\forall\ i \in [\varphi_{\lambda_1}(S_{\lambda_1}) , \varphi_{\lambda_2}(S_{\lambda_2})]$, $i \cap \varphi_{\lambda_1}(S^0_{\lambda_1}) \neq \emptyset$,

(iii) $\forall\ \lambda_1 , \lambda_2$, $\varphi_{\lambda_1}(S^0_{\lambda_1}) = \varphi_{\lambda_2}(S^0_{\lambda_2}) \neq \emptyset$.

2.2. Remarque.

(a) Nous notons $[M , N]$ l'ensemble des segments $[x , y] \neq \emptyset$, où $x \in M$, $y \in N$, ou bien $x \in N$, $y \in N$.

(b) De la condition (iii), il résulte que la condition (ii) est bien définie. L'ensemble $\varphi_\lambda(S^0_\lambda)$ ne dépend pas de λ , et nous le noterons S^0 .

(c) En particulier, on voit que l'amalgame d'un seul ensemble ordonné S_λ est isomorphe à S_λ .

(d) La condition (iii) entraîne que $\varphi_{\lambda_2} \circ \varphi_{\lambda_1/\lambda_2} = \varphi_{\lambda_1}$ sur $S^0_{\lambda_1}$, et que $\varphi_{\lambda/\lambda}$ est l'application identique de S^0_λ dans S^0_λ .

2.3. LEMME. - Si Λ est un ensemble ayant au moins deux éléments, alors

$$\forall\ \lambda \neq \mu \in \Lambda ,\quad \varphi_\lambda(S_\lambda) \cap \varphi_\mu(S_\mu) = \varphi_\lambda(S^0_\lambda) ,\quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(S_\lambda) = S^0 .$$

Ceci résulte immédiatement de la condition (ii).

2.4. LEMME. - Si $\varphi_{\lambda_1}(s_1) = \varphi_{\lambda_2}(s_2)$ et si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $s_1 \in S^0_{\lambda_1}$, $s_2 \in S^0_{\lambda_2}$ et $s_1 = \varphi_{\lambda_2/\lambda_1}(s_2)$.

Démonstration. - Elle est donnée par 2.3 et 2.2 (d).

2.5. THÉORÈME. - Soient S_λ une famille d'ensembles ordonnés, $\varphi_{\lambda_1/\lambda_2}$, $\lambda_i \in \Lambda$ un système d'isomorphismes, $\varphi_{\lambda_1/\lambda_2} : S^0_{\lambda_1} \simeq S^0_{\lambda_2}$. Soient $\varphi_k : S_\lambda \to S$ et $\hat{\varphi}_k : S_\lambda \to \hat{S}$ des isomorphismes vérifiant les conditions (i), (ii), (iii). Alors S et $\hat{S}$ sont isomorphes.

Démonstration. - Pour tout élément $s \in S$, il existe un indice $\lambda \in \Lambda$ et un élément s_λ tel que $s = \varphi_\lambda(s_\lambda)$. On pose $\psi(s) = \hat{\varphi}_\lambda(s_\lambda)$. L'application $\psi : S \to \hat{S}$ est bien définie et bijective. ψ est un isomorphisme de S sur $\hat{S}$. En effet, soient s , t deux éléments de S , $s \leq t$, $s = \varphi_\lambda(s_\lambda)$, $t = \varphi_\mu(t_\mu)$. Pour $\lambda = \mu$, on a évidemment

$$s \leq_S t \iff \psi(s) \leq_{\hat{S}} \psi(t) ;$$

pour $\lambda \neq \mu$, d'après les conditions (ii) et (iii), on a

$$[\varphi_\lambda(s_\lambda) , \varphi_\mu(t_\mu)] \cap \varphi_\lambda(S_\lambda^0) \neq \emptyset ,$$

et on peut trouver $s_\lambda^0 \in S_\lambda^0$, $s_\mu^0 \in S_\mu^0$ tels que $\varphi_\lambda(s_\lambda) \leq \varphi_\lambda(s_\lambda^0) = \varphi_\mu(s_\mu^0) \leq \varphi_\mu(t_\mu)$, soit $s_\lambda \leq s_\lambda^0$, $s_\mu^0 \leq t_\mu$, donc

$$\hat{\varphi}_\lambda(s_\lambda) \leq \hat{\varphi}_\lambda(s_\lambda^0) , \quad \hat{\varphi}_\mu(s_\mu^0) \leq \hat{\varphi}_\mu(t_\mu) ,$$

et

$$\hat{\varphi}_\lambda(s_\lambda^0) = \hat{\varphi}_\mu(s_\mu^0) ,$$

ce qui montre que $\psi(t) \leq \psi(s)$, et par suite (en remplaçant φ par $\hat{\varphi}$),

$$s \leq t \iff \psi(t) \leq \psi(s) .$$

L'amalgame des ensembles ordonnés est donc défini à un isomorphisme près, et nous le noterons

$$: \varphi_{\lambda/\mu} : S_\lambda , \quad \lambda \in \Lambda .$$

Dans le cas de deux ensembles ordonnés S_1 , S_2 , le système $\varphi_{\lambda/\mu}$ est déterminé par un seul isomorphisme φ , $S_1^0 \xrightarrow{\varphi} S_2^0$, et l'amalgame sera noté $S_1 : \varphi : S_2$.

Nous allons maintenant démontrer que, pour toute famille d'ensembles ordonnés S_λ , $\lambda \in \Lambda$, l'amalgame de cette famille existe.

2.6. Définition. - Soient $\psi_{\lambda/\mu}$ les applications définies de la manière suivante :

$$\psi_{\lambda/\mu} = \begin{cases} \varphi_{\lambda/\mu} & \text{si } \lambda \neq \mu , \\ \text{l'application identique de } S_\lambda \text{ dans } S_\lambda & \text{si } \lambda = \mu . \end{cases}$$

Faisons correspondre à chaque élément $s \in S_\lambda$ le symbole $s^{(\lambda)}$, et soit

$$A_\Lambda(S_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{\ell^{(\lambda)} \mid \ell \in S_\lambda\} .$$

Au système $\psi_{\lambda/\mu}$ associons, dans $A_\Lambda(S_\lambda)$, la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$\ell_1^{(\lambda)} \mathcal{R} \ \ell_2^{(\mu)} \text{ si, et seulement si, } \psi_{\lambda/\mu}(\ell_1) = \ell_2 .$$

2.7. LEMME. - Si $\psi_{\lambda/\mu}(\ell_1) = \ell_2$ et $\psi_{\mu/\kappa}(\ell_2) = \ell_3$, alors $\psi_{\lambda/\kappa}(\ell_1) = \ell_3$.

COROLLAIRE. - La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans A_Λ .

Démonstration. - Elle est donnée dans 2.2 (d).

2.8. Définition. - L'ensemble-quotient de A_Λ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$

sera noté $\mathfrak{A}_\Lambda(S_\lambda)$; nous désignerons par $\bar{s}$ la classe d'équivalence qui contient l'élément s .

2.9. LEMME. - Soient S_λ , $\lambda \in \Lambda$ des ensembles ordonnés, $\Phi_\lambda : S_\lambda \dashrightarrow \mathfrak{A}_\Lambda$ les applications canoniques de S_λ dans $\mathfrak{A}_\Lambda$. Alors,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda(S_\lambda) = \mathfrak{A}_\Lambda .$$

2.10. LEMME. - Quels que soient les indices λ_1 , $\lambda_2 \in \Lambda$, $\Phi_{\lambda_1}(S^0_{\lambda_1}) = \Phi_{\lambda_2}(S^0_{\lambda_2})$.

Démonstration. - Si $\bar{s} \in \Phi_{\lambda_1}(S^0_{\lambda_1})$, $\bar{s} = \overline{s_0^{(\lambda_1)}}$, où $s_0 \in S^0_{\lambda_1}$. Mais nous avons $s_0 = \varphi_{\lambda_2/\lambda_1}(s_2)$, $s_2 \in S^0_{\lambda_2}$, d'où

$$\bar{s} = \overline{s_0^{(\lambda_1)}} = \overline{(\varphi_{\lambda_2/\lambda_1}(s_2))^{(\lambda_1)}} = \overline{s_2^{(\lambda_2)}} = \Phi_{\lambda_2}(s_2) ,$$

$$\Phi_{\lambda_1}(S^0_{\lambda_1}) \subset \Phi_{\lambda_2}(S^0_{\lambda_2}) .$$

2.11. Définition. - Pour deux éléments $\overline{m^{(\mu)}}$, $\overline{n^{(\nu)}} \in \mathfrak{A}_\Lambda$, posons

$\overline{m^{(\mu)}} \leqslant \overline{n^{(\nu)}}$
$\iff$ ($\exists\, m_0 \in S_\mu ;\ n_0 \in S_\nu$ tels que $m \leqslant_{S_\mu} m_0 ,\ n_0 \leqslant_{S_\nu} n ,\ \psi_{\mu/\nu}(m_0) = n_0$) .

2.12. LEMME. - L'ensemble $\mathfrak{A}_\Lambda$ est ordonné par la relation $\leqslant$ de la définition précédente.

Démonstration. - En effet, soit d'abord $\overline{m^{(\lambda)}} = \overline{m_1^{(\lambda_1)}}$, $\overline{n^{(\mu)}} = \overline{n_1^{(\mu_1)}}$ et $\overline{m^{(\lambda)}} \leqslant \overline{n^{(\mu)}}$. D'après la définition, il existe m_0 , n_0 tels que $m \leqslant_{S_\lambda} m_0$, $n_0 \leqslant_{S_\mu} n$, et $\psi_{\lambda/\mu}(m_0) = n_0$. Comme

(2)
$$\psi_{\lambda_1/\mu_1}(\psi_{\mu/\lambda_1}(n_0)) = \psi_{\lambda/\mu_1}(m_0)$$

d'après 2.7, et que $\psi_{\lambda/\lambda_1}(m) = m_1$, $\psi_{\mu/\mu_1}(n) = n_1$ d'après 2.6, on a

$$\psi_{\lambda_1/\lambda}(m_1) \leqslant \psi_{\mu/\lambda}(n_0) , \qquad \psi_{\lambda/\mu}(m_0) \leqslant \psi_{\mu_1/\mu}(n_1) ,$$

et on voit que

(3)
$$m_1 \leqslant \psi_{\mu/\lambda_1}(n_0) , \qquad \psi_{\lambda/\mu_1}(m_0) \leqslant n_1 ,$$

Il résulte de (2) et de (3) que $\overline{m_1^{(\lambda_1)}} \leqslant \overline{n_1^{(\mu)}}$.

Soit maintenant $\overline{m^{(\lambda)}} \leqslant \overline{n^{(\mu)}}$ et $\overline{n^{(\mu)}} \leqslant \overline{p^{(\tau)}}$. Cela signifie qu'il existe

m_0 , n_0 , p_0 tels que $m \leqslant_{S_\lambda} m_0$, $n_0 \leqslant_{S_\mu} n$, $n \leqslant_{S_\mu} n_1$, $p_0 \leqslant_{S_\tau} p$,

et que $\psi_{\lambda/\mu}(m_0) = n_0$, $\psi_{\mu/\tau}(n_1) = p$. Comme $n_0 \leqslant n \leqslant n_1$, il vient

$$m \leqslant_{S_\lambda} m_0 \ , \quad \psi_{\mu/\tau}(n_0) \leqslant_{S_\tau} p \ ,$$

$$\psi_{\lambda/\tau}(m_0) = \psi_{\mu/\tau}(n_0) \ ;$$

dès lors $\overline{m^{(\lambda)}} \leqslant \overline{p^{(\tau)}}$.

Soit enfin $\overline{m^{(\lambda)}} \leqslant \overline{n^{(\mu)}}$, $\overline{n^{(\mu)}} \leqslant \overline{m^{(\lambda)}}$; il existe donc m_0 , n_0 , n_1 , m_1 tels que $\psi_{\lambda/\mu}(m_0) = n_0$, $\psi_{\mu/\lambda}(n_1) = m_1$. Comme $n_0 \leqslant n_1$, on a

$$m \leqslant m_0 = \psi_{\mu/\lambda}(n_0) \leqslant \psi_{\mu/\lambda}(n_1) = m_1 \leqslant m \ ,$$

c'est-à-dire

$$m = m_1 = \psi_{\mu/\lambda}(n_1) = \psi_{\mu/\lambda}(n) \ ,$$

d'où $\overline{m^{(\lambda)}} = \overline{n^{(\mu)}}$.

2.13. LEMME. - Les applications Φ_λ de S_λ dans $\mathfrak{T}_\Lambda$ sont des isomorphismes vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) de la définition de l'amalgame des ensembles ordonnés S_λ .

Démonstration. - On a vu (2.9 et 2.10) que les conditions (i) et (iii) sont vérifiées. Si on prend un segment

$$i = [\Phi_{\lambda_1}(s_1) \ , \ \Phi_{\lambda_2}(s_2)] \ , \quad s_i \in S_{\lambda_i} \ , \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \ ,$$

on a

$$i = [\overline{s_1^{(\lambda_1)}} \ , \ \overline{s_2^{(\lambda_2)}}] \ , \quad \overline{s_1^{(\lambda_1)}} \leqslant \overline{s_2^{(\lambda_2)}} \ ,$$

et il existe s_{10} , s_{20} tels que $s_1 \leqslant s_{10}$, $s_{20} \leqslant s_2$, $\psi_{\lambda_1/\lambda_2}(s_{10}) = s_{20}$, donc $\overline{s_1^{(\lambda_1)}} \leqslant \overline{s_{10}^{(\lambda_1)}} = \overline{s_{20}^{(\lambda_2)}} \leqslant \overline{s_2^{(\lambda_2)}}$, d'où

$$\Phi_{\lambda_1}(S^0_{\lambda_1}) \ni \Phi_{\lambda_1}(s_{10}) = \overline{s_{10}^{(\lambda_1)}} \in [\overline{s_1^{(\lambda_1)}} \ , \ \overline{s_2^{(\lambda_2)}}] = i \ ,$$

et la condition (ii) est vérifiée.

2.14. THÉORÈME. - L'amalgame d'une famille d'ensembles ordonnés S_λ , $\lambda \in \Lambda$, existe toujours, et est isomorphe à l'ensemble $\mathfrak{T}_\Lambda$ ordonné par la relation d'ordre définie dans 2.11.

Démonstration. Elle est donnée par 2.5 et 2.13.

Pour simplifier la notation, nous désignerons les isomorphismes $\bar{\varphi}_\lambda$ par les lettres φ_λ .

3. Amalgame d'une famille de treillis.

Soient L_λ , $\lambda \in \Lambda$, une famille de treillis, et $\varphi_{\lambda/\mu} : S_\lambda^0 \simeq S_\mu^0$ un isomorphisme d'un sous-ensemble S_λ^0 de L_λ sur $S_\mu^0 \subset L_\mu$.

L'amalgame $: \varphi_{\lambda/\mu} : L_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ n'est pas en général un treillis (même sous l'hypothèse où $S_\lambda^0 = L_\lambda^0$ sont des sous-treillis des treillis L_λ).

Du théorème précédent, il découle, d'après le théorème d'Iseki, le théorème suivant :

3.1. THÉORÈME. - <u>L'amalgame</u> $: \varphi_{\lambda/\mu} : L_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, <u>où</u> $\varphi_{\lambda/\mu} : S_\lambda^0 \simeq S_\mu^0$, <u>est un treillis si, et seulement si, l'ensemble</u> $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ <u>est un treillis.</u>

Dans ce cas, l'amalgame et l'ensemble $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ sont isomorphes en tant que treillis.

COROLLAIRE. - <u>Si les ensembles</u> $S_\lambda^0 = L_\lambda^0$ <u>sont des sous-treillis des treillis</u> L_λ , <u>et, si</u> $\mathfrak{A}_\Lambda$ <u>est un treillis, alors les treillis</u> $\varphi_\lambda(L_\lambda)$ <u>sont des sous-treillis de</u> $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$.

<u>Démonstration du corollaire.</u> - Elle résulte des raisonnements suivants : Soient a , $b \in L_\lambda$, $c \in L_\mu$ tels que $\overline{a^{(\lambda)}} \geq \overline{c^{(\mu)}}$, $\overline{b^{(\lambda)}} \geq \overline{c^{(\mu)}}$. Il existe donc a_0 , c_0 , b_0 , c_1 tels que $a \geq a_0$, $c_0 \geq c$, $b \geq b_0$, $c_1 \geq c$, $\psi_{\lambda/\mu}(a_0) = c_0$, $\psi_{\lambda/\mu}(b_0) = c_1$. On a donc

$$\psi_{\lambda/\mu}(a_0 \cap b_0) = \psi_{\lambda/\mu}(a_0) \cap \psi_{\lambda/\mu}(b_0) \geq c_0 \cap c_1 \geq c ,$$

et par conséquent,

$$\overline{(a \cap b)^{(\lambda)}} \geq \overline{(a_0 \cap b_0)^{(\lambda)}} = \overline{(\psi_{\lambda/\mu}(a_0 \cap b_0))^{(\mu)}} \geq \overline{(c_0 \cap c_1)^{(\mu)}} \geq \overline{c^{(\mu)}} .$$

Nous supposerons désormais (sauf un cas que nous indiquerons) que les ensembles $S_\lambda^0 = L_\lambda^0$, qui figurent dans l'amalgame $: \varphi_{\lambda/\mu} : L_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ d'une famille de treillis L_λ , sont des sous-treillis des treillis L_λ .

3.2. LEMME. - <u>Si</u> $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ <u>est un inf-demi-treillis, alors la condition suivante est valable :</u>

<u>(A)</u> $\forall\ c_1 \in L_\lambda$, $\forall\ c_2 \in L_\mu$, $\lambda \neq \mu$, $\varphi_{\lambda/\lambda}(c_1] \neq \emptyset$ <u>ou</u> $\varphi_{\mu/\mu}(c_2] \neq 0$.

<u>Démonstration.</u> - Notons $\overline{d^{(\kappa)}} = \overline{c_1^{(\lambda)}} \cap \overline{c_2^{(\mu)}}$, $\lambda \neq \mu$. On a donc

$$\overline{c_1^{(\lambda)}} \geq \overline{d^{(\varkappa)}} \implies \exists\ c_{10}\ ,\ d_{10}\ \text{ tels que }\ c_1 \geq c_{10}\ ,\ d_{10} \geq d$$

$$\overline{c^{(\mu)}} \geq \overline{d^{(\varkappa)}} \implies \exists\ c_{20}\ ,\ d_{20}\ \text{ tels que }\ c_2 \geq c_{20}\ ,\ d_{20} \geq d$$

où $\psi_{\lambda/\varkappa}(c_{10}) = d_{10}$, $\psi_{\mu/\varkappa}(c_{20}) = d_{20}$.

Au moins une des applications $\psi_{\lambda/\varkappa}$, $\psi_{\mu/\varkappa}$ n'est pas identique (Sinon, on a $\lambda = \varkappa = \mu$, en contradiction avec l'hypothèse $\lambda \neq \mu$). Si par exemple $\psi_{\lambda/\varkappa} = \varphi_{\lambda/\varkappa}$, alors $\varphi_{\lambda/\varkappa}(c_{10}) = d_0$ implique $\varphi_{\lambda/\lambda}(c_{10}) = \varphi_{\varkappa/\lambda}(d_0)$, et $\varphi_{\lambda/\lambda}(c_1] \neq \emptyset$.

3.3. Remarque. - Nous posons par définition

$$\varphi(c] = \{y \mid \exists\ x \leqslant c\ ,\ \varphi(x) = y\}\ ,$$
$$(c] = \{x \mid x \leqslant c\}\ .$$

3.4. LEMME. - Si $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ est un inf-demi-treillis, alors la condition suivante est vérifiée :

(B) $\forall\ \lambda \neq \mu$, $(\varphi_{\lambda/\lambda}(c_1] \neq \emptyset$ et $\varphi_{\mu/\mu}(c_2] \neq \emptyset)$

$$\implies [(\forall\ x \in \varphi_{\mu/\lambda}(c_2]\ ,\ c_1 \cap x \in \varphi_{\mu/\lambda}(c_2])$$
$$\text{ou } (\forall\ y \in \varphi_{\lambda/\mu}(c_1]\ ,\ c_2 \cap y \in \varphi_{\lambda/\mu}(c_1])]\ .$$

Démonstration. - Supposons que des éléments c_1 , c_2 soient tels que

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi_{\lambda/\lambda}(c_1] \neq \emptyset\ ,\quad \varphi_{\mu/\mu}(c_2] \neq \emptyset\ , \\ \exists\ x \in \varphi_{\mu/\lambda}(c_2]\ ,\ c_1 \cap x \notin \varphi_{\mu/\lambda}(c_2]\ , \\ \exists\ y \in \varphi_{\lambda/\mu}(c_1]\ ;\ c_2 \cap y \notin \varphi_{\lambda/\mu}(c_1]\ . \end{cases}$$

D'après l'hypothèse, l'élément $\overline{c_1^{(\lambda)}} \cap \overline{c_2^{(\mu)}} = \overline{d^{(\varkappa)}}$ existe, et

$$\exists\ c_{10}\ ,\ d_{10}\ \text{ tels que }\ c_1 \geq c_{10} \xrightarrow{\psi_{\lambda/\varkappa}} d_{10} \geq d\ ,$$
$$\exists\ c_{20}\ ,\ d_{20}\ \text{ tels que }\ c_2 \geq c_{20} \xrightarrow{\psi_{\mu/\varkappa}} d_{20} \geq d\ .$$

Nous allons montrer qu'on peut supposer $\varkappa = \lambda$ ou $\varkappa = \mu$. Or, dans le cas où $\varkappa \neq \lambda$ et $\varkappa \neq \mu$, on a

$$\overline{d^{(\varkappa)}} = \overline{c_1^{(\lambda_1)}} \cap \overline{c_2^{(\mu)}} \geq \overline{c_{10}^{(\lambda_1)}} \cap \overline{c_{20}^{(\mu)}} = \overline{d_{10}^{(\varkappa)}} \cap \overline{d_{20}^{(\varkappa)}} = \overline{(d_{10} \cap d_{20})^{(\varkappa)}} \geq \overline{d^{(\varkappa)}}\ ,$$

donc $d = d_{10} \cap d_{20} \in L_x^0$, et, pour l'élément $\varphi_{\varkappa/\lambda}(d_{10} \cap d_{20}) \in L_\lambda^0$, il vient

$$\overline{(\varphi_{\varkappa/\lambda}(d_{10} \cap d_{20}))^{(\lambda)}} = \overline{(d_{10} \cap d_{20})^{(\varkappa)}} = \overline{d^{(\varkappa)}}.$$

Supposons, dans la suite, que $\varkappa = \lambda$ $(\neq \mu)$. On voit facilement que

$$\overline{(c_1 \cap x)^{(\lambda)}} \leqslant \overline{c_1^{(\lambda)}} \quad \text{et} \quad \overline{(c_1 \cap x)^{(\lambda)}} \leqslant \overline{x^{(\lambda)}} \leqslant \overline{c_2^{(\mu)}} ,$$

donc $\overline{(c_1 \cap x)^{(\lambda)}} \leqslant \overline{c_1^{(\lambda)}} \cap \overline{c_2^{(\mu)}} = \overline{d^{(\lambda)}}$ et $c_1 \cap x \leqslant d$. D'autre part, la relation $\overline{d^{(\lambda)}} \leqslant \overline{c_2^{(\mu)}}$ entraîne qu'il existe des éléments d_0 , c_{30} tels que

$$d \leqslant d_0 \xrightarrow{\varphi_{\lambda/\mu}} c_{30} \leqslant c_2 .$$

Comme L_λ^0 est un sous-treillis de L_λ , l'élément $d_3 = d_0 \cup x$ appartient à L_λ^0 . Posons $c_3 = \varphi_{\lambda/\mu}(d_3)$. Il est clair que

$$d \leqslant d_3 \xrightarrow{\varphi_{\lambda/\mu}} c_3 = \varphi_{\lambda/\mu}(d_0) \cup \varphi_{\lambda/\mu}(x) \leqslant c_2 .$$

Mais on a aussi $\overline{(c_2 \cap y)^{(\mu)}} \leqslant \overline{y^{(\mu)}} \leqslant \overline{c_1^{(\lambda)}}$, c'est-à-dire

$$\overline{(c_2 \cap y)^{(\mu)}} \leqslant \overline{c_1^{(\lambda)}} \cap \overline{c_2^{(\mu)}} = \overline{d^{(\lambda)}} ,$$

et il existe des éléments p_0 , q_0 tels que

$$c_2 \cap y \leqslant p_0 \xrightarrow{\varphi_{\mu/\lambda}} q_0 \leqslant d .$$

Notons $p_1 = p_0 \cap y \geqslant c_2 \cap y$,
$q_1 = \varphi_{\mu/\lambda}(y) \cap q_0 \leqslant q_0 \leqslant d \leqslant c_1$.

Ainsi,

$$c_2 \cap y \leqslant p_1 \xrightarrow{\varphi_{\mu/\lambda}} q_1 \leqslant d \leqslant c_1 ,$$

et

$$\overline{c_2^{(\mu)}} \geqslant \overline{c_3^{(\mu)}} = \overline{d_3^{(\lambda)}} \geqslant \overline{d^{(\lambda)}} \geqslant \overline{q_1^{(\lambda)}} = \overline{p_1^{(\mu)}} ,$$

d'où $c_2 \geqslant p_1$, par conséquent $p_1 \leqslant y \cap c_2$, ce qui entraîne $p_1 = y \cap c_2$, et en définitive $y \cap c_2 = \varphi_{\lambda/\mu}(q_1) \in \varphi_{\lambda/\mu}(c_1]$, en contradiction avec l'hypothèse (4).

Les conditions (<u>A</u>) et (<u>B</u>) ne sont pas en général suffisantes pour que $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ soit un inf-demi-treillis. C'est pourquoi nous introduisons encore une condition.

3.5. LEMME. - <u>Si $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ est un inf-demi-treillis, alors on a</u>

(<u>C</u>) $\forall\ \lambda \neq \mu$, $\forall\ c_1 \in L_\lambda$, $\forall\ c_2 \in L_\mu$,

$$[(y \in \varphi_{\lambda/\mu}(c_1] \implies c_2 \cap y \in \varphi_{\lambda/\mu}(c_1])$$
$$\implies (\text{il existe} \max_{x \in \varphi_{\mu/\lambda}(c_2]} c_1 \cap x \ \text{ et } \ \varphi_{\mu/\lambda}(c_2] \neq \emptyset)] .$$

<u>Dans ce cas, on a</u>

$$\overline{(\max_{x \in \varphi_{\mu/\lambda}(c_2]} c_1 \cap x)^{(\lambda)}} = \overline{c_1^{(\lambda)}} \cap \overline{c_2^{(\mu)}} .$$

Démonstration. - Elle utilise des raisonnements analogues à ceux de 3.4 ; remarquons qu'il faut distinguer deux cas, à savoir : $\varphi_{\lambda/\mu}(c_1] = \emptyset$ et $\varphi_{\lambda/\mu}(c_1] \neq \emptyset$.

Notons maintenant $\underset{\sim}{\Gamma}_1^{\downarrow} = \varphi_{\lambda/\mu}(c_1]$, $\underset{\sim}{\Gamma}_2^{\downarrow} = \varphi_{\mu/\lambda}(c_2]$ et $c_i \wedge \underset{\sim}{\Gamma}_j^{\downarrow} = \{c_i \cap y \mid y \in \Gamma_j^{\downarrow}\}$. En utilisant cette notation, nous allons énoncer le théorème suivant :

3.6. THÉORÈME. - L'amalgame $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ est un treillis si, et seulement si, la condition $(\underline{D})$, et la condition duale $(\overline{\underline{D}})$, sont valables,

$(\underline{D})$ $\forall\ \lambda \neq \mu$, $\forall\ c_1 \in L_\lambda$, $\forall\ c_2 \in L_\mu$,

$$[(\underset{\sim}{\Gamma}_2^{\downarrow} \neq \emptyset \text{ , et il existe } \max_{\underset{\sim}{\Gamma}_2^{\downarrow}} c_1 \wedge \underset{\sim}{\Gamma}_2^{\downarrow} \text{ et } c_2 \wedge \Gamma_1^{\downarrow} \subset L_\mu^0) \text{ ,}$$

ou

$$(\underset{\sim}{\Gamma}_1^{\downarrow} \neq \emptyset \text{ , et il existe } \max_{\underset{\sim}{\Gamma}_1^{\downarrow}} c_2 \wedge \underset{\sim}{\Gamma}_1^{\downarrow} \text{ et } c_1 \wedge \underset{\sim}{\Gamma}_2^{\downarrow} \subset L_\lambda^0)] \text{ .}$$

Démonstration. - D'après 3.2, 3.4 et 3.5, la condition $(\underline{D})$ est nécessaire. Pour vérifier que la condition $(\underline{D})$ est suffisante pour que $\mathfrak{A}_\Lambda$ soit un inf-demi-treillis, il suffit de montrer que l'hypothèse

$$(\underset{\sim}{\Gamma}_2^{\downarrow} \neq \emptyset \text{ , et il existe } \max_{\underset{\sim}{\Gamma}_2^{\downarrow}} c_1 \wedge \underset{\sim}{\Gamma}_2^{\downarrow} \text{ et } c_2 \wedge \underset{\sim}{\Gamma}_1^{\downarrow} \subset L_\mu^0)$$

entraîne

$$\overline{c_1^{(\lambda)}} \cap \overline{c_2^{(\mu)}} = \overline{(\max_{\underset{\sim}{\Gamma}_2^{\downarrow}} c_1 \wedge \underset{\sim}{\Gamma}_2^{\downarrow})^{(\lambda)}} \text{ .}$$

Nous supprimons les détails de ces vérifications.

Le lemme suivant met en évidence la situation de plongement des sous-treillis L_Λ^0 dans les treillis L_λ .

3.7. LEMME. - Si $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ est un sup-demi-treillis, tout treillis L_λ est cofinal avec L_λ^0 , sauf au plus un indice $\mu \in \Lambda$.

Rappelons que l'ensemble T est dit cofinal avec T_1 (Cf. [7], p. 412), si, pour tout $t \in T$, il existe $t_1 \in T_1$ tel que $t \leqslant t_1$.

Démonstration du lemme 3.7. - Soient L_λ , L_μ deux treillis, et supposons que L_λ ne soit pas cofinal avec L_λ^0 . Soit ℓ_2 un élément de L_μ . Il existe donc $\ell_1 \in L_\lambda$ tel que $\forall\ \ell_1^0 \in L_\lambda^0$: $\ell_1 \not\leqslant \ell_1^0$. $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ étant un sup-demi-treillis, la condition $(\overline{A})$ est valable, donc $\varphi_{\lambda/\lambda}[\ell_1) \neq \emptyset$ ou $\varphi_{\mu/\mu}[\ell_2) \neq \emptyset$. Comme $\varphi_{\lambda/\lambda}[\ell_1) = \emptyset$ on a $\varphi_{\mu/\mu}[\ell_2) \neq \emptyset$, ce qui achève la démonstration.

On peut simplifier la condition $(\underline{D})$ en se bornant au cas où les treillis considérés ne sont pas "trop éloignés" des treillis finis.

3.8. Définition. - On dit que l'amalgame $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ vérifie la condition (P), si un treillis L_μ^0 satisfait à la condition $(\hat{C})$.

3.9. Définition. - $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ étant un amalgame qui vérifie (P), $\varphi_{\lambda/\mu}(c_1] \neq \emptyset$, on désigne par $c_1^{\downarrow}$ l'élément maximum de l'ensemble $\varphi_{\lambda/\mu}(c_1]$ (en supprimant les indices λ, μ pour simplifier la notation). Dans le cas où $\varphi_{\lambda/\mu}(c_1] = \emptyset$, nous dirons que $c_1^{\downarrow}$ n'existe pas.

3.10. Remarque. - Si $\varphi_{\lambda/\mu}(c] \neq \emptyset$, alors la condition (P), et le fait que $\varphi_{\lambda/\mu}$ sont des isomorphismes des treillis L_λ^0, impliquent l'existence de $c^{\downarrow}$.

De 3.6, il résulte immédiatement :

3.11. LEMME. - Soit $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ l'amalgame d'une famille de treillis $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pour lequel la condition (P) est satisfaite. $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ est un treillis si, et seulement si, les conditions $(\underline{D}_p)$ et $(\bar{\underline{D}}_p)$ sont valables, $(\underline{D}_p)$ étant la condition suivante (et $(\bar{\underline{D}}_p)$ la condition duale) :

$(\underline{D}_p)$ $\forall \lambda \neq \mu$, $\forall c_1 \in L_\lambda$, $\forall c_2 \in L_\mu$,

$$[(c_2^{\downarrow} \ \underline{\text{existe et}} \ (\varphi_{\lambda/\mu}(c_1] \neq \emptyset \implies c_2 \cap c_1^{\downarrow} \in L_\mu^0))$$

ou

$$(c_1^{\downarrow} \ \underline{\text{existe et}} \ (\varphi_{\mu/\lambda}(c_2] \neq \emptyset \implies c_1 \cap c_2^{\downarrow} \in L_\lambda^0))].$$

Un autre énoncé de la condition $(\underline{D}_p)$ nous donne une analogie intéressante du résultat classique de SCHREIER (Cf. [10], p. 164, et [9], p. 510) portant sur les amalgames des groupes :

3.12. THÉORÈME. Si $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ satisfait à la condition (P), la condition $(\underline{D}_p)$ est vérifiée si, et seulement si, pour tout couple d'éléments $c_1 \in L_\lambda$, $c_2 \in L_\mu$, $\lambda \neq \mu$, une des conditions suivantes est vérifiée :

$(\underline{D}_p^*$ I) $c_2^{\downarrow}$ existe et $c_1^{\downarrow}$ n'existe pas,
$(\underline{D}_p^*$ II) $c_2^{\downarrow}$ existe et $c_2 \cap c_1^{\downarrow} \in L_\mu^0$,
$(\underline{D}_p^*$ III) $c_1^{\downarrow}$ existe et $c_2^{\downarrow}$ n'existe pas,
$(\underline{D}_p^*$ IV) $c_1^{\downarrow}$ existe et $c_1 \cap c_2^{\downarrow} \in L_\lambda^0$.

COROLLAIRE.

Dans le premier cas, on a $\overline{c_1^{(\lambda)}} \cap \overline{c_2^{(\mu)}} = \overline{(c_1 \cap c_2^{\downarrow})^{(\lambda)}}$.

Dans le deuxième cas, on a $\overline{c_1^{(\lambda)}} \cap \overline{c_2^{(\mu)}} = \overline{(c_2^{\downarrow} \cap c_1)^{(\lambda)}}$.

Dans le troisième cas, on a $\overline{c_1^{(\lambda)}} \cap \overline{c_2^{(\mu)}} = \overline{(c_1^{\downarrow} \cap c_2)^{(\mu)}}$.

Dans le quatrième cas, on a $\overline{c_1^{(\lambda)}} \cap \overline{c_2^{(\mu)}} = \overline{(c_1^{\downarrow} \cap c_2)^{(\mu)}}$.

Démonstration. - Elle utilise 3.12 et 3.6.

3.13. Définition. - On dit que l'expression $w(\overline{k_1^{(\lambda_1)}}, \overline{k_2^{(\lambda_2)}}, \ldots, \overline{k_n^{(\lambda_n)}})$ est obtenue à partir de l'expression $w(\overline{y_1^{(\mu_1)}}, \ldots, \overline{y_m^{(\mu_m)}})$ par la normalisation de Schreier si on peut passer de l'une à l'autre par un nombre fini de transformations de la forme suivante :

(I) On remplace un élément $\overline{y^{(\eta)}}$ par un élément $\overline{z^{(\xi)}}$ tel que $\overline{y^{(\eta)}} = \overline{z^{(\xi)}}$.

(II) On remplace une expression $\overline{y_1^{(\eta)}} \cap \overline{y_2^{(\eta)}}$ par l'élément $\overline{y_3^{(\eta)}}$ où $y_3 = y_1 \cap y_2 \in L_\eta$.

(III) On remplace une expression $\overline{y_1^{(\eta)}} \cap \overline{y_2^{(\eta)}}$ par l'élément $\overline{y_4^{(\eta)}}$ où $y_4 = y_1 \cup y_2 \in L_\eta$.

3.14. THÉORÈME. - Si $\mathfrak{A}_\Lambda$ satisfait à la condition (P), toute expression

$$w(y_1^{(\mu_1)}, \ldots, y_m^{(\mu_m)})$$

de $\mathfrak{A}_\Lambda$ peut être ramenée par la normalisation de Schreier à l'aide d'au plus $2m$ transformations du type (I), (II), (III) à un élément $\overline{x^{(\xi)}}$. En d'autres termes : Toute expression de $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ peut être "calculée" à l'aide des opérations $\cap$, $\cup$ définies dans les treillis L_λ.

On peut démontrer le théorème 3.14 par récurrence sur la longueur de l'expression w.

Pour vérifier directement que $\mathfrak{A}_\Lambda$ est un treillis, le théorème suivant est souvent très utile :

3.15. THÉORÈME. - Soit $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ un amalgame vérifiant (P). $\mathfrak{A}_\Lambda$ est un inf-demi-treillis si, et seulement si, la condition suivante est satisfaite simultanément avec la condition (A).

(F) $\forall\ c_1 \in L_\lambda$, $\forall\ c_2 \in L_\mu$, $\lambda \neq \mu$,

$$(\varphi_{\lambda/\lambda}(c_1] \neq \emptyset \ \text{ et } \ \varphi_{\mu/\mu}(c_2] \neq \emptyset)$$
$$\Longrightarrow (c_2 \cap c_1^{\downarrow} \in \varphi_{\lambda/\mu}(c_1] \ \text{ ou } \ c_1 \cap c_2^{\downarrow} \in \varphi_{\mu/\lambda}(c_2]) .$$

COROLLAIRE. - Soit $L_1 : \varphi : L_2$ un amalgame vérifiant (P), et L_i étant cofinal avec L_i^C. Supposons que L_i^C soit convexe dans L_i, et soit enfin L_j dual-cofinal avec L_j^0, les indices i, j étant égaux à 1 ou 2, non nécessairement différents, alors l'amalgame est un treillis.

Démonstration du théorème. - Elle utilise 3.12.

3.16. LEMME. - Soit $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ un amalgame vérifiant (P). Alors tout treillis L_λ

<u>possède l'élément nul (respectivement l'élément universel) sauf au plus un treillis L_μ (respectivement $L_\varkappa$).</u>

Nous allons maintenant énoncer un résultat sur le problème des décompositions dans la théorie des amalgames.

3.17. <u>Définition</u>. - Le treillis L est dit <u>décomposable en amalgame de deux treillis</u> L_1 , L_2 , si :

1° $L = L_1 : \varphi : L_2$, où $\varphi : S_1^0 \simeq S_2^0$, S_i^0 étant un ensemble ordonné inclus dans L_i , et si

2° $\varphi_1(L_1) \cap \varphi_2(L_2) \subsetneqq \varphi_i(L_i)$, $i = 1 , 2$.

3.18. THÉORÈME. - <u>Si</u> L <u>est un treillis ayant plus de deux éléments et vérifiant la condition</u> $(\hat{C} \downarrow)$, L <u>est décomposable</u>.

<u>Démonstration</u>. - On peut supposer que, dans L , il existe au moins deux atomes. Dans ce cas, il suffit de vérifier que $L = L_a : \varphi : P_a$, a étant un atome, φ l'application identique de $\{\sigma\} \cup \{\varkappa \mid \varkappa > a\}$, $L_a = L \setminus \{a\}$, $P_a = \{\sigma\} \cup \{\varkappa \mid \varkappa \geq a\}$.

3.19. <u>Remarque</u>. - Si on demandait que les ensembles S_i^0 soient des sous-treillis de L_i , un résultat analogue ne serait pas valable. Le treillis z_4 des partitions d'un ensemble à quatre éléments représente un contre-exemple correspondant.

4. Constructions utilisant les amalgames et leurs propriétés.

4.1. THÉORÈME. - <u>Soit</u> $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ <u>l'amalgame d'une famille de treillis modulaires. Supposons qu'un des treillis</u> L_Λ^0 <u>soit convexe dans</u> L_Λ . <u>Si</u> $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ <u>est un treillis, alors il est modulaire</u>.

<u>Démonstration</u>. - Supposons qu'il existe un sous-treillis non modulaire isomorphe à M_5 et déterminé par les éléments

$$\overline{a^{(\alpha)}} \cap \overline{b^{(\beta)}} = \overline{\sigma^{(\omega)}} < \overline{c^{(\gamma)}} < \overline{b^{(\beta)}} < \overline{i^{(\iota)}} ,$$

$$\overline{\sigma^{(\omega)}} < \overline{a^{(\alpha)}} < \overline{i^{(\iota)}} = \overline{a^{(\alpha)}} \cup \overline{c^{(\gamma)}} .$$

On peut supposer que $\alpha \neq \beta = \gamma$, quel que soit le choix des indices α , β , γ , qui ne change pas les classes correspondantes. Distinguons les quatre cas suivants :

(I) $\omega = \alpha$, $i = \alpha$. Grâce aux inégalités $\overline{b^{(\beta)}} < \overline{i^{(\alpha)}}$, $\overline{c^{(\beta)}} > \overline{\omega^{(\alpha)}}$, il existe des éléments b_0 , i_0 , σ_0 , c_0 tels que

$$b \leq b_0 \xrightarrow{\varphi_{\beta/\alpha}} i_0 \leq i ,$$

$$\sigma \leq \sigma_0 \xrightarrow{\varphi_{\alpha/\beta}} c_0 \leq c ;$$

en utilisant la convexité, on en déduit $\overline{b^{(\beta)}} = \overline{b_1^{(\alpha)}}$ en contradiction avec l'hypothèse sur α et β.

(II) $\omega = \beta$, $i = \beta$. Ici on obtient d'une façon analogue $\overline{a^{(\alpha)}} = \overline{a_1^{(\beta)}}$, ce qui a été exclu par l'hypothèse.

(III) $\omega = \beta$, $i = \alpha$. L'inégalité $\overline{b^{(\beta)}} < \overline{i^{(\alpha)}}$ entraîne l'existence de b_0, i_0 tels que $b < b_0 \xrightarrow{\varphi_{\beta/\alpha}} i_0 < i$. Comme $\overline{(i_0 \cap a)^{(\alpha)}} \geq \overline{\sigma^{(\beta)}}$, il existe k_0, $\varkappa_0$ tels que

$$i_0 \cap a > b_0 \xrightarrow{\varphi_{\alpha/\beta}} \varkappa_0 > \sigma ,$$

et la convexité implique $i_0 \cap a \in L_\alpha^0$. Notons $j_0 = \varphi_{\alpha/\beta}(i_0 \cap a)$. Comme

$$j_0 \leq c \cup j_0 \leq b \cup j_0 \leq b_0 \cup j_0 = b_0 , \quad j_0 , b_0 \in L_\beta^0 ,$$

on a $b \cup j_0$, $c \cup j_0 \in L_\beta^0$. Notons $\varkappa = \varphi_{\beta/\alpha}(b \cup j_0)$, $y = \varphi_{\beta/\alpha}(c \cup j_0)$. De la dernière relation, il découle que

$$\varphi_{\beta/\alpha}(j_0) \leq \varphi_{\beta/\alpha}(c \cup j_0) \leq \varphi_{\beta/\alpha}(b \cup j_0) \leq \varphi_{\beta/\alpha}(b_0) ,$$

soit $i_0 \cap a \leq y \leq x \leq i_0$. Supposons d'abord $b \cup j_0 = c \cup j_0$. Dans ce cas,

$$\overline{b^{(\beta)}} \cap \overline{j_0^{(\beta)}} = \overline{b^{(\beta)}} \cap \overline{(i_0 \cap a)^{(\alpha)}} \leq \overline{b^{(\beta)}} \cap \overline{c^{(\alpha)}} = \overline{\sigma^{(\beta)}} ,$$

les éléments $b \cup j_0 = c \cup j_0 > b > c > \sigma$, et l'élément j_0, forment un sous-treillis de L_β isomorphe à M_5, ce qui n'est pas possible grâce à la modularité de L_β. Supposons maintenant $b \cup j_0 \neq c \cup j_0$. Mais dans ce cas, les éléments $i_0 \cap a < y < x < i_0$ et a forment un sous-treillis de L_α isomorphe à M_5, ce qui est en contradiction avec la modularité de L_α.

(IV) $\omega = \alpha$, $i = \beta$. Ce cas peut être ramené par la dualité au cas (III).

4.2. THÉORÈME. - <u>Soit $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ l'amalgame d'une famille de treillis distributifs. Supposons qu'un des treillis L_μ^0 soit convexe dans L_μ. Si $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ est un treillis, alors il est distributif.</u>

<u>Démonstration</u>. - D'après 4.1, le treillis $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ est modulaire.

Soient $\overline{a^{(\alpha)}} \parallel \overline{b^{(\beta)}} \parallel \overline{c^{(\gamma)}}$, $\overline{\sigma^{(\omega)}}$, $\overline{i^{(\iota)}}$ des éléments constituant un sous-treillis isomorphe au treillis D_5. On peut supposer que $\alpha = \gamma$. Mais ceci implique $\overline{i^{(\iota)}} = \overline{i_1^{(\alpha)}}$, $\overline{\sigma^{(\omega)}} = \overline{\sigma_1^{(\alpha)}}$, et, grâce à la convexité, il en résulte $\overline{b^{(\beta)}} = \overline{b_1^{(\alpha)}}$, donc c_1, a, c, b_1, σ_1 forment un sous-treillis de L_α isomorphe à D_5, ce qui représente la contradiction avec le fait que L_α est distributif.

4.3. <u>Remarque</u>. - Un théorème analogue est valable pour les treillis vérifiant la condition de quotients premiers, mais n'est pas valable pour les treillis relativement complémentés et, non plus, pour les treillis complémentés. Pour les treillis semi-modulaires, le théorème suivant est valable :

4.4. THÉORÈME. - <u>Soit $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ l'amalgame d'une famille de treillis semi-modulaires, et supposons qu'un treillis L^0_λ soit convexe (dans L_λ) et satisfasse la condition</u> $(\hat{C}\downarrow)$.

<u>Si $\mathfrak{A}_\Lambda(L_\lambda)$ est un treillis, alors il est semi-modulaire</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit $\bar{a} \parallel \bar{b}$, $\bar{a} \cap \bar{b} < \bar{\varkappa} < \bar{a}$. Il faut démontrer qu'il existe un élément $\bar{t}$ tel que $\bar{a} \cap \bar{b} < \bar{t} \leq \bar{b}$, et que $(\bar{\varkappa} \cup \bar{t}) \cap \bar{a} = \bar{\varkappa}$. Ecrivons, de la manière plus précise,

$$\bar{a} = \overline{a^{(\alpha)}} \ , \quad \bar{b} = \overline{b^{(\beta)}} \ , \quad \bar{\varkappa} = \overline{\varkappa^{(\xi)}}$$

$$\bar{a} \cap \bar{b} = \overline{d^{(\delta)}} \ , \quad \bar{a} \cup \bar{b} = \overline{s^{(\omega)}} \ .$$

On peut supposer $\alpha \neq \beta$. Distinguons les cas indiqués dans le tableau ci-contre :

numéro du cas	$\alpha \neq \beta$: ω	δ	
(I)	α	α	
(II)	β	β	
(III)	β	α	
(IV_1)	α	β	$\xi = \beta$
(IV_2)	α	β	$\xi = \alpha$

Dans les cas numéros (I), (II), (III), (IV_1), l'existence d'un élément $\bar{t}$, possèdant les propriétés demandées, peut être démontrée sans qu'on utilise l'hypothèse $(\hat{C}\downarrow)$, et nous n'entrons pas ici dans le détail de ces raisonnements, n'indiquant la démonstration que dans le cas (IV_2) : Ici, on peut supposer qu'il existe des éléments w, v, τ, τ^{-1}, m, n, ξ_0, t_0 tels que

$$a \cap (\varkappa \cup \tau) = \varkappa \ ,$$

$$s > w \xrightarrow{\varphi_{\alpha/\beta}} v > b \ ,$$

$$w > \tau \xrightarrow{\varphi_{\alpha/\beta}} \tau^{-1} \ , \quad v > \tau^{-1} > n \ ,$$

$$L^0_\beta \ni \xi_0 = n \cup t_0 \ , \quad \xi_0 \cap \tau^{-1} = n \ ,$$

$$d < t_0 < b \ , \quad \varkappa > a \cap w = m = w \cap \varkappa \ ,$$

$$\varphi_{\alpha/\beta}(m) = n \ .$$

Notons $\Xi = \{\xi \mid n < \xi \leq v \ , \ \exists\, t$ tel que $d < t < b \ , \ t < \xi\}$. L'ensemble Ξ contient ξ_0 ; soit ξ_1 l'élément minimum de Ξ, et notons t_1 un élément tel que $d < t_1 < b$, $t_1 < \xi_1$. On a

$$\overline{(a \cap w)^{(\alpha)}} \leqslant \overline{a^{(\alpha)}} \cap \overline{(\xi_1^{-1})^{(\alpha)}} \leqslant \overline{a^{(\alpha)}} \cap \overline{w^{(\alpha)}} = \overline{(a \cap w)^{(\alpha)}} ,$$

où $\xi_1^{-1} = \varphi_{p/\alpha}(\xi_1)$, donc

$$\overline{a^{(\alpha)}} \cap \overline{(\xi_1^{-1})^{(\alpha)}} = \overline{a^{(\alpha)}} \cap \overline{w^{(\alpha)}} ,$$

et il existe τ_1 tel que $\varkappa = a \cap (\tau_1 \cup \varkappa)$, $a \cap w < \tau_1 \leqslant \xi_1^{-1}$. Dans le cas où $\tau_1 = \xi_1^{-1}$, on trouve

$$\overline{\varkappa^{(\alpha)}} \leqslant \overline{a^{(\alpha)}} \cap \overline{(\varkappa^{(\alpha)}} \cup \overline{t_1^{(\beta)}}) = \overline{a^{(\alpha)}} \cap (\overline{\varkappa^{(\alpha)}} \cup \overline{(\xi_1^{-1})^{(\beta)}})$$

$$= \overline{a^{(\alpha)}} \cap (\overline{\varkappa^{(\alpha)}} \cup \overline{\tau_1^{(\beta)}}) = \overline{a^{(\alpha)}} \cap \overline{(\varkappa \cup \tau_1)^{(\alpha)}} = \overline{(a \cap (\varkappa \cup \tau_1))^{(\alpha)}} = \overline{\varkappa^{(\alpha)}} ,$$

par conséquent, $\overline{\varkappa^{(\alpha)}} = \overline{a^{(\alpha)}} \cap (\overline{\varkappa^{(\alpha)}} \cup \overline{t_1^{(\beta)}})$, et le théorème est valable.

ξ_1 étant l'élément minimun de Ξ , le cas $\tau_1 \neq \xi_1^{-1}$ implique $\tau^{-1} \cap t_1 = d$. Mais ceci entraîne qu'il existe $t_2 \leqslant t_1$ tel que $\tau^{-1} \cap (n \cup t_2) = n$. Posons $n \cup t_2 = \xi_2 > t_2$, donc $\xi_2 \in \Xi$, $\xi_2 < \xi_1$, ce qui est en contradiction avec le choix de ξ_1, et le cas $\tau_1 \neq \xi_1^{-1}$ n'est donc pas possible.

Le théorème est démontré.

Comme les extensions des treillis au sens exposé dans ce Séminaire par G. BOULAYE sont un cas particulier des amalgames, les théorèmes 4.1, 4.2, 4.4 représentent une généralisation d'une partie de ses résultats (Cf. [3]).

Dans notre précédent exposé [1], nous avons démontré que tout produit sous-direct d'une famille de treillis, satisfaisant à la condition de quotients premiers, vérifie la même condition (C_1), et que tout produit sous-direct, satisfaisant à la condition $(\hat{C})$ d'une famille de treillis sous-modulaires, est sous-modulaire. Nous allons démontrer qu'on ne peut pas supprimer la condition $(\hat{C})$. En utilisant ce résultat et un résultat de LYNDON (Cf. [8]), on en déduit que la différence entre la définition des treillis vérifiant la condition (C_1) et celle des treillis sous-modulaires est, malgré la ressemblance apparente des deux conditions, essentielle au point de vue de la logique mathématique. On peut exprimer la définition d'un treillis, vérifiant la condition de quotients premiers, à l'aide d'une formule spéciale de Horn, qui est close, mais une telle forme n'existe pas pour la définition des treillis sous-modulaires.

Introduisons d'abord la définition suivante :

4.6. Définition. - Soit L un treillis parfaitement sous-modulaire. On dit que le graphe G(L) est associé au treillis L si :

1° les sommets de G(L) sont les quotients premiers p/q , 2° les arcs sont les couples $(p/q\ ,\ r/s)$ tels que $p/q \; u \; r/s$.

4.7. Remarque. - D'après la définition d'un treillis parfaitement sous-modulaire, le graphe $G(L)$ est connexe (ici, et dans la suite, nous utilisons la terminologie de [2]).

Soit maintenant L_1 un treillis parfaitement sous-modulaire, satisfaisant aux conditions suivantes :

(α) L_1 vérifie $(\hat{C})$,

(β) L_1 est un treillis ayant au moins trois éléments,

(γ) il existe un sommet a/b de $G(L_1)$ dont le demi-degré extérieur est 0 et le demi-degré intérieur est 1, $d^+(a/b) = 0$, $d^-(a/b) = 1$ (Il existe donc un seul quotient premier que nous allons noter c/d tel que $a/b \; u \; c/d$).

Soit ensuite L_2 l'intervalle $[0\ ,\ 1]$ des nombres rationnels, et notons

$$u_n = \frac{n}{n+1}\ ,\quad n \in \underset{\sim}{N}\ .$$

Nous allons utiliser les treillis L_1 , L_2 pour construire un amalgame intéressant :

4.8. THÉORÈME. - Soit $\mathfrak{A}(L_1\ ,\ L_2) = L_1 : \varphi : L_2$, φ étant l'isomorphisme de $\{c\ ,\ d\}$ sur $\{0\ ,\ 1\}$. Alors $\mathfrak{A}(L_1\ ,\ L_2)$ est un treillis qui possède les propriétés suivantes :

(a) $\mathfrak{A}(L_1\ ,\ L_2)$ n'est pas sous-modulaire,

(b) $\varkappa_n$ étant la plus petite des congruences définies sur $\mathfrak{A}(L_1\ ,\ L_2)$ telles que

$$\overline{1^{(2)}} > \overline{u^{(2)}} \geqslant \overline{u_n^{(2)}} \implies \overline{u^{(2)}} \equiv \overline{u_n^{(2)}}\ ,$$

alors le treillis $\mathfrak{A}(L_1\ ,\ L_2)/\varkappa_n$ est parfaitement sous-modulaire,

(c) $\mathfrak{A}(L_1\ ,\ L_2)$ est isomorphe au produit sous-direct des treillis $\mathfrak{A}(L_1\ ,L_2)/\varkappa_n$

Rappelons deux résultats portant sur la "distance" de quotients premiers dans les treillis.

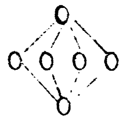
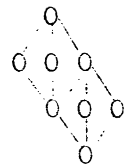
D'un résultat de KOŘÍNEK (Cf. [6], théorème 4.4, et [10], théorème 1.2), on peut déduire que si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sont des chaînes maximales de a à b des éléments d'un treillis sous-modulaire vérifiant $(\hat{C})$,

$$\mathfrak{a} :\ a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b\ ,$$
$$\mathfrak{b} :\ a = b_0 < b_1 < \dots < b_n = b\ ,$$

alors $\forall\, a_j/a_{j-1}$, $j = 1\ ,\ \dots\ ,\ n$, $\exists\, b_k/b_{k-1}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, tel que

$$\delta(a_j/a_{j-1}\ ,\ b_k/b_{k-1}) \leqslant 2\ .$$

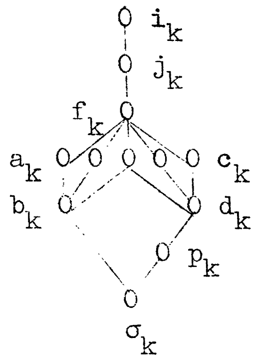
D'un résultat de GRÄTZER (Cf. [5], proposition 7), il résulte que si aucun sous-treillis d'un treillis modulaire fini et parfaitement sous-modulaire ne possède pas comme image homomorphe un des treillis définis par les diagrammes

M_6   M_8

alors $\forall\ a \succ b\ ,\ \forall\ c \succ d\ ,\ \delta(a/b\ ,\ c/d) \leqslant 3$.

Nous montrerons, par une construction utilisant les amalgames, que ces deux résultats ne sont pas valables pour les treillis parfaitement sous-modulaires.

En effet, il suffit de considérer les treillis T_k , $k = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n$, $n \geqslant 1$, n fixé, définis par le diagramme



où on suppose de plus que $i_0 = j_0$, $i_n = j_n$, $p_0 = \sigma_0$, $p_n = \sigma_n$.

Posons $L_0 = T_0$, et définissons par récurrence $L_{k+1} = L_k : \varphi_k : T_{k+1}$, où φ_k sont les isomorphismes définis par

$$\varphi_k(\bar{j}_k) = i_{k+1}\ ,\quad \varphi_k(\bar{d}_k) = b_{k+1}\ ,$$
$$\varphi_k(\bar{c}_k) = a_{k+1}\ ,\quad \varphi_k(\bar{p}_k) = \sigma_{k+1}\ .$$

Notons enfin L_n^* le treillis L_n ainsi construit.

4.9. THÉORÈME. - L'amalgame L_n^* est un treillis qui possède les propriétés suivantes :

(a) L_n^* est parfaitement sous-modulaire,

(b) $\forall\ \bar{p} \succ \bar{q}$ de la chaîne $\bar{\mathscr{C}}_0$: $\bar{i}_0 \succ \bar{f}_0 \succ \bar{a}_0 \succ \bar{b}_0 \succ \bar{\sigma}_0$, on a

$$\delta(\bar{p}/\bar{q}\ ,\ \bar{c}_n/\bar{d}_n) \geqslant 2n + 1\ .$$

COROLLAIRE. - Le treillis L_1^* est un treillis dans lequel l'image homomorphe de tout sous-treillis ne contient pas M_6 ou M_8 , et on a

$$\delta(\bar{i}_0/\bar{f}_0\ ,\ \bar{i}_1/\bar{f}_1) = 6\ .$$

De plus, L_1^* vérifie la condition duale de la condition (C_1), mais il n'est pas le treillis de sous-groupes sous-normaux d'un groupe ayant des séries de composition de longueurs finies.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERAN (Ladislav). - Treillis sous-modulaires, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 21e année, 1967/68, n° 13, 17 p.

[2] BERGE (Claude). - Théorie des graphes et ses applications. 2e édition. - Paris, Dunod, 1967 (Collection universitaire de Mathématiques, 2).

[3] BOULAYE (G.). - Notion d'extension dans les treillis, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 22e année, 1968/69, n° 2.

[4] DWINGER (P.) et YAQUB (F. M.). - Generalized free products of Boolean algebras with an amalgamated subalgebra, Koninkl. nederl. van Wet., Proc., Series A, t. 66, 1963 = Indag. Math., t. 25, 1963, p. 225-231.

[5] GRÄTZER (G.). - Equational classes of lattices, Duke math. J., t. 33, 1966, p. 613-622.

[6] KOŘÍNEK (Vladimír). - Lattices in which the theorem of Jordan-Hölder is generally true, Acad. tchèque Sc., Bull. intern., Cl. Sc. math. nat., t. 50, 1949, p. 307-324.

[7] KURATOWSKI (Casimir). - Topologie, vol. II, 3e édition. - Warszawa, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1961 (Polska Akademie Nauk, Monografie matematyczne, 21).

[8] LYNDON (Roger C.). - Properties preserved in subdirect products, Pacific J. of Math., t. 9, 1959, p. 155-164.

[9] NEUMANN (B. H.). - An essay on free products of groups with amalgamations, Phil. Trans. Royal Soc. London, t. 246, 1954, p. 503-554.

[10] SCHREIER (O.). - Die Untergruppen der freien Gruppen, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg, t. 5, 1927, p. 161-183.

[11] TAMASCHKE (Olaf). - Die Kongruenzrelationen im Verband des zugänglichen Subnormalteiler, Math. Z., t. 75, 1961, p. 115-126.

(Texte reçu le 16 novembre 1970)

Ladislav BERAN
Ass. Fac. Sc. d'Orsay
91 - ORSAY