Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Yves Matras

Sur deux équations fonctionnelles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, nº 2 (1968-1969), exp. nº 14,
p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_2_A2_0>

24 mars 1969

SUR DEUX ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

par Yves MATRAS

0. Introduction.

Ce travail est composé de cinq parties.

Dans la première, on donne la solution générale de l'équation fonctionnelle

(1) $$f(x + yf(x)) = f(x)\ f(y) \quad .$$

La méthode d'obtention de cette solution est celle proposée par P. JAVOR.

Une autre méthode, dont nous ne parlerons pas, a été mise au point, en même temps, et indépendamment, par S. WOLODZKO [6].

Les quatre parties suivantes sont consacrées à l'équation fonctionnelle

(2) $$f[x.f(y)] = f(x).f(y) \quad ,$$

où f est une application du groupoïde $(\Gamma\ ,\ .)$ dans lui-même.

On caractérisera les solutions de l'équation, lorsque :

1° Γ est un groupe avec zéro,

2° Γ est un groupe,

3° Γ est un groupe gauche [1],

4° Γ est un demi-treillis.

Dans [4], DAROCZY caractérise les solutions différentiables, les solutions continues et les solutions bornées, lorsque Γ est le groupoïde multiplicatif des réels. Il prouve en outre l'existence d'une solution non mesurable.

Dans [2], Γ est un espace de fonctions à la structure compliquée et, dans son étude, Garrett BIRKHOFF impose à la fonction f un certain nombre de conditions supplémentaires.

Notations. - Les notations particulières à chaque paragraphe seront définies dans le paragraphe lui-même. Les notations suivantes seront utilisées systématiquement :

---

[1] Nous appellerons groupe gauche, la structure algébrique que CLIFFORD et PRESTON étudient dans [3] sous le nom de left group.

X désignant un ensemble quelconque, $A(X)$ représentera l'ensemble des applications de X dans lui-même, et la composition des applications sera notée $\circ$.

L'ensemble des solutions de l'équation (2) sur Γ sera noté $S(\Gamma)$.

1. Solution algébrique générale de l'équation (1).

Nous considérons donc l'équation fonctionnelle :

$$f(x + yf(x)) = f(x)\, f(y) \quad , \tag{1}$$

où f est une application d'un espace vectoriel E dans son corps (commutatif) de scalaires F.

La loi de groupe de E sera notée additivement.

Les lois de corps de F seront notées additivement et multiplicativement.

LEMME. - Supposons que f soit solution de (1). Alors

$$f(0) \neq 1 \quad \text{entraîne} \quad f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \text{ de } E \ .$$

En effet, $f(x + 0f(x)) = f(x)\, f(0) = f(x)$.

THÉORÈME. - f est solution de (1), non identiquement nulle, si, et seulement si, il existe :

- Un sous-groupe N de E,
- Un sous-groupe multiplicatif M de $F \setminus \{0\}$,
- Une fonction w de M dans E,

vérifiant les conditions :

(a) $NM = N$,
(b) Pour tout m_1 de M et tout m_2 de M, $w(m_1 m_2) - w(m_1) - w(m_2)m_1 \in N$,
(c) $w(m) \in N \implies m = 1$.

Alors :

$$f(x) = m \ , \qquad \text{si} \quad x \in N + w(m) \ ,$$

$$f(x) = 0 \ , \qquad \text{sinon} \ .$$

Nous allons d'abord montrer que les conditions sont suffisantes, et en premier lieu vérifier que les ensembles de la forme $N + w(m)$ sont deux à deux disjoints ou confondus.

Soit, en effet, $n_1 + w(m_1) = n_2 + w(m_2)$, et soit $n + w(m_1) \in N + w(m_1)$. Alors

$$n + w(m_1) = n_1 + (n - n_1) + w(m_1) = n - n_1 + n_2 + w(m_2) \ .$$

La fonction f est donc parfaitement définie.

Montrons qu'elle vérifie l'équation. Trois cas sont à distinguer :

1° $f(x) = 0$. Alors

$$f(x + y0) = f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x)\, f(y) = 0 \quad .$$

2° $f(x) \neq 0$ et $f(y) = 0$. Dans ce cas, $f(x)\, f(y) = 0$. Supposons que $f(x + yf(x)) \neq 0$. Alors

$$x + yf(x) = n + w(m) \quad \text{et} \quad f(x + yf(x)) = m \quad .$$

D'autre part, $x = n_1 + w(m_1)$ et $f(x) = m_1$. Soit $m_2 = m_1^{-1}\, m$,

$$w(m) = n' + w(m_1) + w(m_2)m_1 \quad .$$

Donc

$$n + w(m) = n_1 + w(m_1) + ym_1 = n + n' + w(m_1) + w(m_2)m_1 \quad ,$$

et

$$ym_1 = n + n' - n_1 + w(m_2)m_1 \quad .$$

Mais par (a), $n + n' + n_1 = n''\, m' = n''\, m''\, m_1$, d'où $y = n''\, m'' + w(m_2)$. Or $n''\, m'' \in N$ par (a), donc $f(y) = m_2$, ce qui n'est pas, et

$$f(x + yf(x)) = 0 = f(x)\, f(y) \quad .$$

3° $f(x) \neq 0$ et $f(y) \neq 0$. Alors

$$x = n_1 + w(m_1) \quad \text{et} \quad f(x) = m_1 \quad ,$$

$$y = n_2 + w(m_2) \quad \text{et} \quad f(y) = m_2 \quad .$$

D'où $x + yf(x) = n_1 + w(m_1) + n_2\, m_1 + w(m_2)m_1$. Mais

$$n_2\, m_1 \in N \quad \text{et} \quad w(m_1\, m_2) \in N + w(m_1) + w(m_2)m_1 \quad .$$

Donc

$$f(x + yf(x)) = m_1\, m_2 = f(x)\, f(y) \quad .$$

Montrons maintenant que les <u>conditions sont nécessaires</u>. Soit donc f une solution de (1), non identiquement nulle. Considérons la loi de composition interne $\star$ définie sur E par $x \star y = x + yf(x)$. On a

$$(x \star y) \star z = x + yf(x) + zf(x + yf(x)) \quad ,$$

$$x \star (y \star z) = x + yf(x) + zf(y)\, f(x) \quad .$$

On voit donc que $\star$ est une loi associative. Adoptons alors les notations suivantes :

$$N = f^{-1}(1) \;; \qquad S = f^{-1}(0) \;; \qquad G = E \setminus S \;; \qquad f(G) = M \quad .$$

Si x et y sont dans G, $f(x) \neq 0$ et $f(y) \neq 0$, et donc $f(x \star y) \neq 0$. D'autre part, $0 \in G$ et si $x \in G$, $x \star 0 = x + 0f(x) = x$. Enfin, si $x \in G$, soit $y = (-x)(f(x))^{-1}$ $(f(x) \neq 0)$. On a

$$x \star y = x - x(f(x))^{-1} f(x) = 0 \quad .$$

Mais $f(0) = 1 = f(x \star y) = f(x)\, f(y)$. Donc $y \in G$, et G est un groupe pour la loi $\star$ (on le notera $(G , \star)$).

Si x et y sont dans N, il est immédiat que $x \star y = x + y$. De plus $0 \in N$. Enfin, si $x \in N$, $(-x)(f(x))^{-1} = -x$. Donc N est un sous-groupe additif de E. N est aussi, par définition, un sous-groupe distingué de $(G , \star)$, et M est un sous-groupe multiplicatif de $F \setminus \{0\}$.

Nous avons alors immédiatement,

$$\text{pour tout } g \text{ de } G , \qquad N \star g = g \star N \quad .$$

Mais $N \star g = N + g$. Donc $N + g = g + Nf(g)$. Par conséquent, $N = NM$.

Considérons alors une application w de M dans G telle que $f \circ w$ soit l'identité de M. Les ensembles $N + w(m)$ ne sont autres que les classes modulo N dans G et, si $x \in N + w(m)$, on a bien

$$f(x) = f(w(m)) = m \quad .$$

Soient alors m_1 et m_2 dans M ; posons :

$$g_1 = w(m_1) \;; \qquad g_2 = w(m_2) \;; \qquad g_3 = w(m_1\, m_2) \quad .$$

Alors $f(g_1) = m_1$; $f(g_2) = m_2$; $f(g_3) = m_1\, m_2$. D'où

$$m_1\, m_2 = f(g_1)\, f(g_2) = f(g_1 + g_2\, f(g_1)) = f(g_1 + m_1\, g_2) = f(g_3) \quad .$$

Par conséquent,

$$g_3 \star (-(g_1 + m_1\, g_2))(f(g_1 + m_1\, g_2))^{-1} \in N \quad ,$$

c'est-à-dire $g_3 - g_1 - m_1\, g_2 \in N$ et $w(m_1\, m_2) - w(m_1) - m_1\, w(m_2) \in N$.

Enfin, si $w(m) \in N$, alors $m = f(w(m)) = 1$.

2. Solution générale de l'équation (2) lorsque Γ est un groupe avec zéro.

2.1. Caractérisation des solutions. – Soit $(\overline{G}, .)$ un groupe avec zéro, $(G, .)$ étant le groupe

$$\overline{G} = G \cup \{0\} \quad .$$

Si a et b sont des éléments de $\overline{G}$, nous noterons ab au lieu de $a.b$. L'élément neutre de $(G, .)$ sera noté e, et l'inverse d'un élément a de $(G, .)$ sera noté a^{-1}. La fonction prenant partout la valeur e sera désignée par E.

LEMME 2.1.

(i) E appartient à $S(\overline{G})$;
(ii) Si $f \in S(\overline{G})$ et $f(0) \neq 0$, alors $f = E$.

(i) est évident. Montrons (ii) : pour tout élément y de $\overline{G}$, nous avons

$$f(0) = f[0f(y)] = f(0)\ f(y) \quad ,$$

et donc $f(y) = e$.

DÉFINITION 2.1. – G étant un groupe, nous appellerons G-système un couple (F, I), où F est un sous-groupe de G, et I un ensemble d'éléments de G tels que

$$i \in I \ , \quad j \in I \quad \text{et} \quad i \neq j \implies iF \neq jF \ .$$

Un G-système sera dit plein, si $\bigcup_{i\in I} iF = G$.

Un G-système sera dit vide, si $I = \emptyset$.

THÉORÈME 2.1. – $f \in S(\overline{G}) \setminus \{E\}$ si, et seulement si, il existe un G-système (F, I) vérifiant :

$$f(x) = 0 \ , \qquad \text{si} \quad x \notin \bigcup_{i\in I} iF \ ,$$

$$f(x) = i^{-1} x \ , \qquad \text{si} \quad x \in iF \quad \text{et} \quad i \in I \ .$$

Montrons d'abord que la condition est suffisante. Si $I = \emptyset$, $f(x) = 0$ pour tout x de G. Donc $f = \Omega$, où Ω représente la fonction prenant sur tout $\overline{G}$ la valeur 0.

Ω est évidemment un élément de $S(\overline{G}) \setminus \{E\}$. Soit donc $I \neq \emptyset$. Nous avons $0 \notin \bigcup_{i\in I} iF$, et donc $f(0) = 0$. Par conséquent, $f \neq E$.

D'autre part, il est évident que

$$(3) \qquad (\overline{G} \setminus \bigcup_{i\in I} iF)F \subseteq \overline{G} \setminus \bigcup_{i\in I} iF \ .$$

Prenons alors x et y dans $\overline{G}$:

Si $y \notin \bigcup_{i\in I} iF$, alors $f(y) = 0$. Donc

$$f(xf(y)) = f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x)\ f(y) = 0 \ .$$

Si $y \in iF$ pour un certain i de I et $x \notin \bigcup_{i\in I} iF$, alors

$$f(x)\ f(y) = 0 \ , \qquad \text{car} \quad f(x) = 0 \ ,$$

$$f(xf(y)) = 0 \ , \qquad \text{car} \quad f(y) \in F \quad \text{et} \quad xf(y) \notin \bigcup_{i\in I} iF \ ,$$

d'après (3).

Enfin, si $x \in jF$ et $y \in iF$ (i , j éléments de I), on a

$$j^{-1}(xf(y)) = (j^{-1}\ x)\ f(y) = f(x)\ f(y) \ ,$$

donc

$$j^{-1}(xf(y)) \in F \qquad \text{et} \qquad xf(y) \in jF \ .$$

Par conséquent,

$$f(xf(y)) = j^{-1}(xf(y)) = f(x)\ f(y) \ .$$

Nous allons maintenant montrer que la <u>condition est nécessaire</u>. Soit $f \in S(\overline{G}) \setminus \{E\}$. Considérons la loi $\star$ définie sur $\overline{G}$ par

$$x \star y = xf(y) \ .$$

Nous noterons $(\overline{G} , \star)$ le groupoïde ainsi obtenu. Si x , y et z sont des éléments quelconques de $\overline{G}$, nous aurons

$$x \star (y \star z) = xf(yf(z)) \ ,$$

$$(x \star y) \star z = xf(y)\ f(z) \ .$$

Par conséquent, $(\overline{G} , \star)$ est un demi-groupe dont nous allons préciser la structure. Puisque $f \neq E$, on a $f(0) = 0$, donc

$$y \star 0 = yf(0) = 0 \ ,$$

mais $0 \star y = 0f(y) = 0$, donc l'élément 0 est un zéro dans $(\overline{G} , \star)$. Il est d'autre part immédiat que l'ensemble $Z = \{z \in \overline{G} \ ; \ f(z) = 0\}$ est un idéal de $(\overline{G} , \star)$ contenant 0 .

Soit $D = \overline{G} \setminus Z = \{x \in \overline{G} \ ; \ f(x) \neq 0\}$.

Si $D = \emptyset$, $f = \Omega$, et n'importe quel G-système vide fera l'affaire.

Si $D \neq 0$, D est un sous-demi-groupe de $(\overline{G} , \star)$. Pour x et y , éléments de D , on a alors

$$f(x) = f(xf(y)^{-1} f(y)) = f(xf(y)^{-1}) f(y) \quad ,$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad f(xf(y)^{-1}) = f(x) f(y)^{-1} \quad .$$

Caractérisons maintenant les idempotents de $(D , \star)$. Puisque la restriction de f à D est un homomorphisme de $(D , \star)$ dans $(G , .)$, un idempotent i de $(D , \star)$ sera défini par la relation

$$(5) \qquad f(i) = e \quad .$$

Soit I l'ensemble de ces idempotents ; nous pouvons dire que $I \neq \emptyset$ et que, de plus,

$$(6) \qquad i \in I \iff (\exists\, x \in D) \quad (i = xf(x)^{-1}) \quad ;$$

c'est une conséquence immédiate de (4) et (5).

Pour chaque élément i de I , considérons l'ensemble

$$H_i = \{x \in D \ ; \ xf(x)^{-1} = i\} \quad .$$

H_i n'est pas vide, car $i \in H_i$. Si x et y sont dans H_i , on a

$$(x \star y)\, f(x \star y)^{-1} = xf(y)\, f(y)^{-1}\, f(x)^{-1} = xf(x)^{-1} = i \quad .$$

Donc H_i est un sous-demi-groupe de $(D , \star)$. De plus, si $x \in H_i$,

$$i \star x = if(x) = i \quad .$$

Donc i est neutre à gauche dans $(H_i , \star)$. Enfin si $x \in H_i$, soit $y = if(x)^{-1}$, on a

$$f(y)^{-1} = [f(i)\, f(x)^{-1}]^{-1} = f(x) \quad ,$$

d'après (4) et (5). Donc $yf(y)^{-1} = i$ et $y \in H_i$; mais évidemment $y \star x = i$. Par conséquent, H_i est un sous-groupe de $(D , \star)$. Comme $D = \bigcup_{i \in I} H_i$ et que $i \neq j \implies H_i \cap H_j = \emptyset$, les H_i sont maximaux. Par conséquent, si $x \in D$, il existe un, et un seul, i de I tel que $x \in H_i$, et donc tel que $xf(x)^{-1} = i$. Donc $f(x) = i^{-1} x$, et $f(H_i) = i^{-1} H_i$ est un sous-groupe de $(G , .)$.

Montrons maintenant que $f(H_i)$ reste le même lorsque i parcourt I. Pour cela, supposons que I contient au moins deux éléments distincts i et j, et soient $x \in H_i$ et $y \in H_j$. Nous avons vu plus haut que

$$(x \star y)\ f(x \star y)^{-1} = i \quad .$$

Donc $x \star y \in H_i$ et $H_i \star H_j \subseteq H_i$, ce qui peut s'écrire

$$H_i\ f(H_j) \subseteq H_i \quad ,$$

ou bien

$$i^{-1}\ H_i\ f(H_j) \subseteq i^{-1}\ H_i \quad ,$$

ou encore

$$f(H_i)\ f(H_j) \subseteq f(H_i) \quad ,$$

mais, de même,

$$f(H_j)\ f(H_i) \subseteq f(H_j) \quad .$$

Comme $f(H_i)$ et $f(H_j)$ sont des sous-groupes de $(G\ ,\ .)$, ces deux inclusions impliquent $f(H_i) = f(H_j)$.

Tous les H_i ont donc même image par f, et nous dénoterons cette image par F. Nous avons alors $H_i = iF$, pour tout i de I, et nous sommes en présence d'un G-système $(F\ ,\ I)$ vérifiant la condition du théorème qui est ainsi démontré.

2.2. Demi-groupes cycliques de solutions.

LEMME 2.2. - *Soient* f *et* g *deux éléments de* $S(\overline{G})$. *Si* $f \circ g = g \circ f$, *alors* $f \circ g \in S(\overline{G})$.

La démonstration est triviale.

COROLLAIRE. - *Un sous-ensemble de* $S(\overline{G})$, *dont les éléments sont deux à deux permutables, engendre un sous-demi-groupe abélien de* $A(\overline{G})$, *contenu dans* $S(\overline{G})$. *En particulier, le sous-demi-groupe cyclique* $\langle f \rangle$ *de* $A(\overline{G})$, *engendré par un élément* f *de* $S(\overline{G})$, *est contenu dans* $S(\overline{G})$.

Remarque. - Ω commute avec tout élément de $A(\overline{G})$, sauf E. E commute avec un élément f de $A(\overline{G})$ si, et seulement si, $f(e) = e$.

L'application identique de $\overline{G}$ dans lui-même (que nous noterons γ) commute avec tout élément de $A(\overline{G})$.

Notations. - Soit un élément f de $S(\overline{G})$ différent de Ω , E et γ . Soit n un entier strictement positif, et soit $f^n \in \langle f \rangle$. Nous désignerons par :

(F_n , I_n) le G-système associé à f^n dans le théorème 2.2,
Z_n l'ensemble $\{x \in \overline{G} ; f^n(x) = 0\}$,
D_n l'ensemble $\overline{G} \setminus Z_n$.

Enfin l'élément courant de I_n sera noté i_n et, au cas où $F_n \subseteq D_n$, l'élément de I_n contenu dans F_n sera noté j_n . Nous n'écrirons pas l'index 1.

LEMME 2.3. - $\Omega \in \langle f \rangle \implies \langle f \rangle = \{f , \Omega\}$.

Supposons que $f^n = \Omega$ avec $n \geqslant 2$. Evidemment, $f^m = \Omega$ pour tout $m \geqslant n$.

Si $f^2 = \Omega$, $\langle f \rangle = \{f , \Omega\}$.

Si $f^2 \neq \Omega$, soit k le plus petit entier positif tel que $f^k = \Omega$:

$$\{0\} = f^k(\overline{G}) = f(f^{k-1}(\overline{G})) \quad .$$

Donc $F_{k-1} = f^{k-1}(\overline{G}) \setminus \{0\}$ est contenu dans Z . Réciproquement, si $F_{k-1} \subseteq Z$ et $f^{k-1} \neq \Omega$, il est clair que $f^k = \Omega$. Mais

$$F_{n-1} \subseteq Z \implies e \in Z \implies F \subseteq Z \implies f^2 = \Omega \quad ,$$

contrairement à l'hypothèse. Donc

$$f^2 \neq \Omega \implies f^n \neq \Omega , \qquad \text{pour tout } n \geqslant 2 \quad .$$

Dans le théorème suivant, nous supposerons $\langle f \rangle \neq \{f , \Omega\}$.

THÉORÈME 2.3.

(i) $Z_n = Z$, <u>pour tout</u> $n \geqslant 1$;
(ii) $F_n = F$, <u>pour tout</u> $n \geqslant 1$;
(iii) <u>Si</u> i <u>et</u> i_{n+1} <u>sont congrus à gauche modulo</u> F , <u>on a</u>

$$i_{n+1} = ij^n \quad ;$$

(iv) <u>Si</u> j <u>est d'ordre fini</u> n , $\langle f \rangle$ <u>est un groupe cyclique d'ordre</u> n , <u>et réciproquement.</u>

Prouvons (i) :

$$x \in Z_n \implies f^n(x) = 0 \implies f^{n+1}(x) = 0 \implies x \in Z_{n+1} \quad ,$$

donc $Z_n \subseteq Z_{n+1}$. D'autre part,

$$x \in Z_{n+1} \implies f^{n+1}(x) = 0 \implies f(f^n(x)) = 0 \implies f^n(x) \in Z$$
$$\implies f^n(x) \in Z_n \implies f^n(x) = 0 \implies x \in Z_n \ ,$$

donc $Z_{n+1} \subseteq Z_n$ et $Z_{n+1} = Z_n$. Ceci équivaut à $D_{n+1} = D_n$.

Prouvons (ii) par récurrence sur n :

$$F_2 = f^2(D) = f(f(D)) = f(F) = F \ .$$

Supposons $F = F_2 = \dots = F_n$, $F_{n+1} = f^{n+1}(D) = f^n(f(D)) = f^n(F) = F$.

Prouvons (iii) par récurrence sur n : Si $x \in i_2 F = iF$, on a

$$f^2(x) = i_2^{-1} x = f(f(x)) = f(i^{-1} x) = j^{-1} i^{-1} x \ ,$$

donc $i_2 = ij$. Supposons alors que $i_n = ij^{n-1}$, et soit $x \in i_{n+1} F = iF$;

$$f^{n+1}(x) = i_{n+1}^{-1} x = f(f^n(x)) = f(i_n^{-1} x) = j^{-1} i_n^{-1} x \ ,$$

donc $i_{n+1} = i_n j = ij^n$.

Pour montrer (iv), remarquons que, si $1 \leqslant m \leqslant n-1$, on a $j^n = e$ et $j^m \neq e$. Donc $i_{n+1} = i$ pour tout $i \in I$, donc $f^{n+1} = f$.

Réciproquement, $f^k = f \implies i_k = i$ pour tout i de I . Donc $j^{k-1} = e$, et n divise $k-1$. Donc $n+1$ est le plus petit entier tel que $f = f^{n+1}$ et, par conséquent, $\langle f \rangle$ est un groupe d'ordre n , engendré par f , et ayant f^n comme élément neutre.

La réciproque est évidente.

3. Solution générale de l'équation (2) dans le cas d'un groupe.

THÉORÈME 3.1. - Soit G un groupe. Alors $f \in S(G)$ si, et seulement si, il existe un G-système plein (F, I) vérifiant :

$$f(x) = i^{-1} x \ , \qquad \text{pour } i \in I \text{ et } x \in iF \ .$$

Considérons d'abord un élément f de $S(G)$. Adjoignons à G un zéro pour en faire un groupe avec zéro $\overline{G}$, et étendons f à $\overline{G}$ par

$$\begin{cases} \bar{f}(0) = 0 \ , \\ \bar{f}(x) = f(x) \ , \quad \text{pour tout } x \text{ de } G \ . \end{cases}$$

Il est évident que $\bar{f} \in S(\overline{G})$. Donc il existe un G-système (F, I) vérifiant :

$$\begin{cases} \bar{f}(x) = 0 , & \text{pour } x \in \bigcup_{i \in I} iF , \\ \bar{f}(x) = i^{-1} x , & \text{pour } i \in I \text{ et } x \in iF . \end{cases}$$

Comme $\bar{f}(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$, (F , I) est plein. Par conséquent, $\bar{f}(x) = i^{-1} x$ pour $i \in I$, et $x \in iF$ se réduit à $f(x) = i^{-1} x$ pour $i \in I$ et $x \in iF$.

Réciproquement, soit $f \in A(G)$, et soit un G-système plein (F , I) vérifiant la condition du théorème. On considère de nouveau $\bar{G}$ et $\bar{f}$ qui vérifient les conditions du théorème 2.1. Donc $\bar{f} \in S(\bar{G})$, et donc $f \in S(G)$.

Remarquons que le G-système correspondant à l'application identique de G sur lui-même est $(G , \{e\})$. Celui correspondant à l'application E est $(\{e\} , G)$.

Nous allons maintenant montrer une proposition qui sera utilisée au paragraphe suivant.

PROPOSITION 3.1. - <u>Soient</u> G <u>un groupe, et</u> $\{\alpha_u\}_{u \in U}$ <u>une famille d'éléments de</u> $A(G)$. <u>Cette famille vérifie la relation</u>

$$\alpha_u(g\alpha_v(h)) = \alpha_u(g)\, \alpha_v(h) , \qquad \underline{\text{pour tout}}\ u , v \in U\ \underline{\text{et tout}}\ g , h \in G ,$$

<u>si, et seulement si, chaque</u> α_u <u>est dans</u> $S(G)$, <u>et</u> $\alpha_u(G) = \alpha_v(G)$ <u>pour tout</u> $u , v \in U$.

Montrons d'abord que la condition est suffisante. A chaque α_u , correspond un G-système plein que nous noterons (F , I_u) . Soient u et v dans U , g et h dans G : les $\alpha_v(h)$ étant dans F , g et $g\alpha_v(h)$ sont congrus à gauche modulo F . Donc, pour un certain élément i de I_u ,

$$\alpha_u(g) = i^{-1} g \qquad \text{et} \qquad \alpha_u(g\alpha_v(h)) = i^{-1} g\alpha_v(h) = \alpha_u(g)\, \alpha_v(h) .$$

Réciproquement, supposons la condition satisfaite. Evidemment chaque α_u est dans $S(G)$, et correspond à un G-système plein (F_u , I_u) . Soient alors u , v dans U , et g , h dans G . Il existe, dans I_u , deux éléments i et j congrus respectivement à g et $g\alpha_v(h)$, à gauche modulo F_u . Donc

$$\alpha_u(g) = i^{-1} g \qquad \text{et} \qquad \alpha_u(g\alpha_v(h)) = j^{-1} g\alpha_v(h) ,$$

mais $\alpha_u(g\alpha_v(h)) = \alpha_u(g)\, \alpha_v(h)$, donc $j^{-1} g\alpha_v(h) = i^{-1} g\alpha_v(h)$, et $i = j$. Par conséquent, g et $g\alpha_v(h)$ sont congrus à gauche modulo F_u pour tout g et h de G . Donc $\alpha_v(h)$ et e sont congrus à gauche modulo F_u pour tout h de G et, par suite, $F_v \subseteq F_u$. Ceci étant vrai pour tout u et v de U , le résultat est établi.

4. Solution générale de l'équation (2) dans le cas d'un groupe gauche.

L'étude des groupes gauches se trouve dans [3]. Nous allons cependant rappeler la définition, quelques propriétés, et préciser quelques notations.

DÉFINITION 4.1. - Un demi-groupe L est appelé groupe-gauche, s'il est simple à gauche, et vérifie la règle de simplification à droite.

Un tel demi-groupe a, entre autres, les propriétés suivantes :

(a) L'ensemble E de ses idempotents n'est pas vide, et est un zéro-demi-groupe à gauche (2) ;

(b) Pour un élément donné x de L, il existe un unique idempotent, noté $\bar{x}$, vérifiant $\bar{x}x = x$;

(c) Chaque élément de E est élément neutre à droite dans L ;

(d) Si e est un élément de E, l'ensemble eL est un groupe d'élément neutre e, et l'application $\varpi : (\varepsilon , g) \in E\times eL \to \varepsilon g \in L$, est un isomorphisme de $E\times eL$ sur L avec $\varpi^{-1}(x) = (\bar{x} , ex)$.

LEMME 4.1. - $\gamma \in S(L)$ si, et seulement si, $\varpi^{-1} \circ \gamma \circ \varphi \in S(E\times eL)$.

C'est immédiat.

Nous allons maintenant considérer un groupe G, un zéro-demi-groupe à gauche E, et le produit direct $L = E\times G$. Soit $f \in A(E\times G)$.

Pour tout élément e de E, on définit un élément α_e de $A(G)$ par

$$(e' , \alpha_e(g)) = f(e , g) .$$

Pour chaque élément g de G, on définit un élément β_g de $A(E)$ par

$$(\beta_g(e) , \alpha_e(g)) = f(e , g) .$$

Réciproquement, si nous prenons une famille $\{\alpha_e\}_{e\in E}$ d'éléments de $A(G)$ et une famille $\{\beta_g\}_{g\in G}$ d'éléments de $A(E)$, nous pouvons définir un élément f de $A(E\times G)$ par

$$f(e , g) = (\beta_g(e) , \alpha_e(g)) .$$

La famille $\{\alpha_e\}_{e\in E}$ sera appelée composante α de f, et la famille $\{\beta_g\}_{g\in G}$ sera la composante β de f.

---

(2) C'est-à-dire que, pour tout couple (e_1 , e_2) d'éléments de E, on a $e_1 e_2 = e_1$.

Supposons maintenant que $f \in S(ExG)$. Pour tout $e_1 , e_2 \in E$ et tout $g_1 , g_2 \in G$, on peut écrire :

$$f((e_1 , g_1)\, f(e_2 , g_2)) = f(e_1 , g_1)\, f(e_2 , g_2) \quad ,$$

$$f((e_1 , g_1)(\beta_{g_2}(e_2) , \alpha_{e_2}(g_2))) = (\beta_{g_1}(e_1) , \alpha_{e_1}(g_1))(\beta_{g_2}(e_2) , \alpha_{e_2}(g_2)) \quad ,$$

$$f(e_1\, \beta_{g_2}(e_2) , g_1\, \alpha_{e_2}(g_2)) = (\beta_{g_1}(e_1)\, \beta_{g_2}(e_2) , \alpha_{e_1}(g_1)\, \alpha_{e_2}(g_2)) \quad ,$$

$$f(e_1 , g_1\, \alpha_{e_2}(g_2)) = (\beta_{g_1}(e_1) , \alpha_{e_1}(g_1)\, \alpha_{e_2}(g_2)) \quad ,$$

$$(\beta_{g_1\alpha_{e_2}(g_2)}(e_1) , \alpha_{e_1}(g_1\, \alpha_{e_2}(g_2))) = (\beta_{g_1}(e_1) , \alpha_{e_1}(g_1)\, \alpha_{e_2}(g_2)) \quad .$$

Par conséquent, nous avons :

(a) $\alpha_{e_1}(g_1\, \alpha_{e_2}(g_2)) = \alpha_{e_1}(g_1)\, \alpha_{e_2}(g_2)$, pour tout e_1 , e_2 dans E , et tout g_1 , g_2 dans G ;

(b) $\beta_{g_1\alpha_{e_2}(g_2)} = \beta_{g_1}$, pour tout e_2 dans E , et tout g_1 , g_2 dans G .

Réciproquement, si les composantes α et β de f vérifient les conditions (a) et (b) ci-dessus, il est évident que $f \in S(ExG)$.

PROPOSITION 4.1. - _Soit_ $\{\alpha_e\}_{e\in E}$ _vérifiant la condition_ (a) _ci-dessus. D'après la proposition_ 3.1, _on a, pour tout_ $e \in E$, $\alpha_e(G) = F$, F _étant un certain sous-groupe de_ G . _Alors_ $\{\beta_g\}_{g\in G}$ _vérifie la condition_ (b) _ci-dessus si, et seulement si,_ g _et_ h _congrus à gauche modulo_ F _implique_ $\beta_g = \beta_h$.

Supposons d'abord que $g \in hF \implies \beta_g = \beta_h$. Si $e \in E$, alors $\alpha_e(h) \in F$ et $\alpha_e(h)F = F$. Donc

$$g \in gF \implies g \in g\alpha_e(h)F \implies \beta_g = \beta_{g\alpha_e(h)} \quad .$$

Réciproquement, supposons que la condition (b) soit satisfaite : Si $g \in hF$ et $e \in E$, il existe g' dans G tel que $\alpha_e(g') = h^{-1} g$. Donc $g = h\alpha_e(g')$, et par conséquent,

$$\beta_h = \beta_{h\alpha_e(g')} = \beta_g \quad .$$

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 4.2. - $f \in S(ExG)$ _si, et seulement si, il existe_ :

1° Une famille $\{(F , I_e)\}_{e \in E}$ de G-systèmes pleins ;
2° Une famille $\{\beta_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ d'éléments de $A(E)$ (indexée par l'ensemble Λ des classes à gauche modulo F) vérifiant

$$f(e , g) = (\beta_\lambda(e) , \lambda_e^{-1} g) \quad ,$$

où λ est l'élément de Λ contenant g , et λ_e est l'unique élément de I_e contenu dans λ .

Combinant le lemme 4.1 et la proposition 4.2, nous obtenons finalement le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. - Soient L un groupe gauche, et E l'ensemble des idempotents de L . Alors $\gamma \in S(L)$ si, et seulement si, il existe :

1° Une famille $\{(F , I_e)\}_{e \in E}$ de G-systèmes pleins, avec $G = \varepsilon L$, ε étant un certain élément de E ;
2° Une famille $\{\beta_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ d'éléments de $A(E)$ (indexée par l'ensemble Λ des classes à gauche modulo F dans G) vérifiant

$$\gamma(x) = \beta_\lambda(\bar{x}) \, \lambda_{\bar{x}}^{-1} \, x \quad ,$$

où

$\bar{x}$ est l'unique élément de E tel que $\bar{x}x = x$,

λ est l'élément de Λ contenant εx ,

$\lambda_{\bar{x}}$ est l'unique élément de $I_{\bar{x}}$ contenu dans λ .

Remarque. - Dans le groupe gauche L , les eL $(e \in E)$ sont des groupes disjoints, et leur union est L . De plus, chaque eL est un idéal à droite de L . Si nous regardons l'égalité précédente $\gamma(x) = \beta_\lambda(\bar{x}) \, \lambda_{\bar{x}}^{-1} \, x$, nous voyons que $\beta_\lambda(\bar{x}) \, \lambda_{\bar{x}}^{-1}$ appartient à $\beta_\lambda(\bar{x})L$.

Ceci suggère la proposition suivante.

PROPOSITION 4.3. - Soit U un demi-groupe, union disjointe d'idéaux à droite. Dans chacun de ces idéaux, nous choisissons un élément, et nous notons I l'ensemble de ces éléments.

Soit $\beta \in A(I)$; définissons un élément f de $A(U)$ par $f(x) = \beta(\bar{x})x$, où $\bar{x}$ est l'élément de I contenu dans l'idéal contenant x . Alors $f \in S(L)$.

En effet, soit x , y deux éléments de L . Nous avons immédiatement $\bar{x} = \overline{xf(y)}$; donc

$$f(xf(y)) = \beta(\bar{x}) \, xf(y) = f(x) \, f(y) \quad .$$

5. Solution générale de l'équation (2) dans le cas d'un demi-treillis.

Soit T un inf-demi-treillis, dont nous noterons la loi par $\wedge$. Soit F un sous-demi-treillis de T.

Considérons une famille $\{E_a\}_{a \in F}$ de sous-ensembles non vides de T. Posons $E = \bigcup_{a \in F} E_a$. Pour tout x de T, nous noterons par I_x l'ensemble des éléments i de E, vérifiant $x \wedge a = i$ pour $i \in E_a$.

DÉFINITION 5.1. - Une telle famille sera appelée ancêtre de F, si elle vérifie:

1° $i \in E_a \Longrightarrow i \leqslant a$;

2° $a, b \in F$ et $a \neq b \Longrightarrow E_a \cap E_b = \emptyset$;

3° Pour tout x de T, l'ensemble I_x possède un élément maximum, noté i_x.

DÉFINITION 5.2. - Nous appellerons associée de l'ancêtre $\{E_a\}_{a \in F}$, la fonction f de T dans F définie de la façon suivante :

D'après 2° et 3°, pour tout x de T, il existe un unique élément de F, noté $\overline{x}$, vérifiant $x \wedge \overline{x} = i_x$. On définit alors f par $f(x) = \overline{x}$.

Remarquons que f est surjective. En effet, soient $a \in F$ et $x \in E_a$.

$$x \leqslant a \Longrightarrow x \wedge a = x \quad .$$

Donc $x \in I_x$. D'autre part, si $j \in I_x$ avec $j \in E_b$, ou si $x \wedge b = j$, $j \leqslant x$ et $x = i_x$. Donc

$$\overline{x} = a \qquad \text{et} \qquad f(E_a) = a \quad .$$

THÉORÈME 5.1. - $f \in S(T)$ si, et seulement si, il existe un sous-demi-treillis F de T et un ancêtre $\{E_a\}_{a \in F}$ de F, ayant f comme associée, et vérifiant la condition

$$\text{(C)} \qquad (\forall\, x \in T) \quad (\forall\, a \in F) \qquad (i_{x \wedge a} \in E_{\overline{x} \wedge a} \quad \text{et} \quad i_x \wedge a \in E_{\overline{x} \wedge a}) \quad .$$

Soient, en effet, x et y dans T. Nous avons, par (C) et la remarque ci-dessus,

$$f(i_{x \wedge \overline{y}}) = f(i_x \wedge \overline{y}) = \overline{x} \wedge \overline{y} = f(x) \wedge f(y) \quad ,$$

mais $f(i_{x \wedge \overline{y}}) = f(x \wedge \overline{y}) = f(x \wedge f(y))$, donc $f \in S(T)$.

Pour démontrer la réciproque, considérons un élément f de $S(T)$, et la loi $\star$ définie sur T par

$$x \star y = x \wedge f(y) \quad .$$

$(T , 1)$ étant un demi-groupe, on montre, comme dans le théorème 2.1, que

$$f \in S(T) \implies [(T , \star) \text{ est un demi-groupe}] \ .$$

Par suite, $f(T) = F$ est un sous-demi-treillis de T .

Dans $(T , \star)$, chaque carré est un idempotent,

$$(x \star x) \star (x \star x) = (x \wedge f(x)) \wedge f(x \wedge f(x))$$
$$= x \wedge f(x) = x \star x \ .$$

Donc i est un idempotent si, et seulement si, $i \leqslant f(i)$. Notons E l'ensemble des idempotents de $(T , \star)$.

Soit $H_i = \{x \in T \ ; \ x \star x = i\}$. Evidemment, $i \in H_i$. De plus, soient x et y dans H_i ,

$$f(x \star x) = f(i) = f(x) \wedge f(x) = f(x) \quad ,$$

et

$$x \star y = x \wedge f(y) = x \wedge f(x) = i \quad .$$

Donc H_i est, pour la loi $\star$, un demi-groupe tel que tout produit est égal à i . Il est clair que les H_i sont deux à deux disjoints, et que

$$T = \bigcup_{i \in E} H_i \quad .$$

Soit maintenant a un élément de F , et soit E_a l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est a . Puisque $T = \bigcup_{i \in E} H_i$, E_a n'est pas vide. Si $i \in E_a$, $i \star i = i \wedge f(i) = i \wedge a = i$. Donc $i \leqslant a$. Evidemment, si a et b sont deux éléments distincts de F , $E_a \cap E_b = \emptyset$.

Considérons enfin un élément x de T , et soit I_x l'ensemble défini au début du paragraphe. Puisque x est dans un certain H_i , on a évidemment $i \in I_x$. Soit alors j un élément de I_x ,

$$x \wedge f(j) = j \implies f(x) \wedge f(j) = f(j)$$
$$\implies f(j) \leqslant f(x) \quad .$$

De plus,

$$x \wedge f(j) = j \implies x \wedge f(j) \wedge f(x) = j \wedge f(x) = j \quad .$$

Donc $i \wedge f(j) = j$, et $j \leqslant i$. Donc i est maximum dans I_x . La famille $\{E_a\}_{a \in F}$ est donc un ancêtre de F , et il est évident que son associée est f .

Il reste à montrer que la condition (C) est vérifiée. Soient x dans T , et a dans F ,

$$x \star x = i_x \qquad \text{et} \qquad (x \wedge a) \star (x \wedge a) = i_{x \wedge a} \quad .$$

Alors

$$i_{x \wedge a} = x \wedge a \wedge f(x \wedge a)$$

$$= x \wedge a \wedge f(x) \wedge a = i_x \wedge a \quad .$$

Mais nous avons

$$(i_x \wedge a) \star (i_x \wedge a) = i_x \wedge a \wedge f(i_x) \wedge a = i_x \wedge a \quad .$$

Donc $i_x \wedge a \in E$. Enfin $f(i_x \wedge a) = f(i_x) \wedge a$ implique que $i_x \wedge a \in E_{f(i_x) \wedge a}$, et par conséquent, la condition (C) est vérifiée.

Remarque. - Pour un sous-demi-treillis F de T donné, il n'existe pas forcément un ancêtre.

Prenons, par exemple, un inf-demi-treillis T ayant un élément minimum 0 et un ensemble non vide d'atomes [3]. Le sous-ensemble de T , constitué du zéro et de tous les atomes, est un sous-demi-treillis de T .

Evidemment, si $p \in F$, $E_p = \{p\}$ est le seul ancêtre possible.

Supposons alors qu'il existe un x de T supérieur à deux atomes distincts p et q (on suppose ici que F contient au moins trois éléments). Alors I_x contient au moins p et q , et il n'existe pas d'élément de E plus grand que p et q à la fois.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ACZÉL (J.). - Lectures on functional equations and their applications. - New York and London, Academic Press, 1966 (Mathematics in Science and Engineering, 19).

[2] BIRKHOFF (Garrett). - Moyenne des fonctions bornées, **Colloques internationaux du C. N. R. S. : Algèbre et Théorie des nombres** [24, 1949, Paris], p. 143-153. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1950.

[3] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - Algebraic theory of semigroups. Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[4] DARÓCZY (Z.). - Über die Funktionalgleichung $\varphi[\varphi(x)y] = \varphi(x)\,\varphi(y)$, Acta Univ. Debrecen, Ser. Fiz. Chem., t. 8, 1962, p. 125-132.

---

[3] Un élément a est un atome, s'il est différent de 0 , et si

$$0 < x \leqslant a \implies x = a \quad .$$

[5] JAVOR (P.). - Continuous solutions of the functional equation $f(x + yf(x)) = f(x) f(y)$ (à paraître).

[6] WOLODZKO (S.). - General solution of the functional equation $f(x + yf(x)) = f(x) f(y)$, Meeting on functional equations [1967. Waterloo (Canada)], Abstract.

(Texte remis le 13 mars 1969)

Yves MATRAS
Ingénieur au C. E. A.
Charg. Ens. Fac. Sc. Orsay
5 rue Fernand Widal
75 - PARIS 13