Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Benali Benzaghou

Algèbres de Hadamard

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, nº 2 (1968-1969), exp. nº 13,
p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_2_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
22e année, 1968/69, n° 13

17 mars 1969

ALGÈBRES DE HADAMARD

par Benali BENZAGHOU

Cet exposé comportera peu de démonstrations ; on trouvera les démonstrations dans [1], [2], [3], ou dans les exposés faits au Séminaire de Théorie des nombres ([4], [5], [6]).

1. Définitions.

Soit A un anneau commutatif unitaire ; nous munissons le A-module des séries formelles $A[[X]]$ du produit (de Hadamard) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n X^n \quad .$$

Nous obtenons une A-algèbre, notée $\mathcal{H}(A)$, commutative, non intègre, à élément unité $\delta = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$.

Nous associons à la catégorie $\underset{\sim}{A}$ des anneaux commutatifs unitaires, la catégorie de Hadamard $\mathcal{H}(\underset{\sim}{A})$ définie par :

- Ses objets sont les A-algèbres $\mathcal{H}(A)$, où A est un objet de $\underset{\sim}{A}$;
- Un morphisme $\mathcal{H}(\varphi)$ de $\mathcal{H}(A)$ dans $\mathcal{H}(A')$ est défini, φ étant un morphisme de A dans A' , par

$$\mathcal{H}(\varphi) . \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a_n) X^n \quad .$$

$\mathcal{H}$ peut être considéré comme un foncteur de $\underset{\sim}{A}$ dans $\mathcal{H}(\underset{\sim}{A})$, covariant, exact, représentable.

Un foncteur de Hadamard $\mathfrak{F}$ est un foncteur de $\underset{\sim}{A}$ dans une sous-catégorie de $\mathcal{H}(\underset{\sim}{A})$: $\mathfrak{F}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{H}(A)$.

Si B est une partie de A , nous notons :

$$\mathfrak{F}(B , A) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathfrak{F}(A) , \quad a_n \in B , \quad \forall\, n \in \underset{\sim}{N} \} \quad .$$

<u>Exemples de foncteurs de Hadamard</u> :

1° $\Theta(A) = \{\sum_{n=0}^{\infty} P(n)\, X^n \;,\; P(X) \in A[X]\}$. Notons $\theta = \sum_{n=0}^{\infty} nX^n$, alors $\Theta(A) = A[\theta]$; si A est intègre, $\Theta(A)$ est intègre.

2° Soit $h_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n X^n$, $\alpha \in A$; $\mathcal{R}_1(A)$ est la sous-algèbre de $\mathcal{H}(A)$ engendrée par les h_α , $\alpha \in A$.

3° $\mathcal{R}'(A)$ est la sous-algèbre de $\mathcal{H}(A)$ engendrée par $\Theta(A)$ et $\mathcal{R}_1(A)$.

4° $\mathcal{S}(A) = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, (a_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes$\}$.

5° Soient $\mathcal{K}$ la catégorie des corps commutatifs, $\mathcal{H}(\mathcal{K})$ la catégorie de Hadamard associée.

Pour un corps commutatif K , soit

$$\mathcal{R}(K) = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \frac{P(X)}{Q(X)} \;,\quad P(X) \in K[X] \;,\quad Q(X) \in K[X] \;,\quad \deg P < \deg Q \;,\quad Q(0) \neq 0\} \;.$$

Si $\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \frac{P(X)}{Q(X)} \in \mathcal{R}(K)$, $Q(X) = q_0 + q_1 X + \dots + q_h X^h$, alors

$$q_0\, a_{n+h} + q_1\, a_{n+h-1} + \dots + q_h\, a_n = 0 \;, \qquad \forall\, n \geqslant 0 \;,$$

et

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\, \alpha_i^n \;,$$

où les α_i sont les zéros de

$$Q^*(X) = q_0\, X^h + q_1\, X^{h-1} + \dots + q_h \;,$$

les P_i des polynômes de $K^1[X]$, où K^1 est l'extension de K par les α_i , le degré de P_i étant égal à la multiplicité de α_i moins 1 .

$\mathcal{R}(K)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{H}(K)$ qui sera étudiée en détail dans la suite, $\mathcal{R}$ est un foncteur de Hadamard.

6° Soient K un corps commutatif de caractéristique zéro, et E l'anneau des fonctions, définies sur $\underset{\sim}{N}$ et qui soient restrictions de fractions rationnelles de $K(X)$. Considérons

$$\mathcal{J}(K) = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \;,\quad a_n \in K \;,\quad \exists\, \varphi_1 , \dots , \varphi_h \in E \;,\quad \varphi_h \neq 0 \;, \text{ et } \\ a_{n+h} = \varphi_1(n)\, a_{n+h-1} + \dots + \varphi_h(n)\, a_n \;,\quad \forall\, n \geqslant 0\} \;,$$

$\mathcal{J}(K)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{H}(K)$, contenant $\mathcal{R}(K)$.

7° A tout anneau de fonctions E de $\mathbb{N}$ dans K , on peut associer une sous-algèbre de $\mathcal{H}(K)$ en considérant les suites $a_n = \varphi(n)$, $\varphi \in E$ (mais de manière non nécessairement fonctorielle).

8° Sur $\mathbb{C}$, nous pouvons considérer par exemple les sous-algèbres de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$:
$\mathcal{H}^1(\mathbb{C}) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n , \ \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} < +\infty \}$,
$\mathcal{H}_1(\mathbb{C}) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n , \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} - S_f$, où S_f est un ensemble de points isolés, $0 \notin S_f \}$ (théorème de Hadamard ([11])).

2. Propriétés générales des foncteurs $\mathcal{F}$.

2.1. PROPOSITION.

(a) Soient k un corps commutatif, K une extension galoisienne de degré d de k , et supposons que $\mathcal{F}(k , K) = \mathcal{F}(k)$. Alors $\mathcal{F}(K)$ est une $\mathcal{F}(k)$-algèbre entière, libre de type fini, de rang d .

(b) Soient A un anneau principal, k son corps des quotients, K une extension galoisienne de degré d de k , A' la fermeture intégrale de A dans K ; alors $\mathcal{F}(A' , K)$ est une $\mathcal{F}(A , K)$-algèbre entière, libre de type fini, de rang d .

Si $(\omega_1 , \dots , \omega_d)$ est une base de K sur k , soit $\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{F}(K)$, et posons

$$a_n = \lambda_{n,1}\, \omega_1 + \dots + \lambda_{n,d}\, \omega_d \ .$$

$G = \{\sigma_1 , \dots , \sigma_d\}$ étant le groupe de Galois de K sur k ,

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(a_n) \\ \vdots \\ \sigma_d(a_n) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \lambda_{n,1} \\ \vdots \\ \lambda_{n,d} \end{pmatrix} ,$$

d'où

$$\Lambda_j = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n,j} X^n \in \mathcal{F}(k , K) = \mathcal{F}(k) \ .$$

De même, soit $P_n(Y)$ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de K défini par $x \longmapsto a_n x$:

$$P_n(Y) = Y^d + \alpha_{n,1} Y^{d-1} + \dots + \alpha_{n,d} \ ,$$

alors

$$P(Y) = Y^d + \Lambda_1 Y^{d-1} + \dots + \Lambda_d \ ,$$

où $\Lambda_j = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,j} X^n \in \mathfrak{S}(k , K)$, avec $P(\mathfrak{A}) = 0$.

2.2. PROPOSITION. - Pour le foncteur $\mathcal{R}$, nous avons $\mathcal{R}(k , K) = \mathcal{R}(k)$, et la proposition 2.1 peut être complétée, lorsque k est de caractéristique zéro, par :

Soit $\overline{G} = \{\overline{\sigma} = (\sigma_n) \ , \ \sigma_n \in G \ , \ (\sigma_n)$ périodique$\}$. Alors toutes les solutions de $P(Y) = 0$ dans $\mathcal{R}(K)$ sont de la forme :

$$\overline{\sigma}\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(a_n) X^n \ , \qquad \overline{\sigma} = (\sigma_n) \in \overline{G} \ .$$

C'est une conséquence du corollaire suivant d'un théorème de Mahler ([12]) :

2.3. PROPOSITION. - Soient K un corps de caractéristique zéro, E un ensemble fini d'endomorphismes de K ; soit $\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$. Considérons

$$\mathfrak{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(a_n) X^n \ ,$$

où $\varphi_n \in E$ pour chaque n . Alors

$$\mathfrak{B} \in \mathcal{R}(K) \iff \overline{\varphi} = (\varphi_n) \text{ est périodique} \ .$$

2.4. PROPOSITION. - Soient K une extension séparable de degré fini de k , N l'application norme de K dans k , $\mathfrak{S}(N)$ l'application associée de $\mathfrak{S}(K)$ dans $\mathfrak{S}(k)$, alors

" $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}(K)$ est inversible dans $\mathfrak{S}(K)$ "

$\iff$ " $\mathfrak{S}(N)(\mathfrak{A})$ est inversible dans $\mathfrak{S}(k , K)$ " .

COROLLAIRE. - Soient K un corps de nombres algébriques, $\mathfrak{a}$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{U}$ son groupe des unités. Alors $\mathfrak{S}(\mathfrak{U} , K)$ est un groupe multiplicatif, c'est le groupe des unités de $\mathfrak{S}(\mathfrak{a} , K)$.

En effet, si $\mathfrak{A} = \sum_n a_n X^n \in \mathfrak{S}(\mathfrak{U} , K)$, alors $\mathfrak{B} = \sum_n N(a_n) X^n \in \mathfrak{S}(\mathbb{Q} , K)$ et $\mathfrak{B}^2 = \delta$.

3. Anneaux de Fatou.

Nous avons défini $\mathcal{R}$ pour un corps commutatif ; soient A un anneau commutatif unitaire intègre, K son corps des quotients. Définissons l'ensemble $\mathcal{R}(A)$ par :

$$\mathcal{R}(A) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n , \quad a_n \in A , \quad \exists\, q_1 , \dots , q_h \in A \text{ tels que}$$

$$a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \dots + q_h a_n , \quad \forall n \geqslant 0 ,$$

$$\text{et } \Delta = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{h-1} \\ \vdots & & \\ a_{h-1} & \dots & a_{2h-1} \end{vmatrix} \neq 0 \} .$$

Lorsque A est intégralement clos, $\mathcal{R}(A)$ est une A-algèbre de Hadamard.

3.1. DÉFINITION. - A est un anneau de Fatou, si $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A , K)$.

Une fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$ de $K(X)$ est normalisée, si $\deg P < \deg Q$, $(P , Q) = 1$ et $Q(0) = 1$. Soit alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in K[[X]]$ sa série de Taylor à l'origine.

" A est un anneau de Fatou" $\Longleftrightarrow$ "Pour toute fraction rationnelle normalisée $\frac{P(X)}{Q(X)}$ de $K(X)$, de série de Taylor à l'origine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, la condition $a_n \in A$, pour tout n , implique $Q(X) \in A[X]$ ".

Exemples : $\mathbb{Z}$ est un anneau de Fatou (lemme de Fatou ([10])) ; un anneau de Dedekind ([14]), un anneau factoriel ([9]), sont des anneaux de Fatou.

3.2. PROPRIÉTÉS.

(a) Soient L un corps commutatif, $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille de sous-anneaux de L , $A = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$. Si chaque A_α est un anneau de Fatou, alors A est un anneau de Fatou.

COROLLAIRE. - Tout anneau commutatif unitaire intègre possède une enveloppe de Fatou (plus petit anneau de Fatou le contenant).

(b) Un anneau de Fatou est complètement intégralement clos.

En effet, soit $\alpha \in K$, tel qu'il existe $d \in A$, $d \neq 0$, et $d\alpha^n \in A$ pour tout n ; alors $\sum_{n=0}^{\infty} d\alpha^n X^n = \frac{d}{1 - \alpha X}$ est normalisée, d'où $\alpha \in A$.

(c) Soient K un corps commutatif, v une valuation non triviale de K, A l'anneau de la valuation. Alors

" A est un anneau de Fatou" $\Longleftrightarrow$ " v est de hauteur 1 " .

En effet :

" A de Fatou" $\Longrightarrow$ " A complètement intégralement clos" $\Longrightarrow$ " v est de hauteur 1 "([7], § 4, prop. 9).

" v de hauteur 1 ". Soit $\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, normalisée, et $a_n \in A$, $\forall\, n \geqslant 0$. En nous plaçant dans une extension convenable de K, " $|a_n| \leqslant 1$, $\forall\, n \geqslant 0$ " $\Longrightarrow$ "Le rayon de convergence de la série est $\geqslant 1$ ", d'où les zéros du polynôme réciproque $Q^*(X)$ sont des entiers pour la valuation, et par suite $Q(X) \in A[X]$.

(d) Soient K un corps commutatif, et A une intersection d'anneaux de valuation de K de hauteur 1. Alors A est un anneau de Fatou.

En particulier, un anneau de Krull est un anneau de Fatou. Pour un anneau noethérien, être de Fatou équivaut à être intégralement clos.

(e) Soient A un anneau de Fatou, de corps des quotients K. Soient K' une extension algébrique de K, A' la fermeture intégrale de A dans K'. Alors A' est un anneau de Fatou.

4. Groupe des unités de $\mathcal{R}(K)$.

4.1. THÉORÈME. - Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro, et soit $\mathcal{G}$ le groupe des unités de $\mathcal{R}(K)$. Alors :

$$" \mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{G} " \Longleftrightarrow " \exists\, m \in \underset{\sim}{N},\ m \geqslant 1,\ \exists\, \alpha_0, \dots, \alpha_{m-1} \in K^* "$$

$$\text{tels que, pour } \mu = 0, 1, \dots, m-1,\quad a_\mu \in K^*,\quad a_{\mu+tm} = a_\mu \cdot \alpha_\mu^t,\ \forall\, t \in \underset{\sim}{N} .$$

4.2. Considérons

$$\mathcal{M} = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,\ a_n \in \underset{\sim}{C},\ a_n = \sum_{i=1}^{s} \omega_i(n)\, \alpha_i^n,\ \alpha_i \in \underset{\sim}{C}^*,$$

$$\omega_i(z) \text{ fonction entière de type exponentiel minimal} \},$$

$\mathbb{M}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{H}(\underset{\sim}{C})$, contenant $\mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$.

$$\mathcal{P}(\underset{\sim}{C}) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n , \quad \exists P_0 , P_1 , \ldots , P_{m-1} \in \underset{\sim}{C}[X] , \quad m \geqslant 1 ,$$
$$\text{tels que} \quad a_{\mu+tm} = P_\mu(t) , \quad \forall\, t \in \underset{\sim}{N} , \quad \mu = 0 , 1 , \ldots , m-1 \} ,$$

$\mathcal{P}(\underset{\sim}{C})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$.

PROPOSITION. - Si un élément de $\mathcal{P}(\underset{\sim}{C})$ se factorise dans $\mathbb{M}$, alors cette factorisation est dans $\mathcal{P}(\underset{\sim}{C})$.

De cette proposition résulte le théorème ; sa démonstration est basée sur certaines propriétés des fonctions entières de type exponentiel ([4]). Signalons les applications suivantes :

(a) Soit

$$\mathcal{E}(K) = \{ \sum a_n X^n , \quad \exists P_0 , \ldots , P_{m-1} \in K[X] , \quad \exists \alpha_0 , \ldots , \alpha_{n-1} \in K ,$$
$$\text{tels que} \quad a_{\mu+tm} = P_\mu(t)\, \alpha_\mu^t , \quad \forall\, t \in \underset{\sim}{N} \} ,$$

$\mathcal{E}(K)$ est une partie multiplicativement stable de $\mathcal{R}(K)$.

Si un élément de $\mathcal{E}(\underset{\sim}{C})$ se factorise dans $\mathbb{M}$, alors cette factorisation est dans $\mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$.

(b) $\mathbb{M}$ et $\mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$ ont même groupe d'unités.

(c) Soit $P(X) \in K[X]$, K de caractéristique zéro et algébriquement clos. L'équation

$$T^s = P(\theta)$$

a des solutions dans $\mathcal{R}(K)$ si, et seulement si, P est la puissance s-ième d'un polynôme Q de $K[X]$. Ces solutions sont alors de la forme $\Gamma . Q(\theta)$ où $\Gamma = \sum_n \zeta_n X^n$, (ζ_n) suite périodique de racines s-ième de l'unité.

(d) Soit $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}^1(\underset{\sim}{C})$; l'endomorphisme $T \longmapsto \mathfrak{A}.T$ de $\mathcal{H}^1(\underset{\sim}{C})$ est une convolution:

$$\mathfrak{B}(z) = \mathfrak{A}.T(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \mathfrak{A}(x)\; T\left(\frac{z}{x}\right) \frac{dx}{x} ,$$

où Γ est une courbe simple convenablement choisie.

Pour qu'une telle convolution soit un automorphisme de $\mathcal{H}^1(\underset{\sim}{C})$ à noyaux $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}^{-1}$ dans $\mathbb{M}$ (c'est-à-dire tels que $\mathfrak{A}(z)$ et $\mathfrak{A}^{-1}(z)$ soient des fonctions holomorphes dans $\underset{\sim}{C}$ privé d'un nombre fini de points autres que l'origine), il faut et il suffit que $\mathfrak{A}$ soit de la forme

$$\mathfrak{A}(X) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{a_\mu X^\mu}{1 - \alpha_\mu X^m}, \qquad a_\mu \in \underset{\sim}{C}^*, \quad \alpha_\mu \in \underset{\sim}{C}^* .$$

5. Quotient dans $\mathcal{R}(K)$.

Soit K un corps commutatif, de caractéristique zéro. Il s'agit d'étudier dans $\mathcal{R}(K)$ l'équation $\mathfrak{B}.T = \mathfrak{A}$.

Pour $\mathfrak{B} = \sum_n b_n X^n$, posons $I(\mathfrak{B}) = \{n , \ b_n = 0\}$; nous supposerons $I(\mathfrak{B}) = \emptyset$, cas auquel nous pouvons toujours nous ramener par un théorème de Mahler. Nous posons alors $a_n = b_n c_n$.

1° THÉORÈME de Pólya-Cantor ([8]). - Si $\mathfrak{B} \in \mathcal{L}(K)$, et c_n entier algébrique (sur $\underset{\sim}{Z}$) pour tout n , alors $C = \sum_n c_n X^n \in \mathcal{R}(K)$.

2° THÉORÈME de Pisot ([13]). - Soient $\mathfrak{B} \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$, $b_n = \sum_{i=0}^{s} P_i(n)\, \alpha_i^n$. Si $|\alpha_i| < |\alpha_0|$ pour $i = 1 , \dots , s$, et $c_n \in \underset{\sim}{Z}$ pour tout n , alors $C \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$.

3° DÉFINITION.

(a) Une suite (a_n) de $\underset{\sim}{Q}$ sera dite de Pólya, si presque toutes les valuations de $\underset{\sim}{Q}$ sont triviales sur la suite.

$\mathcal{S}((a_n))$ désignera l'ensemble fini des valuations exceptionnelles.

Une suite de nombres algébriques (a_n) est de Pólya, si la suite $(N(a_n))$, où $N(a)$ est la norme absolue de a , est de Pólya dans $\underset{\sim}{Q}$.

(b) Une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, $a_n \in K$, sera dite une fonction de Pólya, s'il existe un entier $m \geqslant 1$, des éléments $\alpha_0 , \dots , \alpha_{m-1}$ de K tels que

$$\text{pour } \mu = 0 , 1 , \dots , m-1 , \qquad a_{\mu+tm} = a_\mu . \alpha_\mu^t \quad \text{pour tout } t \in \underset{\sim}{N} .$$

4° Soit K un corps commutatif, extension de $\underset{\sim}{Q}$. Soient $\mathfrak{A} \in \mathcal{R}(K)$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{R}(K)$, $I(\mathfrak{B}) = \emptyset$ et $a_n = b_n c_n$.

Si (c_n) est une suite de Pólya de $\underset{\sim}{Q}$, alors $C = \sum_n c_n X^n$ est une fonction de Pólya.

Pour $\mathfrak{B} = \delta$, nous retrouvons un résultat de Pólya ([15]).

COROLLAIRE. - Soit (a_n) une suite de Pólya de $\mathbb{Q}$. Alors :

$$" \mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) " \iff \begin{cases} \mathfrak{A}_p = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) , \text{ pour tout } p \text{ premier,} \\ \text{et} \\ \mathfrak{A}_0 = \sum_n sg_n(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) . \end{cases}$$

La démonstration du théorème 4 se fait par récurrence sur card $\mathcal{S}((c_n))$ ([5]), et s'appuie sur les deux lemmes :

5° LEMME (a). - Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro. Soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{R}(K)$, et $a_n = b_n c_n$. Si (c_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, alors elle est périodique.

LEMME (b). - Soit $\mathfrak{A} = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$, et soit p un nombre premier. Alors il existe deux entiers m_0 et m, $m \geqslant 1$, tels que la fonction $t \longmapsto v_p(a_{m_0+tm})$ soit affine.

6° THÉORÈME. - Soient k un corps de nombres algébriques, et (a_n) une suite de Pólya de k. Alors :

$$" \mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(k) " \iff " \mathfrak{A} \text{ est une fonction de Pólya} " .$$

C'est l'extension à un corps de nombres d'un théorème de Pólya ([15]).

<u>Démonstration</u>. - Supposons $a_n \in k^*$ pour tout n, et soit N l'application norme de k dans $\mathbb{Q}$. Comme $\mathfrak{B} = \sum_{n=0}^{\infty} N(a_n) X^n = \prod_{\sigma \in Gal(k/\mathbb{Q})} \sigma\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$, et c'est une fonction de Pólya, donc inversible dans $\mathcal{R}(\mathbb{Q})$. Il en résulte que $\mathfrak{A}$ est inversible dans $\mathcal{R}(k)$, $\mathfrak{A}$ est donc une fonction de Pólya par le théorème 4.1.

7° Signalons les applications suivantes :

(a) Soit $a \in \mathbb{Q}^*$, $a \neq \pm 1$, soit $(\omega(n))$ une suite de $\mathbb{Z}$. Alors

$$" \sum_{n=0}^{\infty} a^{\omega(n)} X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) " \iff " \sum_{n=0}^{\infty} a^{-\omega(n)} X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) " \iff " \exists\, m \in \mathbb{N} ,\ m \geqslant 1 "$$

tel que, pour $\mu = 0 , 1 , \dots , m-1$, $t \longmapsto \omega(\mu + tm)$ est affine .

(b) Soit $\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}_p)$, $a_n \neq 0$ pour tout n , $a_n = p^{-v_p(a_n)} . b_n$.
Alors :

$$\sum_n |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) \iff \sum_n b_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}_p) .$$

De même, soit $\mathfrak{A} \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\sum_n |a_n| X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{R}) \iff \sum_n \operatorname{sgn}(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{R}) .$$

(c) Soit $\mathfrak{A} = \sum_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$, $\alpha_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $\beta_n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $(\alpha_n , \beta_n) = 1$. Si $\mathcal{S}((\alpha_n))$ est fini, et $\mathcal{S}((\alpha_n)) \cap \mathcal{S}((\beta_n)) = \emptyset$, alors $\sum_n \alpha_n X^n$ et $\sum_n \beta_n X^n$ sont des fonctions de Pólya.

(d) Soit (a_n) une suite d'entiers algébriques non nuls. Alors :

$$\sum_n \frac{X^n}{a_n} \in \mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}}) \implies \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}}) .$$

6. Suites de S-unités.

Soient k un corps de nombres algébriques, M_k l'ensemble de ses valuations, S_∞ l'ensemble de ses valuations archimédiennes, S une partie finie de M_k contenant S_∞ .

Soient $\mathbb{J}$ le groupe des idèles de k , $\mathbb{J}_S = \prod_{v \in S} k_v^* . \prod_{v \notin S} U_v$ le groupe des S-idèles de k ; k^* se plonge canoniquement dans $\mathbb{J}$, soit k_S l'image réciproque de $\mathbb{J}_S$; k_S est le groupe des S-unités de k .

Toute suite de S-unités de k est une suite de Pólya.

1° THÉORÈME. - Soient k un corps de nombres, $\mathfrak{O}$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{U}$ son groupe d'unités. Alors :

(a) $\mathcal{R}(k)$ est une $\mathcal{R}(\mathbb{Q})$-algèbre entière, libre de type fini, de rang $d = [k:\mathbb{Q}]$.

(b) $\mathcal{R}(\mathfrak{O})$ est une $\mathcal{R}(\mathbb{Z})$-algèbre entière, libre de type fini, de rang d .

(c) $\mathcal{R}(\mathfrak{U} , k)$ est le groupe des unités de $\mathcal{R}(\mathfrak{O})$, et

$$\mathcal{R}(\mathfrak{U} , k) \simeq \mathcal{S}_0' \times \mathcal{S}_1^r ,$$

où $\mathcal{S}_0'$ est un groupe commutatif dont tous les éléments sont d'ordre $\leqslant s$ (s ne dépendant que de k), $\mathcal{S}_1$ un groupe abélien, r le nombre de Dirichlet de k .

(a) et (b) résultent de la proposition 2.1 ; $\mathcal{R}(\mathcal{U}\ ,\ k)$ est le groupe des unités de $\mathcal{R}(\mathcal{U})$, par le corollaire de la proposition 2.4.

Soient ε une unité fondamentale de k , $(\varphi(n))$ une suite de $\underset{\sim}{Z}$, alors :

$$" \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(k) " \iff " \exists\ m \in \underset{\sim}{N}\ ,\ m \geqslant 1 " ,$$

tel que, pour $\mu = 0\ ,\ 1\ ,\ \dots\ ,\ m-1$,

$t \longmapsto \varphi(\mu + tm)$ est une fonction affine .

Pour un corps commutatif K , définissons :

$$\mathcal{S}_j(K) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\ ,\ \exists\ P_0\ ,\ \dots\ ,\ P_{m-1} \in K[X]$$

tels que $\deg P_\mu \leqslant j$ et $a_{\mu+tm} = P_\mu(t)$ pour tout $t \in \underset{\sim}{N}\}$.

Si $E \subset K$,

$$\mathcal{S}_j(E\ ,\ K) = \{\sum a_n X^n \in \mathcal{S}_j(K)\ ,\ a_n \in E\ ,\ \forall\ n \in \underset{\sim}{N}\} .$$

$\mathcal{S}_j(K)$ est un sous-groupe additif de $\mathcal{R}(K)$, $\mathcal{S}_0(K)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{R}(K)$.

Soit ε une unité fondamentale de k , alors le groupe multiplicatif

$$\mathcal{R}_\varepsilon = \{ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(k)\}$$

est isomorphe au groupe additif $\mathcal{S}_1(\underset{\sim}{Z}\ ,\ \underset{\sim}{Q})$, par l'application

$$\sum_n \varepsilon^{\varphi(n)} X^n \longmapsto \sum_n \varphi(n) X^n .$$

Si G est un sous-groupe multiplicatif fini de k , d'ordre s , $\mathcal{R}(G\ ,\ k)$ est isomorphe à un sous-groupe $\mathcal{S}_0^{\prime}$ de $\mathcal{S}_0(K)$ dont tous les éléments satisfont à $T^s = \delta$.

Si $\sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathcal{U}\ ,\ k)$,

$$a_n = \zeta_n\, \varepsilon_1^{\varphi_1(n)} \dots \varepsilon_r^{\varphi_r(n)} ,$$

les ε_j étant des unités fondamentales de k , ζ_n une racine de l'unité, par le théorème 4.1, pour chaque j , $\sum_n \varepsilon_j^{\varphi_j(n)} X^n \in \mathcal{R}(k)$ et $\sum_n \zeta_n X^n \in \mathcal{R}(k)$.

[Signalons que lorsque K est algébriquement fermé, $\mathcal{S}_0(K)$ est intégralement fermée dans $\mathcal{R}(K)$.

2° COROLLAIRES.

(a) Soient $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, $\overline{\mathfrak{a}}$ la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathfrak{u}}$ son groupe d'unités. Alors $\mathcal{R}(\overline{\mathfrak{u}}, \overline{\mathbb{Q}})$ est le groupe des unités de $\mathcal{R}(\overline{\mathfrak{a}})$. Γ étant le groupe des racines de l'unité, $\mathcal{R}(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}})$ est le groupe de torsion de $\mathcal{R}(\overline{\mathfrak{u}}, \overline{\mathbb{Q}})$.

(b) Soit (a_n) une suite d'unités algébriques vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. Alors il existe un entier $m \geqslant 1$, des unités $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ tels que, pour $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$a_{\mu+tm} = a_\mu . \alpha_\mu^t , \qquad \forall\, t \in \mathbb{N} .$$

3° THÉORÈME. - Soient S une partie finie de M_k, contenant S_∞, ℓ le nombre des S-unités fondamentales de k_S. Alors $\mathcal{S}_S = \mathcal{R}(k_S, k)$ est un sous-groupe multiplicatif du groupe des unités $\mathcal{S}$ de $\mathcal{R}(k)$, isomorphe à $\mathcal{S}'_0 \times \mathcal{S}_1^\ell$, et $\mathcal{S} = \varinjlim_S \mathcal{S}_S$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAGHOU (Benali). - Sur l'algèbre des fractions rationnelles de Hadamard, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, 1968, Série A, p. 652-654.

[2] BENZAGHOU (Benali). - Sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, 1968, Série A, p. 212-214.

[3] BENZAGHOU (Benali). - Sur les suites d'unités algébriques vérifiant une relation de récurrence linéaire, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, 1968, Série A, p. 913-915.

[4] BENZAGHOU (Benali). - Sur l'algèbre de Hadamard des fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 9e année, 1967/68, n° 15, 16 p.

[5] BENZAGHOU (Benali). - Sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 10e année, 1968/69, n° 1, 14 p.

[6] BENZAGHOU (Benali). - Anneaux de Fatou, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 10e année, 1968/69, n° 9, 8 p.

[7] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative. Chapitre 6 : Valuations. - Paris, Hermann, 1964 (Act. scient. et ind., 1308 ; Bourbaki, 30).

[8] CANTOR (David G.). - On arithmetic properties of coefficients of rational functions, Pacific J. of Math., t. 15, 1965, p. 55-58.

[9] DRESS (François). - Familles de séries formelles et ensembles de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 1, 1968, p. 1-44.

[10] FATOU (P.). - Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., Uppsala, t. 30, 1906, p. 335-400.

[11] HADAMARD (Jacques). - Théorème sur les séries entières, Acta Math., Uppsala, t. 22, 1899, p. 55-63.

[12] MAHLER (K.). - On the Taylor coefficients of rational functions, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 52, 1956, p. 39-48.

[13] PISOT (C.). - Conférences données à l'Institut Fourier de Grenoble, en 1959 (multigr.).

[14] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie 2, t. 7, 1938, p. 205-248.

[15] PÓLYA (G.). - Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen, J. für reine und angew. Math., t. 151, 1921, p. 1-31.

(Texte reçu le 25 mars 1969)

Benali BENZAGHOU
M. Ass. Fac. Sc. Alger
Maison des Etudiants arméniens
57 boulevard Jourdan
75 - PARIS 14