

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JEAN CELEYRETTE

Dualisation dans les algèbres abstraites

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, n° 1 (1968-1969), exp. n° 12, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_1_A7_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DUALISATION DANS LES ALGÈBRES ABSTRAITES

par Jean CELEYRETTE

1. Généralités sur les algèbres abstraites.

Une algèbre abstraite \mathfrak{A} est un couple noté $\langle A, \mathfrak{F} \rangle$ où A , support de \mathfrak{A} , est un ensemble non vide, et \mathfrak{F} est une famille d'opérations sur A portant sur un nombre fini de variables. Une sous-algèbre $\mathfrak{B} = \langle B, \mathfrak{F} \rangle$ de l'algèbre $\mathfrak{A} = \langle A, \mathfrak{F} \rangle$ est un couple pour lequel B est une partie non vide de A , stable pour tout f de \mathfrak{F} .

Une congruence C de $\mathfrak{A} = \langle A, \mathfrak{F} \rangle$ est une équivalence définie sur A , telle que pour tout f de \mathfrak{F} (supposée à n variables) et tout système

$$\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$$

de $2n$ éléments de A , l'hypothèse $x_i \equiv y_i \ (C)$ pour $i = 1, \dots, n$ entraîne

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(y_1, \dots, y_n) \ (C) \ .$$

On appellera opérations composées à n variables, les applications de A^n dans A définies comme suit :

(i) Les projections e_n^j ($j = 1, 2, \dots, n$), définies par

$$e_n^j(x_1, \dots, x_n) = x_j \ ,$$

sont des opérations composées à n variables.

(ii) Si p_1, \dots, p_q sont des opérations composées à n variables, et f une opération de \mathfrak{F} à q variables, $f(p_1, \dots, p_q)$, définie par

$$f(p_1, \dots, p_q)(x_1, \dots, x_n) = f(p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_q(x_1, \dots, x_n)) \ ,$$

est une opération composée à n variables.

(iii) On obtient, par (i) et (ii), toutes les opérations composées à n variables. Leur ensemble est noté \mathfrak{S}_n .

Une opération à 0 variable consiste à désigner un élément.

Si S est une partie de A , il existe une sous-algèbre minimum contenant S . Son support est noté \bar{S} . C'est l'ensemble des $g_n(x_1, \dots, x_n)$ où n décrit \mathbb{N} , g_n décrit \mathfrak{S}_n , et x_1, \dots, x_n sont des éléments de S , quelconques.

On montre que la famille des sous-algèbres d'une algèbre \mathcal{U} forme une famille de Moore algébrique, donc \cup -inductive.

On appellera translation, une application de A dans A obtenue à partir d'une opération (composée ou non) de \mathcal{U} , en fixant toutes les variables sauf une. Etant donnée l'algèbre $\mathcal{U} = \langle A, \mathcal{F} \rangle$, nous noterons \mathcal{S} la famille des opérations composées, \mathcal{K} celle des translations, \mathcal{K}_1 le demi-groupe unitaire engendré par \mathcal{K} . Une équivalence sur A est une congruence sur $\langle A, \mathcal{F} \rangle$ si, et seulement si, c'est une congruence sur $\langle A, \mathcal{K}_1 \rangle$. (Remarquons que toutes les opérations de $\langle A, \mathcal{K}_1 \rangle$ sont à une variable. On dit que l'algèbre est unaire.)

S'il existe une bijection entre les familles d'opérations \mathcal{F} et \mathcal{F}' de deux algèbres $\mathcal{U} = \langle A, \mathcal{F} \rangle$ et $\mathcal{U}' = \langle A', \mathcal{F}' \rangle$ conservant le nombre de variables des opérations, \mathcal{U} et \mathcal{U}' sont dites de même type. Nous utiliserons la même notation pour désigner deux opérations homologues dans la bijection précédente. Une application ϕ de A dans A' est alors un homomorphisme de $\mathcal{U} = \langle A, \mathcal{F} \rangle$ dans $\mathcal{U}' = \langle A', \mathcal{F}' \rangle$ si, pour tout f de \mathcal{F} (supposée à n variables) et tout x_1, x_2, \dots, x_n dans A ,

$$\phi f(x_1, \dots, x_n) = f(\phi x_1, \dots, \phi x_n) .$$

Les classes d'algèbres dont nous parlerons sont des classes d'algèbres de même type qui, lorsqu'elles contiennent une algèbre, contiennent toutes ses images isomorphes. Pour toutes ces notions, voir [3] par exemple.

A toute image homomorphe d'une algèbre \mathcal{U} nous ferons correspondre, dualement, le noyau de l'homomorphisme, c'est-à-dire sa congruence nucléaire. C'est pourquoi, à la fermeture de Moore : $X \rightarrow \bar{X}$ (de $\mathcal{P}(A)$ sur $\mathcal{S}(\mathcal{U})$, ensemble des sous-algèbres de \mathcal{U}), nous pouvons faire correspondre l'application $\mathcal{R} \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}$ (de l'ensemble $\Gamma(A)$ des équivalences de A sur l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des congruences de \mathcal{U}) qui à une équivalence \mathcal{R} associe la plus grande congruence $\tilde{\mathcal{R}}$ contenue dans \mathcal{R} . $\mathcal{C}(A)$ étant un sous-treillis complet de $\Gamma(A)$, $\tilde{\mathcal{R}}$ existe pour tout \mathcal{R} ; c'est le produit transitif des congruences contenues dans \mathcal{R} . On dit que $\tilde{\mathcal{R}}$ est analysée par \mathcal{R} (cf. [5]).

Si \mathcal{K}_1 est le demi-groupe unitaire, précédemment défini, on montre aisément que $\tilde{\mathcal{R}}$ est définie par

$$x \equiv y \ (\tilde{\mathcal{R}}) \iff (\forall h \in \mathcal{K}_1), hx \equiv hy \ (\mathcal{R}) .$$

D'autre part, les relations $\tilde{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, entraîne $\tilde{\mathcal{R}} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}$, $\tilde{\tilde{\mathcal{R}}} = \tilde{\mathcal{R}}$, montrent que l'application précédente est une fermeture de Moore inversée. On a évidemment

$$\bigcap_i \tilde{\mathcal{R}}_i = \widetilde{\bigcap_i \mathcal{R}_i} \quad \text{et} \quad \prod_i^t \tilde{\mathcal{R}}_i \subseteq \widetilde{\prod_i^t \mathcal{R}_i} .$$

Si S , partie de A , est telle que $\bar{S} = \mathcal{A}$, on dit que S engendre \mathcal{A} . Duale-
ment, nous dirons que l'équivalence \mathcal{R} analyse \mathcal{A} si $\tilde{\mathcal{R}}$ est l'égalité dans \mathcal{A} .
Toute algèbre \mathcal{A} a au moins une partie génératrice (A) et une équivalence analy-
sante (l'égalité dans \mathcal{A}).

2. Produit direct. Produit libre.

(a) Etant donnée une famille $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ d'algèbres de même type, on peut définir
sur le produit cartésien $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ une structure d'algèbres de même type, en défini-
sant les opérations composante par composante de façon habituelle.

L'algèbre ainsi construite, notée $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$, est appelée produit direct (complet)
des \mathcal{A}_i . Si une classe K contient le produit direct de toute famille d'algèbres
de K , nous dirons qu'elle "admet les produits directs", et nous noterons $\underline{P}(K) \subseteq K$.
Il est clair que, dans une classe K contenant le produit direct d'une famille
 $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ d'algèbres de K , $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ a la propriété universelle habituelle. La ré-
ciproque n'est pas vraie : La classe T des groupes de torsion contient un groupe
ayant la propriété universelle pour toute famille $(G_i)_{i \in I}$ de T , mais n'admet
pas les produits directs ([1] et [4]).

(b) On définit également le produit libre d'une famille d'algèbres. \mathcal{A} est pro-
duit libre dans K des algèbres $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ de K , si :

- (i) $\mathcal{A} \in K$;
- (ii) Il existe pour tout i un homomorphisme injectif $\psi_i : \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}$;
- (iii) \mathcal{A} est engendrée par $\bigcup_{i \in I} \psi_i \mathcal{A}_i$;
- (iv) Si \mathcal{B} est une algèbre de K et si, pour tout i , $\varphi_i : \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{B}$ est un
homomorphisme, il existe alors un homomorphisme $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tel que $\varphi_i = \varphi \circ \psi_i$.

[Pour des propriétés et des conditions suffisantes d'existence du produit libre,
voir [1] et [4]. Si K contient le produit libre de toute famille d'algèbres de
 K , nous dirons que K "admet les produits libres", et nous noterons $\underline{PL}(K) \subseteq K$.]

3. Algèbres libres (voir [2] et [4]).

(a) I , partie du support A de \mathcal{A} , est une partie libre de \mathcal{A} relativement à
une classe K (contenant \mathcal{A}), si toute application de I dans une algèbre quel-
conque \mathcal{B} de K peut être prolongée par un homomorphisme de la sous-algèbre \bar{I}
de \mathcal{A} dans \mathcal{B} . On montre que cet homomorphisme est unique.

La famille des parties libres de \mathfrak{A} est \cup -inductive. Il existe donc des parties libres maximales. De plus, toute partie d'une partie libre est libre.

(b) Une algèbre \mathfrak{A} est dite libre de base X sur une classe K , si :

(i) $\mathfrak{A} \in K$;

(ii) $\overline{X} = \mathfrak{A}$;

(iii) X est une partie libre de \mathfrak{A} relativement à K .

(c) On montre ([4]) qu'il y a équivalence entre :

(i) Il existe une classe K sur laquelle \mathfrak{A} est libre de base X ;

(ii) Il existe une classe K telle que $\underline{S}(K) \subseteq K$ (K contient toutes les sous-algèbres de ses algèbres), $\underline{H}(K) \subseteq K$ (K contient toutes les images homomorphes de ses algèbres), $\underline{P}(K) \subseteq K$, sur laquelle \mathfrak{A} est libre de base X ;

(iii) \mathfrak{A} est libre, de base X , sur la classe réduite à $\{\mathfrak{A}\}$.

(d) BIRKHOFF a établi l'existence (et donné une construction) d'algèbres libres sur toute classe K telle que : $\underline{S}(K) \subseteq K$, $\underline{H}(K) \subseteq K$, $\underline{P}(K) \subseteq K$. De plus, deux algèbres libres sur une même classe de bases X et X' équipotentes, sont isomorphes.

(e) On montre que toute base d'une algèbre libre est une partie libre maximale et un système générateur minimal. Les réciproques sont évidemment fausses (voir la classe des A -modules à gauche).

(f) Enfin, si dans la classe K existe une algèbre finie, deux bases d'une même algèbre ont même cardinal.

Pour résoudre le problème général des cardinaux des bases d'une algèbre libre, on a recours à un théorème d'échange :

THÉOREME. - Si $I = I_0 \cup J$ ($I_0 \cap J = \emptyset$) est une base de \mathfrak{A} , et si I_1 est une partie libre telle que $\overline{I_1} = \overline{I_0}$, $I' = I_1 \cup J$ est une autre base de \mathfrak{A} .

La plupart de ces propriétés peuvent être dualisées. Malheureusement les raisonnements seront faits sur des algèbres dont les opérations sont à une variable, ou "algèbres unaires".

4. Définition et existence des universels avec \mathfrak{N} -analyse.

(a) Une congruence C de $\mathfrak{A} = \langle A, \mathfrak{F} \rangle$ est "universellement analysée" sur une classe K , par l'équivalence \mathfrak{N} de A , si :

- (i) $\mathfrak{A} \in \mathbf{K}$;
(ii) $\mathfrak{N} = \mathbf{C}$;
(iii) Pour toute algèbre \mathfrak{B} de \mathbf{K} et toute application f de \mathfrak{B} dans $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$, il existe un homomorphisme φ de \mathfrak{B} dans \mathfrak{A}/\mathbf{C} tel que $f = \pi \circ \varphi$ (où π est la surjection canonique $\mathfrak{A}/\mathbf{C} \rightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{N}$).

L'algèbre \mathfrak{A} est un "universel avec \mathfrak{N} -analyse" sur \mathbf{K} , si :

- (i) $\mathfrak{A} \in \mathbf{K}$;
(ii) \mathfrak{N} analyse \mathfrak{A} (ou $\tilde{\mathfrak{N}} = \text{Id}_{\mathfrak{A}}$) ;
(iii) $\text{Id}_{\mathfrak{A}}$ est universellement analysée par \mathfrak{N} .

(b) L'existence peut se montrer en adaptant un raisonnement de Green ([5]). Il est clair que les congruences d'une algèbre unaire $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{A}, \mathfrak{F} \rangle$ et que les homomorphismes de \mathfrak{A} dans $\mathfrak{B} = \langle \mathbf{B}, \mathfrak{F} \rangle$ sont les congruences de $\mathfrak{A}' = \langle \mathbf{A}, \mathfrak{K}_1 \rangle$ et les homomorphismes de \mathfrak{A}' dans $\mathfrak{B}' = \langle \mathbf{B}, \mathfrak{K}_1 \rangle$ (voir §1). Nous supposons donc dans la suite que la famille d'opérations est un demi-groupe unitaire Σ .

Soit \mathbf{N} un ensemble. Posons

$$U = \mathbf{N}^{\Sigma} = \prod_{s \in \Sigma} \mathbf{N}_s$$

(avec $\mathbf{N}_s = \mathbf{N}$ pour tout s). On munit U d'une structure de Σ -algèbre par

$$(\forall u \in U), (\forall \mu \in \Sigma), (\forall \sigma \in \Sigma), \quad (\mu u)_{\sigma} = u_{\sigma \mu}.$$

On pose $\mathfrak{U} = \langle U, \Sigma \rangle$ ($(\mu u)_{\sigma}$ est la σ -ième composante de μu , $u_{\sigma \mu}$ est la $\sigma \mu$ -ième composante de u).

1° Σ est alors un demi-groupe unitaire d'opérations pour \mathfrak{U} . En effet, pour tout σ de Σ , tout μ de Σ , tout ν de Σ , tout u de U ,

$$[\mu(\nu u)]_{\sigma} = [(\mu \nu)u]_{\sigma}.$$

Si i est l'unité de Σ , $[i(u)]_{\sigma} = u_{\sigma}$.

2° L'équivalence nucléaire \mathfrak{Q}_i de la i -ième projection analyse \mathfrak{U} . Si \mathbf{C} est une Σ -congruence contenue dans \mathfrak{Q}_i , et si $u \equiv v$ (\mathbf{C}), pour tout σ de Σ , $\sigma u \equiv \sigma v$ (\mathbf{C}), soit $\sigma u \equiv \sigma v$ (\mathfrak{Q}_i). Donc $(\sigma u)_i = (\sigma v)_i$, soit $u_{i\sigma} = v_{i\sigma}$. Finalement, pour tout σ de Σ , $u_{\sigma} = v_{\sigma}$, soit $u = v$.

D'où : $\mathbf{C} = \text{Id}_{\mathfrak{U}}$.

3° Tout diagramme

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\pi_i} & \mathcal{U}/\mathcal{Q}_i \\ & \nearrow f & \\ \mathcal{B} & & \end{array} ,$$

où π_i est la surjection canonique, et \mathcal{B} une algèbre d'une classe contenant \mathcal{U} , peut être rendu commutatif par un homomorphisme $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U}$. Il existe une bijection canonique entre $\mathcal{U}/\mathcal{Q}_i$ et N_i . Soit φ_i l'application de \mathcal{B} dans N_i correspondant à f .

Pour tout s de Σ , on définit $\varphi_s : \mathcal{B} \rightarrow N_s$ par $\varphi_s(b) = \varphi_1(sb)$. Ceci définit une application unique $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U}$ qui rend commutatif le diagramme (1), et qui est tel que

$$(\forall s \in \Sigma), (\forall b \in \mathcal{B}), \quad (\varphi(b))_s = \varphi_s(b) .$$

Il reste à montrer que φ est un Σ -homomorphisme.

$$(\forall v \in \Sigma), (\forall s \in \Sigma), (\forall b \in \mathcal{B}),$$

$$[\varphi(vb)]_s = \varphi_s(vb) = \varphi_1(svb) = \varphi_{sv}(b) = [\varphi(b)]_{sv} = [v\varphi(b)]_s .$$

$$\text{D'où : } (\forall v \in \Sigma), \quad \varphi(vb) = v\varphi(b) .$$

(c) La même démonstration peut se faire à partir de \mathcal{Q}_a , où a est un élément inversible à droite de Σ .

Il suffit donc de raisonner dans le cas d'un demi-groupe unitaire Σ ayant plusieurs éléments inversibles à droite, pour obtenir un universel, universellement analysé par plusieurs équivalences.

5. Propriétés des universels sur des classes d'algèbres unaires.

PROPOSITION 1. - Il y a équivalence entre :

- (i) $\mathcal{U} = \langle \mathcal{U}, \Sigma \rangle$ est universel avec \mathcal{N} -analyse sur une classe K ;
- (ii) $\mathcal{U} = \langle \mathcal{U}, \Sigma \rangle$ est universel avec \mathcal{N} -analyse sur la classe réduite à $\{U\}$;
- (iii) $\mathcal{U} = \langle \mathcal{U}, \Sigma \rangle$ est universel avec \mathcal{N} -analyse sur une classe K , telle que

$$\underline{S}(K) \subseteq K, \quad \underline{H}(K) \subseteq K, \quad \underline{PL}(K) \subseteq K .$$

Il suffit de montrer que (i) \implies (iii). On voit immédiatement qu'on peut se ramener au cas où $\underline{S}(K) \subseteq K$, $\underline{PL}(K) \subseteq K$.

Si $\psi(\mathcal{B})$ est image homomorphe d'une algèbre \mathcal{B} de K , et si g est une application de $\psi(\mathcal{B})$ dans \mathcal{U}/\mathcal{N} , il existe ζ homomorphisme de \mathcal{B} dans \mathcal{U} , tel que

$\pi_{\mathfrak{N}} \circ \zeta = g \circ \psi$. Si b et b_1 de \mathfrak{B} ont même image par ψ , on a, pour tout σ de Σ ,

$$\pi_{\mathfrak{N}} \zeta(\sigma b) = \pi_{\mathfrak{N}} \zeta(\sigma b_1) = \pi_{\mathfrak{N}} \sigma \zeta(b) = \pi_{\mathfrak{N}} \sigma \zeta(b_1) .$$

Comme $\tilde{\mathfrak{N}} = \text{Id}_{\mathfrak{U}}$, $\zeta(b) = \zeta(b_1)$.

ζ se factorise par ψ , et il existe ζ' (qui est évidemment un homomorphisme) tel que $\zeta = \zeta' \circ \psi$.

Nous parlerons donc d'universel sans préciser sur quelle classe.

PROPOSITION 2 (Unicité). - Si \mathfrak{U} et \mathfrak{U}' sont deux universels sur une même classe K , avec \mathfrak{N} - (resp. \mathfrak{N}' -) analyse, tels que $|\mathfrak{U}/\mathfrak{N}| = |\mathfrak{U}'/\mathfrak{N}'|$, \mathfrak{U} et \mathfrak{U}' sont isomorphes.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{U} & \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{N}}} & \mathfrak{U}/\mathfrak{N} \\ \theta \downarrow \uparrow \varphi & & j^{-1} \downarrow \uparrow j \\ \mathfrak{U}' & \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{N}'}} & \mathfrak{U}'/\mathfrak{N}' \end{array} ,$$

où j et j^{-1} sont deux bijections réciproques, montre l'existence de deux homomorphismes θ et φ tels que $\pi_{\mathfrak{N}'} \theta = \pi_{\mathfrak{N}}$, et $\pi_{\mathfrak{N}} \varphi = \pi_{\mathfrak{N}'}$. On en déduit,

$$(\forall \sigma \in \Sigma) , (\forall u' \in \mathfrak{U}') , \quad \pi_{\mathfrak{N}'} \theta \varphi(u') = \pi_{\mathfrak{N}'} \sigma u' .$$

D'où $\theta \varphi = \text{Id}_{\mathfrak{U}}$, et, de même, $\varphi \theta = \text{Id}_{\mathfrak{U}'}$.

PROPOSITION 3 (Unicité de l'homomorphisme φ associé à une application f donnée de \mathfrak{B} dans $\mathfrak{U}/\mathfrak{N}$). - Si φ et ψ sont deux homomorphismes de \mathfrak{B} dans \mathfrak{U} , tels que $\pi_{\mathfrak{N}} \circ \varphi = \pi_{\mathfrak{N}} \circ \psi = f$, comme précédemment, $\varphi = \psi$.

PROPOSITION 4. - Si \mathfrak{U} est un universel avec \mathfrak{N} -analyse, et si \mathfrak{N}' est une équivalence contenant \mathfrak{N} , \mathfrak{N}' analyse universellement une congruence C .

Utilisant la surjection canonique $\pi : \mathfrak{U}/\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{U}/\mathfrak{N}'$, on associe à toute application f d'une algèbre \mathfrak{B} dans $\mathfrak{U}/\mathfrak{N}'$, une application g de \mathfrak{B} dans $\mathfrak{U}/\mathfrak{N}$ telle que $\pi \circ g = f$, et l'homomorphisme ζ de \mathfrak{B} dans \mathfrak{U} tel que $\pi_{\mathfrak{N}} \circ \zeta = g$.

Posant $C = \tilde{\mathfrak{N}}'$, on montre aisément que, si π_C est l'homomorphisme surjectif canonique de \mathfrak{U} sur \mathfrak{U}/C , $\pi_C \circ \zeta$ est l'homomorphisme qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{U}/\mathcal{C} & \xrightarrow{\pi'} & \mathcal{U}/\mathcal{N}' \\
 & \nearrow f & \\
 \mathcal{B} & &
 \end{array}
 \quad (\pi' \text{ surjection canonique}) .$$

PROPOSITION 5. - Si l'équivalence \mathcal{N} analyse universellement \mathcal{U} , \mathcal{N} est maximale parmi les équivalences qui analysent \mathcal{U} .

Si une équivalence \mathcal{M} contient \mathcal{N} , soient N_1 et N_2 deux \mathcal{N} -classes contenues dans une \mathcal{M} -classe. Soit $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U}/\mathcal{N}$ une application telle que si b de \mathcal{B} est fixé, $f(b) = N_1$ et $f(x) = N_2$ (pour $x \neq b$). L'homomorphisme $\omega: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U}$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{U} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{N}}} & \mathcal{U}/\mathcal{N} \\
 & \nearrow f & \\
 \mathcal{B} & &
 \end{array} ,$$

est tel que, pour tout σ de Σ ,

$$\sigma\omega(x) \equiv \omega(\sigma(x)) \quad (\mathcal{M}) ,$$

soit $\omega(x) = \omega(b)$ et $N_1 = N_2$.

PROPOSITION 6. - Si \mathcal{N} analyse universellement \mathcal{U} , \mathcal{N} est minimale parmi les équivalences de \mathcal{U} qui analysent universellement des congruences de \mathcal{U} .

Si $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$, alors $\tilde{\mathcal{N}}' = \text{Id}_{\mathcal{U}}$. Il existe alors une application $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U}/\mathcal{N}'$ à laquelle on ne peut associer d'homomorphisme de \mathcal{B} dans \mathcal{U} . Il suffit de considérer f qui envoie un élément de \mathcal{B} sur une \mathcal{N}' -classe, et les autres sur une autre \mathcal{N}' -classe, contenue dans la même \mathcal{N} -classe. La démonstration précédente s'applique alors.

6. Diverses équivalences analysant universellement un universel (les algèbres sont unaires).

Une remarque précédente a montré qu'un universel pouvait admettre plusieurs équivalences l'analysant universellement.

PROPOSITION 1. - Si une algèbre $\mathcal{U} = \langle \mathcal{U}, \Sigma \rangle$ est un universel sur une classe contenant une algèbre finie, deux équivalences \mathcal{M} et \mathcal{N} analysant universellement \mathcal{U} sont telles que $|\mathcal{U}/\mathcal{M}| = |\mathcal{U}/\mathcal{N}|$.

Soit \mathfrak{B} une algèbre finie de K . On a $|\mathfrak{B}| = p$. Il est clair que l'ensemble des homomorphismes de \mathfrak{B} dans \mathcal{U} est équipotent à l'ensemble des applications de \mathfrak{B} dans \mathcal{U}/\mathfrak{n} (cardinal : $|\mathcal{U}/\mathfrak{n}|^p$), ou à celui des applications de \mathfrak{B} dans \mathcal{U}/\mathfrak{m} (cardinal : $|\mathcal{U}/\mathfrak{m}|^p$). D'où $|\mathcal{U}/\mathfrak{n}| = |\mathcal{U}/\mathfrak{m}|$.

THÉORÈME DE L'ÉCHANGE. - $\mathcal{U} = \langle U, \Sigma \rangle$ étant un universel avec \mathfrak{P} -analyse sur une classe K , telle que $\underline{\mathfrak{P}}(K) \subseteq K$, \mathfrak{K} et \mathfrak{M} deux équivalences telles que

$$\mathcal{U}/\mathfrak{P} \simeq \mathcal{U}/\mathfrak{K} \times \mathcal{U}/\mathfrak{M},$$

$\tilde{\mathfrak{n}}$ une équivalence analysant universellement $\tilde{\mathfrak{n}} = \tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{C}$, alors $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{K}$ analyse universellement \mathcal{U} et $\mathcal{U}/(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{K}) \simeq \mathcal{U}/\mathfrak{n} \times \mathcal{U}/\mathfrak{K}$.

(La démonstration est la même avec $\tilde{\mathfrak{P}} \neq \text{Id}_{\mathcal{U}}$.)

LEMME. - Si \mathfrak{P} analyse universellement \mathcal{U} (sur K telle que $\underline{\mathfrak{P}}(K) \subseteq K$), et si \mathfrak{K} et \mathfrak{M} sont deux équivalences, telles que $\mathcal{U}/\mathfrak{P} \simeq \mathcal{U}/\mathfrak{K} \times \mathcal{U}/\mathfrak{M}$, \mathcal{U} est isomorphe à $\mathcal{U}/\tilde{\mathfrak{K}} \times \mathcal{U}/\tilde{\mathfrak{M}}$.

Puisque $\underline{\mathfrak{P}}(K) \subseteq K$, il suffit de montrer qu'à tout couple d'homomorphismes $\varphi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{U}/\tilde{\mathfrak{K}}$ et $\varphi_1 : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{U}/\tilde{\mathfrak{M}}$, on peut associer un homomorphisme unique ψ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U}/\tilde{\mathfrak{M}} & \xleftarrow{\pi_{\tilde{\mathfrak{M}}}} & \mathcal{U} & \xrightarrow{\pi_{\tilde{\mathfrak{K}}}} & \mathcal{U}/\tilde{\mathfrak{K}} \\ & \searrow \varphi_1 & \uparrow \psi & \swarrow \varphi & \\ & & \mathfrak{B} & & \end{array}$$

Soient $\pi_{\tilde{\mathfrak{M}}} : \mathcal{U}/\tilde{\mathfrak{M}} \rightarrow \mathcal{U}/\mathfrak{M}$ et $\pi_{\tilde{\mathfrak{K}}} : \mathcal{U}/\tilde{\mathfrak{K}} \rightarrow \mathcal{U}/\mathfrak{K}$ les surjections canoniques habituelles. Posons $f = \pi_{\tilde{\mathfrak{K}}} \circ \varphi$, $f_1 = \pi_{\tilde{\mathfrak{M}}} \circ \varphi_1$. Elles définissent une application $g : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{U}/\mathfrak{P}$. Soit ζ l'homomorphisme correspondant de \mathfrak{B} dans \mathcal{U} . Montrons que ζ répond à la question. On a $\pi_{\tilde{\mathfrak{K}}} \pi_{\tilde{\mathfrak{K}}} \zeta(b) = \pi_{\tilde{\mathfrak{K}}} \varphi(b)$ pour tout b de \mathfrak{B} . Alors $(\forall \sigma \in \Sigma)$, $(\forall b \in \mathfrak{B})$, $\pi_{\tilde{\mathfrak{K}}} \sigma \pi_{\tilde{\mathfrak{K}}} \zeta(b) = \pi_{\tilde{\mathfrak{K}}} \sigma \varphi(b)$.

D'où : $\pi_{\tilde{\mathfrak{K}}} \zeta(b) = \varphi(b)$ et, de même, $\pi_{\tilde{\mathfrak{M}}} \zeta(b) = \varphi_1(b)$.

L'unicité de ζ est évidente, car s'il existe ζ' ayant la même propriété,

$$(\forall b \in \mathfrak{B}), \quad \pi_{\tilde{\mathfrak{M}}} \zeta(b) = \pi_{\tilde{\mathfrak{M}}} \zeta'(b) = \varphi_1(b),$$

$$\pi_{\tilde{\mathfrak{K}}} \zeta(b) = \pi_{\tilde{\mathfrak{K}}} \zeta'(b) = \varphi(b).$$

D'où $\zeta(b) = \zeta'(b)$ ($\tilde{\mathfrak{M}} \cap \tilde{\mathfrak{K}}$). Or $\tilde{\mathfrak{M}} \cap \tilde{\mathfrak{K}} = \widetilde{\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}} = \tilde{\mathfrak{P}} = \text{Id}_{\mathcal{U}}$. D'où $\zeta = \zeta'$. Finalement $\zeta = \psi$.

Démonstration du théorème de l'échange. - \mathcal{K} et \mathcal{M} analysent universellement $\tilde{\mathcal{K}}$ et $\tilde{\mathcal{M}}$ (prop. 4, § 5).

$$\widetilde{\mathcal{N} \cap \mathcal{K}} = \tilde{\mathcal{N}} \cap \tilde{\mathcal{K}} = \tilde{\mathcal{M}} \cap \tilde{\mathcal{K}} = \widetilde{\mathcal{M} \cap \mathcal{K}} = \mathfrak{P} = \text{Id}_{\mathcal{U}} .$$

Le lemme montre que $\mathcal{U} \simeq \mathcal{U}/\tilde{\mathcal{K}} \times \mathcal{U}/\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{U}/\tilde{\mathcal{K}} \times \mathcal{U}/\tilde{\mathcal{N}}$. D'où $\mathcal{N} \cdot \mathcal{K} \simeq \tilde{\mathcal{N}} \cdot \tilde{\mathcal{K}} =$ congruence universelle. Finalement $\mathcal{U}/(\mathcal{N} \cap \mathcal{K}) \simeq \mathcal{U}/\mathcal{N} \times \mathcal{U}/\mathcal{K}$.

Il reste à montrer que $\mathcal{N} \cap \mathcal{K}$ analyse universellement \mathcal{U} . Soient σ une application de \mathfrak{B} dans $\mathcal{U}/(\mathcal{N} \cap \mathcal{K})$, $\pi_{\mathcal{N}}$ la surjection canonique de $\mathcal{U}/(\mathcal{N} \cap \mathcal{K})$ sur \mathcal{U}/\mathcal{N} . Or $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{N}}$ est universellement analysée par \mathcal{N} , il existe donc un homomorphisme $h_1 : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{U}/\mathcal{C}$ rendant commutatif la partie droite du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{U}/\mathcal{M} & \xleftarrow{\pi_{\mathcal{C}\mathcal{M}}} & \mathcal{U}/\mathcal{C} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{C}\mathcal{M}}} & \mathcal{U}/\mathcal{N} \\
 & \swarrow \sigma' & \uparrow h_1 & \searrow \pi_{\mathcal{N}} & \\
 & & \mathfrak{B} & \nearrow \sigma & \\
 & & & & \mathcal{U}/(\mathcal{N} \cap \mathcal{K})
 \end{array}$$

Soit σ' l'application rendant commutative la partie gauche. Les applications : $\pi_{\mathcal{K}} \circ \sigma : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{U}/\mathcal{K}$, $\sigma' : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{U}/\mathcal{M}$, permettent de définir

$$s : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{U}/\mathfrak{P} \quad (\simeq \mathcal{U}/\mathcal{K} \times \mathcal{U}/\mathcal{M}) .$$

Soit h l'homomorphisme de \mathfrak{B} dans \mathcal{U} , associé à s .

(a) Les définitions de s et de h montrent que le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{U} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{U}/\mathfrak{P} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{U}/\mathfrak{K} \\
 & \swarrow h & \uparrow s & \searrow \pi_{\mathcal{K}} \circ \sigma & \\
 & & \mathfrak{B} & &
 \end{array}$$

(b) La partie droite du diagramme ci-dessous est commutative, d'après la définition de σ' .

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{U} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{C}}} & \mathcal{U}/\mathcal{C} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{C}\mathcal{M}}} & \mathcal{U}/\mathcal{M} \\
 & \swarrow h & \uparrow h_1 & \searrow \sigma' & \\
 & & \mathfrak{B} & &
 \end{array}$$

On montre aisément que $\pi_{\mathbb{C}\mathbb{T}} h_1 = \pi_{\mathbb{C}\mathbb{T}} \pi_{\mathbb{C}} h$. L'unicité de l'homomorphisme de \mathbb{B} dans \mathcal{U}/\mathbb{C} associé à σ' montre que $h_1 = \pi_{\mathbb{C}} \circ h$.

(c) Soit $\pi_{\mathbb{T}\cap\mathbb{K}}$ la surjection canonique $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/(\mathbb{T} \cap \mathbb{K})$. Utilisant la commutativité des diagrammes précédents, on montre que σ et $\pi_{\mathbb{T}\cap\mathbb{K}} \circ h$ ont mêmes composantes sur \mathcal{U}/\mathbb{T} et \mathcal{U}/\mathbb{K} , donc sont égales.

Remarque. - On peut alors établir que, si un universel \mathcal{U} est universellement analysé par \mathbb{T} et \mathbb{B} telles que $|\mathcal{U}/\mathbb{T}|$ divise $|\mathcal{U}/\mathbb{B}|$, il existe une équivalence $\mathbb{B}' \supseteq \mathbb{B}$ telle que $|\mathcal{U}/\mathbb{B}'| = |\mathcal{U}/\mathbb{T}|$, et une équivalence \mathbb{K} , telles que

$$\mathcal{U}/\mathbb{B} \simeq \mathcal{U}/\mathbb{K} \times \mathcal{U}/\mathbb{B}' .$$

On peut alors montrer que, si \mathbb{T} et \mathbb{B} vérifient les conditions précédentes, et si \mathbb{T} analyse universellement \mathcal{U} , les cardinaux des ensembles-quotients, correspondant aux équivalences analysant universellement \mathcal{U} , forment des progressions géométriques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COHN (P. M.). - Universal algebra. - New York, Harper and Row, 1966 (A Harper international Student Reprint).
- [2] CRESTEY (Maurice). - Travaux récents sur les algèbres universelles, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 19e année, 1965/66, n° 4, 9 p.
- [3] DUBREIL (Paul). - Cours de la Faculté des Sciences de Paris (non publié).
- [4] GRÄTZER (Georges). - Universal algebra (à paraître).
- [5] GREEN (J. A.). - A duality in abstract algebra, J. London math. Soc., t. 27, 1952, p. 64-73.

(Texte remis le 17 mars 1969)

Jean CELEYRETTE
 Ass. Fac. Sc. Paris
 63 avenue des Lacs
 94 - SAINT-NAUR
