Nicolas Farès

Chaînes dans l'ensemble des idempotents d'un anneau

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, n° 2 (1968-1969), exp. n° 17, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_2_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
22e année, 1968/69, n° 17, 11 p.

5 mai 1969

CHAÎNES DANS L'ENSEMBLE DES IDEMPOTENTS D'UN ANNEAU

par Nicolas FARÈS

Introduction. - En juin 1968, dans une conférence en Tchécoslovaquie, P. DUBREIL a parlé de la structure de l'ensemble ordonné F des idempotents d'un anneau A [3]. L'objet du présent travail est l'étude des chaînes dans F (§ II). Les résultats du premier paragraphe, portant sur les idempotents et les $\mathcal{D}$-classes, sont donnés dans le cas plus général d'un demi-groupe. Le troisième paragraphe est consacré à un théorème analogue au premier théorème d'homomorphisme pour l'ensemble des idempotents de l'anneau des endomorphismes d'un H-groupe abélien.

I. Idempotents et $\mathcal{D}$-classes dans un demi-groupe.

Soient D un demi-groupe multiplicatif, et F l'ensemble des idempotents de D , ordonné par l'ordre de Rees, noté $<$ [12]. Les lettres $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ désigneront les équivalences de Green [1] définies dans D . Quand D possède un zéro, cet élément sera noté 0 .

Définition 1. - Soient g et f deux idempotents de D , tels que $g \geqslant f$. On appelle chaîne maximale entre g et f toute chaîne maximale C d'idempotents compris entre g et f . Quand C est finie, son nombre d'éléments distincts de f est sa longueur. Une chaîne maximale, associée à un idempotent e de D , est une chaîne maximale d'idempotents inférieurs à e .

Définition 2. - On dit que D vérifie la condition f si toutes les suites stictement décroissantes d'idempotents de D sont de longueurs inférieures ou égales à un entier donné. C'est le cas, par exemple, où D est fini, ou est le demi-groupe des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, etc.

Définition 3. - Si toutes les chaînes maximales associées à un idempotent f de D sont de longueurs inférieures à un entier n , il existe une chaîne maximale associée à f (au moins une) et de longueur maximum p . L'entier p est appelé portée de f .

---

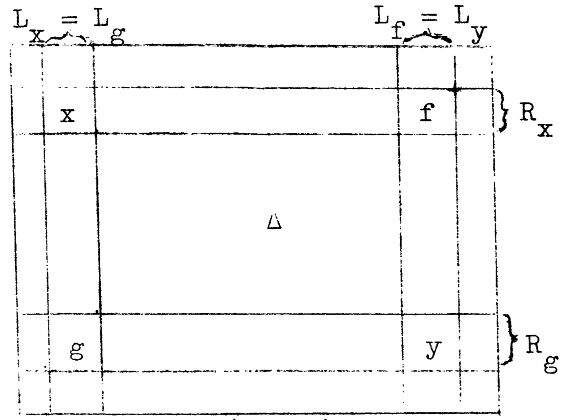
(1) Deux éléments de D sont $\mathcal{L}$-équivalents (resp. $\mathcal{R}$-équivalents) s'ils engendrent le même idéal à gauche (resp. à droite) de D ; $\mathcal{D}$ est l'équivalence borne supérieure de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{R}$. Comme $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ commutent (ou sont associables [4]), on a : $\mathcal{D} = \mathcal{L} \cdot \mathcal{R} = \mathcal{R} \cdot \mathcal{L}$ ([2], ch. 2, § 1).

THÉORÈME 1. - *Soient g et f deux idempotents de D, $\mathcal{D}$-équivalents. Il y a un isomorphisme φ (d'ensembles ordonnés) entre l'ensemble E_f des idempotents de D inférieurs à f et l'ensemble E_g des idempotents de D inférieurs à g. L'image par φ de tout idempotent f_1 de E_f est $\mathcal{D}$-équivalente à f_1.*

Démonstration (Cf. [6], p. 12). - Pour tout élément a de D, notons L_a (resp. R_a) la $\mathcal{L}$-classe (resp. la $\mathcal{R}$-classe) de a.

Soit Δ la $\mathcal{D}$-classe de f et de g (fig. 1). L'ensemble $R_f \cap L_g$ est non vide. Soit x un élément de $R_f \cap L_g$. x admet un inverse généralisé y, unique dans $R_g \cap L_f$, et on a les relations suivantes (Cf. [2], ch. 2, § 3, th. 18) :

$$x = fx = xg ,$$
$$y = yf = gy ,$$
$$f = xy ,$$
$$g = yx .$$



(Fig. 1)

L'isomorphisme φ en question est la correspondance définie sur E_f de la façon suivante :

$$\varphi : \ f_1 \longmapsto y f_1 x \qquad (f_1 \in E_f) .$$

Le théorème précédent a pour conséquences directes les résultats suivants (Cf. [6] p. 14-16).

COROLLAIRE 1. - *Si f est un idempotent primitif, tout idempotent de la $\mathcal{D}$-classe de f est primitif.*

COROLLAIRE 2. - *Dans un demi-groupe régulier (au sens de Von Neumann), si un élément engendre un idéal à gauche minimal, il engendre un idéal à droite minimal, et inversement.*

COROLLAIRE 3. - *Si D vérifie la condition f, deux idempotents, de la même $\mathcal{D}$-classe, ont la même portée.*

THÉORÈME 2. - *Si D vérifie la condition f, deux idempotents comparables distincts n'appartiennent jamais à la même $\mathcal{D}$-classe.*

COROLLAIRE. - *Si D est un demi-groupe unitaire vérifiant la condition f, tout élément de D, inversible d'un côté, est inversible.*

II. Chaînes maximales associées à un idempotent dans un anneau.

1. Préliminaire.

Les résultats précédents sont vrais pour un demi-groupe avec ou sans zéro, donc pour un anneau. Pourtant, l'addition donne dans le cas du demi-groupe multiplicatif d'un anneau des résultats qui ne sont pas vrais en général.

L'étude des chaînes maximales entre deux idempotents f et g d'un anneau ($f \leq g$) est ramenée à celle des chaînes maximales associées à un idempotent, et ceci à l'aide du lemme suivant :

LEMME 1. - Soient f et g deux idempotents d'un anneau A, tels que $f \geq g$. L'ensemble F_f^g des idempotents de A, compris entre f et g, est isomorphe en tant qu'ensemble ordonné à l'ensemble F_{f-g} des idempotents de A inférieurs à $f - g$.

Démonstration (Cf. [6], p. 19). - L'isomorphisme en question est la correspondance φ définie sur F_f^g de la façon suivante : $\varphi(x) = x - g$, $\forall\, x \in F_f^g$. Son inverse est naturellement défini comme suit : $\varphi^{-1}(y) = y + g$, $\forall\, y \in F_{f-g}$.

La notion de chaîne maximale de longueur n, associée à un idempotent f d'un anneau, coïncide avec celle de la décomposition de f en somme de n idempotents primitifs deux à deux orthogonaux (Cf. [6], th. 3, p. 24).

La démonstration de ce théorème se fait à l'aide des deux lemmes suivants :

LEMME 2. - Si i et j sont deux idempotents d'un anneau A, tels que i couvre j, alors $i - j$ est un idempotent primitif.

LEMME 3. - Si g et f sont deux idempotents orthogonaux, et si f est primitif, alors $g + f$ est un idempotent qui couvre g.

A une chaîne maximale

$$f = f_1 > f_2 > \dots > f_n > 0 \,, \tag{1}$$

correspond la décomposition suivante de f en somme d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux :

$$f = (f_1 - f_2) + (f_2 - f_3) + \dots + f_n \,. \tag{1'}$$

Rappelons enfin qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un idempotent f soit somme de n idempotents promitifs, deux à deux orthogonaux, est que l'idéal Af (resp. fA) soit ℓ-indécomposable (resp. r-indécomposable) (2) ([3], p. 4).

---

(2) Un idéal à gauche L de A est ℓ-indécomposable s'il n'est pas somme directe non triviale d'idéaux à gauche de A. Définition analogue pour les idéaux à droite r-indécomposables.

2. Théorème de Jordan-Hölder dans l'ensemble des idempotents de certains anneaux (voir le schéma à la fin du § II).

Les résultats précédents (§ II, n° 1) permettent d'avoir un théorème analogue à celui de Jordan-Hölder dans l'ensemble des idempotents de certains anneaux.

(a) Anneaux dans lesquels tout idempotent est central (3).

THÉORÈME 3. - Soit A un anneau dans lequel tout idempotent est central, et soit e un idempotent de A. S'il existe une chaîne maximale de longueur n, associée à e, toutes les chaînes maximales, associées à e, sont finies et de longueur n.

Démonstration.

Définition 1. - Un anneau est dit fragmenté, de longueur n, s'il est somme directe de n idéaux bilatères ℓr-indécomposables (4) (P. DUBREIL [3], p. 6).

Cette définition est équivalente à la suivante :

Définition 1'. - L'élément unité u de A est somme de n idempotents primitifs deux à deux hyperorthogonaux (5).

L'ensemble des idempotents d'un anneau fragmenté de longueur n est un treillis de Boole atomique ([13], § 29) ayant 2^n éléments ([13], p. 6).

On démontre que l'anneau Ae (théorème 3) est fragmenté au sens de la définition 1.

(b) Anneaux réguliers. - Dans un anneau régulier, un idempotent primitif engendre un idéal à gauche minimal. A une chaîne maximale, associée à un idempotent f de A, correspond donc une suite de composition du A-module Af ([5], ch. 8, § 3). L'application du théorème de Jordan-Hölder, pour les A-modules à gauche, donne le résultat suivant.

THÉORÈME 4. - Dans un anneau régulier, deux chaînes maximales finies, associées à un idempotent, sont de même longueur.

Un anneau artinien à gauche et semi-simple ([10], ch. 3) étant régulier ([1], § 3, n° 3, conséquence du théorème 1), on a un résultat analogue au théorème 4 pour les

---

(3) Exemples : anneaux réduits, commutatifs, etc.

(4) ℓ-indécomposables et r-indécomposables.

(5) Deux idempotents f et g de A sont dits hyperorthogonaux si $fAg = gAf = (0)$ ([3], p. 5).

anneaux artiniens à gauche et semi-simples.

(c) *Anneaux finis. Anneaux dont l'ensemble des idéaux d'un côté vérifie les deux conditions de chaînes* [6]. - Supposons que l'ensemble des idéaux à gauche de A vérifie les deux conditions de chaînes. A deux chaînes maximales de longueurs n et m, associées à un idempotent e de A, correspond (§ II, n° 1) deux décompositions de Ae en somme de n et de m idéaux à gauche ℓ-indécomposables (respectivement). L'application du *théorème de Krull-Schmidt* [7] pour les groupes avec opérateurs donne $n = m$.

THÉORÈME 5. - *Si l'ensemble des idéaux d'un côté d'un anneau* A *vérifie les deux conditions de chaînes, toutes les chaînes maximales, associées à un idempotent* e *de* A *(qui sont nécessairement finies), sont de même longueur.*

(d) *d-anneaux vérifiant la condition* f. - Dans le cours de P. DUBREIL à la Faculté des Sciences de Paris, 1966/67 (non publié), M. CRESTEY a démontré le théorème suivant.

PROPOSITION 1. - *Deux idempotents* e *et* f, *d'un demi-groupe multiplicatif* D, *sont* $\mathcal{D}$*-équivalents si, et seulement si, les idéaux à gauche* De *et* Df *sont p-isomorphes.*

Définition. - On dit que deux idéaux L et L' d'un demi-groupe D sont *p-isomorphes* s'il existe un isomorphisme φ de demi-groupe de L sur L' tel que :

$$\forall\, x \in D \;, \quad \forall\, \ell \in L \;, \quad \varphi(x\ell) = x\varphi(\ell) \;.$$

On démontre que, dans le cas d'un anneau A, *dire que* Aa *et* Ab *sont p-isomorphes* $(a \in A \;,\; b \in A)$ *est équivalent à dire qu'ils sont isomorphes en tant que A-modules à gauche.* Un idempotent primitif de A étant un idempotent e, tel que Ae soit ℓ-indécomposable, la proposition précédente admet comme conséquence que, dans un anneau, tout idempotent de la $\mathcal{D}$-classe d'un idempotent primitif est lui-même primitif.

Un cas particulier important est celui où, dans l'anneau A, tous les idempotents primitifs sont dans la même $\mathcal{D}$-classe. C'est le cas, par exemple, de l'anneau

---

(6) Condition de chaîne ascendante et de chaîne descendante ([10], ch. 3, § 1).

(7) ([9], ch. 5, § 13). Soit G un Δ-groupe satisfaisant aux deux conditions de chaînes pour les Δ-sous-groupes distingués, et soient :

$$G = G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 \otimes \dots \otimes G_m \quad \text{et} \quad G = A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes \dots \otimes A_n$$

deux décompositions directes de G en Δ-sous-groupes distingués indécomposables. On a alors $m = n$, et avec une indexation convenable $G_i \cong A_i$, avec

$$G = A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_k \otimes G_{k+1} \otimes G_{k+2} \otimes \dots \otimes G_m \qquad (k = 1 \;,\; 2 \;,\; \dots \;,\; m) \;.$$

des endomorphismes d'un espace vectoriel. Appelons d-anneaux ce type d'anneaux.

THÉORÈME 6. - Dans un d-anneau, deux idempotents e et f, auxquels sont associées deux chaînes maximales finies de même longueur, sont Ω-équivalents.

Démonstration. - Soient :

$$1^\circ \quad Ae = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \ldots \oplus Ae_n \,,$$
$$2^\circ \quad Af = Af_1 \oplus Af_2 \oplus \ldots \oplus Af_n \,,$$

les deux décompositions directes de Ae et de Af en somme d'idéaux à gauche ℓ-indécomposables relativement aux chaînes maximales associées à e et f, et ayant la même longueur n. A étant un d-anneau, pour tout indice i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on a $Ae_i \simeq Af_i$. Donc Ae et Af sont canoniquement isomorphes.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 7. - Dans un d-anneau vérifiant la condition f toutes les chaînes maximales associées à un idempotent f sont de même longueur.

Démonstration. - Soient deux décompositions directes de Af en somme de m et de n idéaux à gauche, ℓ-indécomposables respectivement :

$$1^\circ \quad Af = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \ldots \oplus Ae_m \,,$$
$$2^\circ \quad Af = Af_1 \oplus Af_2 \oplus \ldots \oplus Af_n \,.$$

Les e_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ (resp. les f_j, $j = 1, 2, \ldots, n$) étant des idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. Supposons que $m < n$.

D'après le théorème précédent, Af est isomorphe à $Af_1 \oplus \ldots \oplus Af_m$, i. e. à $A(f_1 + f_2 + \ldots + f_m)$. Ainsi les idempotents f, et $g = f_1 + \ldots + f_m$, sont dans la même Ω-classe. Or $g < f$, puisque $m < n$. Ce qui est impossible, car l'anneau A vérifie la condition f.

On démontre qu'un d-anneau, vérifiant la condition f, qui est unitaire et régulier, est isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps qui n'est pas nécessairement commutatif (Cf. [6], ch. 3).

Notation. - On dit qu'un anneau A vérifie la condition i si toutes les chaînes maximales finies entre deux idempotents quelconques e et f de A $(e \leqslant f)$ sont de même longueur.

A intègre

A est réduit

A est commutatif

A est tel que $x^{n(x)} = x$ [11]

tout idempotent de A est central

S'il existe une chaîne maximale finie, de longueur n , entre deux idempotents quelconques e et f de A ($e < f$) , toutes les chaînes maximales entre e et f sont finies, et de longueur n . L'ensemble des idempotents de A compris entre e et f est un treillis de Boole ayant 2^n éléments.

A vérifie la condition ℓ

A est régulier

A est un d-anneau vérifiant la condition f

A est artinien à gauche et semi-simple

L'ensemble des idéaux d'un côté de A vérifie les deux conditions de chaînes

A est fini

III. Appendice

Théorème d'homomorphisme pour l'ensemble des idempotents de l'anneau des endomorphismes d'un H-groupe abélien.

Dans la suite, M désigne un H-groupe abélien, et A l'anneau des endomorphismes de M . Soient f un idempotent de A , $\bar{M}$ le groupe quotient $M/f(M)$, et $\bar{A}$ l'anneau des endomorphismes de $\bar{M}$. L'objet de ce paragraphe est de construire un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des idempotents de A , contenant f (plus grands que f), et l'ensemble des idempotents de l'anneau $\bar{A}$.

1. Préliminaire.

Rappelons d'abord quelques résultats, faciles à démontrer.

LEMME 4. - Soient f et h deux éléments de A .
1° La relation $f = gh$ $(g \in A)$ entraîne $N_h \subseteq N_f$ (8),
2° Si h est un idempotent, la relation $N_h \subseteq N_f$ entraîne $f = fh$.

(8) Pour tout élément f de A , on note par N_f la noyau de f , et par $f(M)$ l'image de M par f .

COROLLAIRE. - f et h étant deux éléments de A, on a :

1° $f \mathcal{L} h \Longrightarrow N_f = N_h$ [9],

2° Si f et h sont des idempotents, $f \mathcal{L} h \Longleftrightarrow N_f = N_h$.

LEMME 5. - Soient f et h deux éléments de A, on a :

1° La relation $f = hg$ $(g \in A)$ entraîne $f(M) \subseteq h(M)$,

2° Si h est un idempotent, la relation $f(M) \subseteq h(M)$ entraîne $f = Mf$.

COROLLAIRE. - Dans A, on a les relations :

1° $f \mathcal{R} f' \Longrightarrow f(M) = f'(M)$,

2° Si f et f' sont des idempotents, $f \mathcal{R} f' \Longleftrightarrow f(M) = f'(M)$.

Les lemmes 4 et 5 permettent d'énoncer les résultats suivants.

PROPOSITION 1. - f et h étant deux idempotents de A, il y a équivalence entre les deux relations suivantes :

1° $f \leqslant h$,

2° $f(M) \subseteq h(M)$ et $N_h \subseteq N_f$.

PROPOSITION 2. - Soit f un idempotent de A. On a la décomposition directe

(2) $$M = f(M) \oplus N_f .$$

Notons que, pour tout élément y de $f(M)$, on a $y = f(y)$, et que, pour tout élément x de M, $x - f(x)$ appartient à N_f. Un élément quelconque m de M s'écrit relativement à (2) sous la forme

$$m = f(m) + [m - f(m)] .$$

2. Théorème d'homomorphisme.

LEMME 6. - Si f et g sont des idempotents de A tels que $g \geqslant f$, on a :

(3) $$M = f(M) \oplus (g - f)(M) \oplus N_g$$

avec :

(a) $(g - f)(M) \oplus N_g = N_f$,

(b) $N_f \cap g(M) = (g - f)(M)$.

Démonstration. - f et $g - f$ étant deux idempotents orthogonaux dont la somme est g, on a $g(M) = f(M) + (g - f)(M)$, d'où la relation (3). La relation $gf = fg = f$ entraîne la relation (b). La relation (a) découle du fait que, pour tout élément n de N_f, on a $(g - f)(n) = g(n)$.

---

[9] L'anneau A étant unitaire, les idéaux à gauche (resp. à droite) principaux de l'anneau A sont les idéaux à gauche (resp. à droite) principaux du demi-groupe multiplicatif A.

On a de plus la relation :

(c) $N_{g-f} = f(M) + N_g$.

LEMME 7. - Soient f et g deux idempotents de A tels que $f \leqslant g$, et soit $\bar{M} = M/f(M)$. La correspondance $\bar{g} : \bar{M} \to \bar{M}$, définie par $\bar{g}(\bar{x}) = \overline{g(x)}$, est un endomorphisme idempotent du H-groupe $\bar{M}$ (Pour tout élément y de M , on pose $\bar{y} = \varphi(y)$, φ étant l'homomorphisme canonique de M sur $\bar{M}$).

LEMME 8. - f étant un idempotent de A , pour tout idempotent $\bar{g}$ de l'anneau $\bar{A}$ des endomorphismes de $\bar{M} = M/f(M)$, il existe un idempotent g de A , tel que

$$\overline{g(x)} = \bar{g}(\bar{x}) \ , \quad \forall\, x \in M \ .$$

Démonstration. - φ étant l'homomorphisme canonique de M sur $\bar{M}$, si on pose

$$L = \varphi^{-1}(N_{\bar{g}}) \ , \quad H = \varphi^{-1}[\bar{g}(\bar{M})] \ ,$$

la relation

$$\bar{g}(\bar{M}) \oplus N_{\bar{g}} = \bar{M} \tag{4}$$

donne :

$$L \cap H = f(M) \quad \text{et} \quad M = L + H \ . \tag{5}$$

Soient :

(6) $N = L \cap N_f$,

et

(7) $V = H \cap N_f$.

On démontre successivement les relations :

(8) $L = f(M) \oplus N$,

(9) $M = H \oplus N$,

(10) $H = f(M) \oplus V$,

(11) $N_f = V \oplus N$,

(12) $M = f(M) \oplus V \oplus N$.

Soit maintenant g la projection de M sur $H = f(M) + V$ annulant N . Les relations $N_g = N \subseteq N_f$ et $g(M) = H \supseteq f(M)$ montrent que $f \leqslant g$.

Pour tout élément x de M , qui s'écrit $x = f(x) + v + n$, $v \in V$, $n \in N$, on a $g(x) = f(x) + v$, donc $\overline{g(x)} = \bar{v}$. D'autre part, la relation $\bar{x} = \bar{v} + \bar{n}$, où $\bar{n} \in \bar{N} \subseteq \bar{L} = N_{\bar{g}}$ (donc $\bar{g}(\bar{n}) = \bar{0}$) et $\bar{v} \in \bar{H} = \bar{g}(\bar{M})$ (donc $\bar{v} = \bar{g}(\bar{v})$), entraîne $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{v} = \overline{g(x)}$.

Remarquons enfin que $V = (g - f)(M)$, et la relation (12) s'écrit sous la forme (Cf. (1), lemme 1) :

(12') $M = f(M) \oplus (g - f)(M) \oplus N_g$.

THÉORÈME 8. - Soit f un idempotent de A. Il existe un isomorphisme (d'ensembles ordonnés) entre l'ensemble F_f des idempotents de A, contenant f, et l'ensemble $\bar{F}$ des idempotents de l'anneau $\bar{A}$ des endomorphismes de $\bar{M} = M/f(M)$. De plus, ω étant cet isomorphisme, on a les relations suivantes :

(a) $\quad g \mathcal{L} g' \iff \omega(g) \mathcal{L} \omega(g')$

et $\qquad (g \in F_f, \quad g' \in F_f)$.

(b) $\quad g \mathcal{R} g' \iff \omega(g) \mathcal{R} \omega(g')$

Démonstration. - Soit, avec les mêmes notations que dans les lemmes 7 et 8, la correspondance de F_f dans $\bar{F}$, définie par $\omega(g) = \bar{g}$, $\forall g \in F_f$, avec

$$\bar{g}(\bar{x}) = \overline{g(x)}, \quad \forall x \in M .$$

1° ω est bien une application surjective d'après les lemmes 7 et 8.

2° ω est injective. Soient en effet g et g' deux éléments de F_f tels que $\bar{g} = \bar{g}'$. Pour tout x de M, on a $\overline{g(x)} = \overline{g'(x)}$. D'après le lemme 6, M s'écrit

$$M = f(M) \oplus V \oplus N_g = f(M) \oplus V' \oplus N_{g'}, \quad \text{avec } V \oplus N_g = V' \oplus N_{g'} = N_f .$$

Un élément x de M s'écrit donc :

$$x = f(x) + v + n = f(x) + v' + n', \quad v \in V, \quad n \in N_g, \quad v' \in V', \quad n' \in N_{g'} ;$$

et l'on a :

$$\bar{x} = \bar{v} + \bar{n} = \bar{v}' + \bar{n}' ; \quad \bar{g}(\bar{x}) = \bar{v}, \quad \bar{g}'(\bar{x}) = \bar{v}' .$$

Donc $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{g}'(\bar{x}) \iff \bar{v} = \bar{v}'$. Or la relation $\bar{v} = \bar{v}'$ est équivalente à la relation $v - v' \in f(M)$, donc à la relation $v - v' = f(v - v')$. Or $v - v'$ appartient à N_f, donc $f(v - v') = 0$, et finalement la relation $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{g}'(\bar{x})$ est équivalente à la relation $v = v'$, qui est à son tour équivalente à la relation $g(x) = g'(x)$. On a donc

$$\bar{g} = \bar{g}' \iff g = g' .$$

C. Q. F. D.

3° ω est un isomorphisme. Ceci se démontre facilement vu le résultat du n° 1, prop. 1.

4° Les relation (a) et (b) de l'énonce sont vraies d'après les corollaires des lemmes 4 et 5 du n° 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre. Chap. 8 : Modules et anneaux semi-simples - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Bourbaki, 23).

[2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[3] DUBREIL (Paul). - Etude du demi-groupe multiplicatif de certains anneaux, Symposium on algebra and numbertheory [1968. Smolenice (Tchécoslovaquie)] (à paraître).

[4] DUBREIL (P.) et DUBREIL-JACOTIN (M.-L.). - Théorie algébrique des relations d'équivalence, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 18, 1939, p. 63-95.

[5] DUBREIL (P.) et DUBREIL-JACOTIN (M.-L.). - Leçons d'algèbre moderne. 2e édition. - Paris, Dunod, 1964 (Collection universitaire de Mathématiques, 6).

[6] FARÈS (Nicolas). - Idempotents et classes de Green du demi-groupe multiplicatif d'un anneau (Thèse 3e cycle, Math., Paris, 1969).

[7] FARÈS (Nicolas). - Idempotents et $\mathcal{D}$-classes dans les demi-groupes et les anneaux, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, Série A, p. 341-343.

[8] FARÈS (Nicolas). - Chaînes dans l'ensemble des idempotents d'un anneau, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, Série A, p. 377-379.

[9] JACOBSON (Nathan). - Lectures in the abstract algebra. Vol. 1. - New-York, D. Van Nostrand Company, 1951 (University Series in higher Mathematics).

[10] JACOBSON (Nathan). - Structure of rings. 2nd edition. - Providence, American mathematical Society, 1964 (Amer. math. Soc. Colloq. Publ., 37).

[11] LESIEUR (Léonce). - Sur les anneaux tels que $x^n = x$, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 19e année, 1965/66, n° 13, 8p.

[12] REES (D.). - On semigroups, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 36, 1940, p. 387-400,

[13] RUTHERFORD (D. E.). - Introduction of lattice theory. - Edinburgh, Oliver and Boyd, 1965 (University mathematical Monographs).

(Texte reçu le 16 novembre 1969)