Michel Hacque

Mono-sous-catégories d'une catégorie de modules

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, nº 1 (1968-1969), exp. nº 9, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_1_A6_0>

MONO-SOUS-CATÉGORIES D'UNE CATÉGORIE DE MODULES

par Michel HACQUE

Dans la suite, $\mathfrak{A}$ désigne la catégorie des modules à gauche sur un anneau unitaire A.

Une mono-sous-catégorie $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{A}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}$, stable par sous-objets, stable par limites projectives, et telle que tout objet de $\mathfrak{M}$ se plonge dans un objet de $\mathfrak{M}$, injectif dans $\mathfrak{A}$ ([7]).

La terminologie relative aux sous-catégories coréflectives et aux coréflecteurs sera celle de [7]. La terminologie relative à la localisation, en particulier en ce qui concerne les sous-catégories fermées, épaisses, localisantes, et les ensembles topologisants et idempotents, sera celle de [3] ou de [1] (ex. 17 à 25, p. 157-165).

1. Caractérisation des mono-sous-catégories.

Pour toute sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A}$, soit $\mathfrak{M} = m(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}$ caractérisée par les objets M de $\mathfrak{A}$ pour lesquels $\mathrm{Hom}(N , M) = \{0\}$ pour tout objet N de $\mathcal{C}$. De même, pour toute sous-catégorie $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{A}$, soit $\mathcal{C} = c(\mathfrak{M})$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}$ caractérisée par les objets N de $\mathfrak{A}$ pour lesquels $\mathrm{Hom}(N , M) = \{0\}$ pour tout objet M de $\mathfrak{M}$.

Soient m et c, les applications de la classe des sous-catégories de $\mathfrak{A}$, dans elle-même, caractérisées par les conditions précédentes.

LEMME 1.1. - Pour toute sous-catégorie fermée $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A}$, la sous-catégorie $\mathfrak{M} = m(\mathcal{C})$ est une mono-sous-catégorie de $\mathfrak{A}$.

La stabilité de $\mathfrak{M}$ par sous-objets et par limites projectives est évidente. Si $\mathfrak{F}$ est l'ensemble topologisant associé à $\mathcal{C}$, les objets M de $\mathfrak{M}$ sont caractérisés par $\mathfrak{F}M = 0$, ce qui montre que $\mathfrak{M}$ est stable par enveloppes injectives.

LEMME 1.2. - Pour toute mono-sous-catégorie $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{A}$, la sous-catégorie $\mathcal{C} = c(\mathfrak{M})$ est une sous-catégorie localisante de $\mathfrak{A}$.

Cette propriété résulte du fait que $\mathcal{C}$ peut être caractérisée par les objets N de $\mathfrak{A}$ pour lesquels $\mathrm{Hom}(N , Q) = \{0\}$, pour tout objet Q de $\mathfrak{M}$, injectif dans $\mathfrak{A}$.

LEMME 1.3. - Etant donné un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant, pour que $\mathfrak{F}$ soit idempotent, il faut et il suffit que $\mathfrak{F}(M/\mathfrak{F}M) = 0$ pour tout objet M de $\mathfrak{A}$.

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

COROLLAIRE 1.4. - Etant donnée une sous-catégorie fermée $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A}$, associée à un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant, si $\mathfrak{M} = m(\mathcal{C})$ et si $\overline{\mathcal{C}} = c(\mathfrak{M})$, alors :

(a) La sous-catégorie localisante $\overline{\mathcal{C}}$ de $\mathfrak{A}$, dite engendrée par $\mathcal{C}$, est la plus petite sous-catégorie localisante contenant $\mathcal{C}$.

(b) L'ensemble $\overline{\mathfrak{F}}$ topologisant et idempotent, associé à $\overline{\mathcal{C}}$, est le moins fin des ensembles topologisants et idempotents plus fins que $\mathfrak{F}$.

(c) Si R est un coréflecteur de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{M}$, tout objet M de $\mathfrak{A}$ détermine une suite exacte :

$$0 \to \overline{\mathfrak{F}}M \to M \to RM \to 0 \quad .$$

L'équivalence des conditions $\mathfrak{F}M = 0$ et $\overline{\mathfrak{F}}M = 0$, le lemme 1.3, et la caractérisation classique d'un coréflecteur R de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{M}$, permettent de démontrer (c), ainsi que la relation $\mathfrak{F}M \subset \overline{\mathfrak{F}}M$ pour tout objet M de $\mathfrak{A}$. Si $\mathcal{C}$ est localisante, le lemme 3.1 montre alors que $\mathfrak{F} = \overline{\mathfrak{F}}$. Il en résulte aisément les propriétés (a) et (b).

LEMME 1.5. - Etant donnée une catégorie abélienne $\mathfrak{A}$ quelconque, soit $\mathfrak{B}$ une sous-catégorie pleine coréflective de $\mathfrak{A}$, telle que le coréflecteur T de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ soit exact à gauche ; alors le noyau de T est une sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A}$, et $\mathfrak{B}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}$ caractérisée par les objets $\mathcal{C}$-fermés.

La démonstration qui repose sur la proposition 5.3 de [7] (p. 130), sur une adaptation de la proposition 5 de [3] (p. 374), et sur le corollaire de la proposition 3 de [3] (p. 371), est laissée aux soins du lecteur.

PROPOSITION 1.6. - Etant donnée une mono-sous-catégorie $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{A}$, si la sous-catégorie localisante $\mathcal{C} = c(\mathfrak{M})$ est associée à un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant et idempotent, alors :

1° La mono-sous-catégorie $\mathfrak{M}$ est identique à la mono-sous-catégorie $\overline{\mathfrak{M}} = m(\mathcal{C})$.

2° Pour tout objet L de $\mathfrak{A}$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) L est un objet de la sous-catégorie pleine $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{A}$ caractérisée par les objets <u>purs</u> de $\mathfrak{M}$;

(a') L est un objet de $\mathfrak{M}$, et pour tout monomorphisme $L \to M$ tel que M soit un objet de $\mathfrak{M}$, alors M/L est un objet de $\mathfrak{M}$;

(b) L est un objet $\mathcal{C}$-fermé ;

(b') L est un objet de $\mathcal{M}$, et pour tout monomorphisme $L \to M$ tel que M/L soit un objet de $\mathcal{C}$, alors L est un facteur direct de M ;

(c) $\mathrm{Hom}(N , L) = \{0\}$ et $\mathrm{Ext}^1(N , L) = \{0\}$, pour tout objet N de $\mathcal{C}$;

(d) L'application canonique $\mathrm{Hom}(A , L) \to \mathrm{Hom}(I , L)$ est bijective pour tout $I \in \mathfrak{I}$.

En désignant par $\mathcal{L}$ et $\overline{\mathcal{L}}$ les sous-catégories pleines caractérisées par les objets purs de $\mathcal{M}$ et de $\overline{\mathcal{M}}$, le théorème 6.8 de [7] (p. 135), la démonstration du lemme 6.6 de [7] (p. 134), et le lemme 1.5, permettent de montrer que $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$, ce qui entraîne de plus l'équivalence de 2° (a) et de 2° (b). Il en résulte facilement que $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$. L'équivalence de 2° (a) et de 2° (a') résulte de la définition d'un objet pur, et l'équivalence de 2° (b) et de 2° (b') résulte de la définition des objets $\mathcal{C}$-fermés et du lemme 1 de [3] (p. 370).

Tout monomorphisme $L \to M$ détermine des suites exactes :

$$0 \to \mathrm{Hom}(N , L) \to \mathrm{Hom}(N , M) \to \mathrm{Hom}(N , M/L) \to \mathrm{Ext}^1(N , L) \to \mathrm{Ext}^1(N , M) .$$

Compte tenu de la relation $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$, si L est un objet de $\mathcal{M}$, et si M est un objet de $\mathcal{M}$ injectif dans $\mathcal{A}$, ces suites exactes permettent de montrer que 2° (a') implique 2° (c). Réciproquement, ces suites exactes permettent de montrer que 2°(c) implique 2° (a').

Un argument analogue montre que 2° (c) implique 2° (d), et la proposition 4 de [3] (p. 413) permet de montrer que 2° (d) implique 2° (b).

THÉORÈME 1.7. - Etant donnée une catégorie $\mathcal{A}$ de modules à gauche sur un anneau unitaire A , alors :

1° L'application m est une <u>surjection</u> de l'ensemble des sous-catégories <u>fermées</u> de $\mathcal{A}$ sur l'ensemble des <u>mono-sous-catégories</u> de $\mathcal{A}$.

2° Cette application détermine par restriction une <u>bijection</u> entre l'ensemble des sous-catégories <u>localisantes</u> de $\mathcal{A}$ et l'ensemble des <u>mono-sous-catégories</u> de $\mathcal{A}$.

La première propriété résulte de la première partie de la proposition 1.6, et la seconde propriété résulte alors du corollaire 1.4.

COROLLAIRE 1.8. - Il existe une bijection entre l'ensemble des sous-catégories localisantes $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ et l'ensemble des sous-catégories pleines coréflectives, à coréflecteurs exacts à gauche, $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}$.

De plus, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{L}$ sont associées par cette bijection, alors :

(a) La sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$, caractérisée par les objets N de $\mathcal{A}$ vérifiant $\mathrm{Hom}(N , L) = \{0\}$ pour tout objet L de $\mathcal{L}$.

(b) La sous-catégorie pleine, coréflective, à coréflecteurs exacts à gauche, $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}$, est caractérisée par les objets L de $\mathcal{A}$ vérifiant $\mathrm{Hom}(N , L) = \{0\}$ et $\mathrm{Ext}^1(N , L) = \{0\}$ pour tout objet N de $\mathcal{C}$.

En effet, d'après le lemme 1.5, une telle catégorie $\mathcal{L}$ est parfaitement déterminée par la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ noyau du coréflecteur, et comme elle coïncide avec la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ caractérisée par les objets $\mathcal{C}$-fermés, c'est-à-dire par les objets purs de la mono-sous-catégorie $\mathcal{M} = m(\mathcal{C})$, compte tenu du théorème 1.7, la condition (a) est alors évidente, et la condition (b) résulte de la proposition 1.6.

COROLLAIRE 1.9. - Etant donnée une mono-sous-catégorie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$, soit $\mathcal{L}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ caractérisée par les objets purs de $\mathcal{M}$; alors pour tout objet Q de $\mathcal{M}$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) Q est injectif dans $\mathcal{A}$.

(b) Q est injectif dans $\mathcal{M}$.

(c) Q est un objet de $\mathcal{L}$, injectif dans $\mathcal{L}$.

L'équivalence de (a) et de (c) est connue (ex. 3 de [7], p. 139).

L'équivalence de (a) et de (b) peut se démontrer par une méthode analogue, mais avec une hypothèse plus faible : il suffit que le coréflecteur préserve les monomorphismes. Compte tenu du théorème 1.7, la partie (c) du corollaire 1.4 montre que cette condition est effectivement réalisée.

2. Propriétés générales des mono-sous-catégories.

Dans ce paragraphe, $\mathcal{M}$ désigne une mono-sous-catégorie de $\mathcal{A}$, et R un coréflecteur de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}$. Compte tenu du théorème 1.7, $\mathcal{C}$ désignera la sous-catégorie localisante et $\mathcal{T}$ l'ensemble topologisant et idempotent associés à $\mathcal{M}$.

Les définitions des images et des coimages seront celles de [4], et non celles de [7].

PROPOSITION 2.1. - Toute mono-sous-catégorie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ est une catégorie additive, avec limites projectives (une limite projective dans $\mathcal{M}$ se calcule comme dans $\mathcal{A}$) et avec limites inductives (une limite inductive dans $\mathcal{M}$ s'obtient en appliquant R à la limite inductive dans $\mathcal{A}$, et une somme directe dans $\mathcal{M}$ se calcule comme dans $\mathcal{A}$).

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

Il en résulte facilement les deux propriétés suivantes :

COROLLAIRE 2.2. - La catégorie $\mathcal{M}$ est avec noyaux, conoyaux, images, et coimages.

De plus, pour toute flèche $f : M \to P$, alors :

(a) $[\mathrm{Ker}_{\mathcal{M}} f \xrightarrow{i} M] = [\mathrm{Ker}_{\mathcal{A}} f \xrightarrow{i} M]$.

(b) $[P \xrightarrow{p} \mathrm{Coker}_{\mathcal{M}} f] = [P \xrightarrow{p'} \mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f \longrightarrow R(\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f)]$.

(c) $[\mathrm{Im}_{\mathcal{M}} f \xrightarrow{j} P] = [\mathrm{Ker}_{\mathcal{M}} p \xrightarrow{j} P] = [p'^{-1}(\mathcal{S}\,\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f) \to P]$.

(d) $[M \xrightarrow{q} \mathrm{Coim}_{\mathcal{M}} f] = [M \xrightarrow{q} \mathrm{Coker}_{\mathcal{M}} i] = [M \xrightarrow{q'} \mathrm{Coim}_{\mathcal{A}} f]$.

COROLLAIRE 2.3. - Pour toute flèche $f : M \to P$ dans $\mathcal{M}$, alors :

1° La flèche f est un monomorphisme dans $\mathcal{M}$ si, et seulement si, $\mathrm{Ker}_{\mathcal{M}} f = 0$ ou $\mathrm{Ker}_{\mathcal{A}} f = 0$.

2° La flèche f est un épimorphisme dans $\mathcal{M}$ si, et seulement si, $\mathrm{Coker}_{\mathcal{M}} f = 0$ ou $\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f$ est un objet de $\mathcal{C}$.

THÉORÈME 2.4. - Pour toute flèche $f : M \to P$, il existe une flèche unique $\bar{f} : \mathrm{Coim}_{\mathcal{M}} f \to \mathrm{Im}_{\mathcal{M}} f$, telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & P \\ \mathrm{Coim}_{\mathcal{M}} f \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{Im}_{\mathcal{M}} f \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

De plus, la flèche $\bar{f}$ est un <u>monomorphisme</u> et un <u>épimorphisme</u> dans $\mathcal{M}$.

L'existence de la flèche $\bar{f} : \mathrm{Coim}_{\mathcal{M}} f \to \mathrm{Im}_{\mathcal{M}} f$ résulte d'un raisonnement classique dans une catégorie additive avec noyaux et conoyaux.

Les corollaires 2.2 et 2.3 entraînent facilement que $\bar{f}$ est un monomorphisme et un épimorphisme.

PROPOSITION 2.5. - Toute mono-sous-catégorie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ possède les propriétés suivantes :

1° Pour tout monomorphisme $u : M' \to M$ dans $\mathcal{M}$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) u est un monomorphisme normal ;

(b) La flèche canonique $\bar{u} : M' = \mathrm{Coim}_{\mathfrak{M}} u \to \mathrm{Im}_{\mathfrak{M}} u$, est un isomorphisme ;

(c) $\mathrm{Coker}_{\mathfrak{M}} u = \mathrm{Coker}_{\mathfrak{A}} u$;

(d) $\mathrm{Coker}_{\mathfrak{A}} u$ est un objet de $\mathfrak{M}$ (c'est-à-dire $\mathfrak{F}(M/M') = 0$).

2° Pour tout épimorphisme $v : M \to M''$ dans $\mathfrak{M}$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) v est un épimorphisme conormal ;

(b) La flèche canonique $\bar{v}$: $\mathrm{Coim}_{\mathfrak{M}} v \to \mathrm{Im}_{\mathfrak{M}} v = M''$ est un isomorphisme ;

(c) $\mathrm{Coker}_{\mathfrak{M}} v = \mathrm{Coker}_{\mathfrak{A}} v$;

(d) $\mathrm{Coker}_{\mathfrak{A}} v = 0$ (c'est-à-dire : v est un épimorphisme dans $\mathfrak{A}$).

La démonstration qui repose sur les corollaires 2.2 et 2.3 et sur la relation $\mathrm{Coker}_{\mathfrak{A}} \bar{f} = \mathfrak{F}\, \mathrm{Coker}_{\mathfrak{A}} f$, est laissée aux soins du lecteur.

REMARQUE 2.6. - Pour tout monomorphisme $u : M' \to M$ dans $\mathfrak{M}$, le monomorphisme $j : \mathrm{Im}_{\mathfrak{M}} u \to M$ est normal. Il en résulte que, pour tout sous-objet M' de M , le sous-objet $\mathrm{Im}_{\mathfrak{M}} u$ de M est le "plus petit" des sous-objets normaux de M , "plus grands" que M' .

REMARQUE 2.7. - Compte tenu de la proposition 1.6, les objets purs L de la mono-sous-catégorie $\mathfrak{M}$, sont les objets de $\mathfrak{M}$ qui sont des sous-objets normaux dans tout "sur-objet" M dans $\mathfrak{M}$.

3. Mono-sous-catégories localisantes.

Pour tout A-bimodule E et pour tout objet M de $\mathfrak{A}$, le groupe abélien $\mathrm{Hom}(E , M) = \mathrm{Hom}_A(E , M)$ sera muni de la structure de A-module à gauche déterminée par la structure de A-module à droite de E . De même, le groupe abélien $E \otimes M = E \otimes_A M$ sera muni de la structure de A-module à gauche déterminée par la structure de A-module à gauche de E . Il en résulte des isomorphismes canoniques:

$$\mathrm{Hom}(N , \mathrm{Hom}(E , M)) \simeq \mathrm{Hom}(E \otimes N , M) \quad .$$

Etant donné un idéal bilatère $\mathfrak{I}$ de A , soit ρ l'homomorphisme canonique d'anneaux unitaires de A dans l'anneau quotient $A' = A/\mathfrak{I}$. Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, A' désignera également le A-bimodule $\rho_* A'$ obtenu en faisant opérer A sur A' par ρ .

Il est immédiat que l'ensemble $\mathfrak{F}_{\mathfrak{I}}$ des idéaux à gauche de A contenant $\mathfrak{I}$ est topologisant. Soit $\mathcal{C}_{\mathfrak{I}}$ la sous-catégorie fermée de $\mathfrak{A}$ associée à $\mathfrak{F}_{\mathfrak{I}}$.

PROPOSITION 3.1. - Pour tout idéal bilatère $\mathfrak{A}$ de A , la sous-catégorie fermée $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ de $\mathcal{A}$ possède les propriétés suivantes :

1° Le foncteur $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ peut être caractérisé par :

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{A}} M = \mathrm{Hom}(A' , M) .$$

2° La sous-catégorie $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ est une sous-catégorie coréflective de $\mathcal{A}$, et un coréflecteur $R_{\mathfrak{A}}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ peut être caractérisé par :

$$R_{\mathfrak{A}} M = A' \otimes M .$$

3° Le foncteur "extension des scalaires" ρ^{*} de $\mathcal{A}$ dans la catégorie $\mathcal{A}'$ des modules à gauche sur $A' = A/\mathfrak{A}$, induit une équivalence entre $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ et $\mathcal{A}'$.

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

Les notions et la terminologie relatives à la localisation dans la catégorie abélienne $\mathcal{A}^{*}$ duale de $\mathcal{A}$, seront transcrites dans $\mathcal{A}$ par dualité en utilisant le préfixe "co". Par exemple, une sous-catégorie de $\mathcal{A}$ est dite <u>co-localisante</u> si elle est localisante dans $\mathcal{A}^{*}$, etc. En particulier, $\mathcal{C}$ est dite <u>bi-localisante</u> ([8]), si elle est localisante et co-localisante.

LEMME 3.2. - Pour toute sous-catégorie <u>fermée</u> $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie co-localisante.

(b) $\mathcal{C}$ est épaisse et stable par limites projectives.

(c) $\mathcal{C}$ est localisante et stable par limites projectives.

(d) $\mathcal{C}$ coïncide avec une catégorie $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ pour un idéal bilatère idempotent $\mathfrak{A}$ de A .

(e) $\mathcal{C}$ est bilocalisante.

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

Néanmoins, il convient de remarquer que le foncteur localisation $L_{\mathfrak{A}}$, peut être caractérisé par :

$$L_{\mathfrak{A}} M = \mathrm{Hom}(\mathfrak{A} , \mathrm{Hom}(\mathfrak{A} , M)) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} , M) ,$$

et que le foncteur "co-localisation" $L^{*}_{\mathfrak{A}}$, peut être caractérisé par :

$$L^{*}_{\mathfrak{A}} M = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \otimes M .$$

DÉFINITION 3.3. - Un idéal bilatère $\mathfrak{A}$ d'un anneau unitaire A est dit <u>fortement idempotent à gauche</u>, s'il vérifie la condition suivante :

Pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$, il existe au moins $\beta \in \mathfrak{A}$, tel que $\alpha = \beta\alpha$.

Il est évident qu'un tel idéal bilatère est idempotent.

Un idéal à droite $\mathfrak{A}$ d'un anneau unitaire A est un <u>idéal à droite pur dans</u> A ([1], ex. 24, p. 66), si pour tout A-module à gauche M, l'homomorphisme canonique

$$\mathfrak{A} \bigotimes_A M \to A \bigotimes_A M$$

est injectif.

LEMME 3.4. - Tout idéal bilatère $\mathfrak{A}$ <u>fortement idempotent à gauche</u> d'un anneau unitaire A, possède les propriétés suivantes :

1° La partie multiplicative $S = 1 - \mathfrak{A}$ vérifie les conditions suivantes :

(a) Pour tout $s \in S$ et tout $a \in A$, il existe $t \in S$ et $b \in A$, tels que $ta = bs$;

(b) Si $a \in A$, si $s \in S$, et si $as = 0$, alors il existe $t \in S$, tel que $ta = 0$.

2° L'ensemble $\mathfrak{F}_S$ des idéaux à gauche de A qui rencontrent S est topologisant et idempotent.

3° L'homomorphisme canonique u_A de A dans le localisé A_S de A pour $\mathfrak{F}_S$ est un homomorphisme surjectif dont le noyau est $\mathfrak{A}$.

L'anneau quotient $A' = A/\mathfrak{A}$ isomorphe à A_S est un anneau de fractions à gauche de A pour S.

Le foncteur localisation est exact à gauche et isomorphe au foncteur

$$M \longmapsto A_S \bigotimes_A M = A' \bigotimes_A M .$$

La caractérisation d'un idéal bilatère fortement idempotent à gauche est équivalente à la suivante : pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$, il existe au moins $u \in S$, tel que $u\alpha = 0$.

Pour tout $a \in A$ et tout $s \in S$ de la forme $s = 1 - \alpha$ avec $\alpha \in \mathfrak{A}$, l'élément $c = sa - as = a\alpha - \alpha a$ est un élément de $\mathfrak{A}$, puisque $\mathfrak{A}$ est un idéal bilatère. Il existe donc $u \in S$, tel que $uc = 0$. En posant $b = ua$ et $t = us$, il en résulte $ta = bs$, ce qui démontre 1° (a).

Pour $a \in A$ et $s \in S$ avec $s = 1 - \alpha$ et $\alpha \in \mathfrak{A}$, la condition $as = 0$ entraîne $a = a\alpha$, ce qui montre que $a \in \mathfrak{A}$. Il existe donc $t \in S$, tel que $ta = 0$, ce qui démontre 1° (b).

Il est connu ([3], p. 415) que 1° (b) implique la seconde propriété.

Les conditions (a) et (b) sont les duales des conditions (*) et (**) de la partie (b) de la proposition 5 de [3] (p. 415). L'énoncé dual de cette proposition entraîne que A_S est un anneau de fractions à gauche de A pour S, et que le foncteur localisation est exact et isomorphe au foncteur $M \longmapsto A_S \bigotimes_A M$.

Le noyau de u_A est l'idéal bilatère $\mathfrak{A}' = \mathfrak{F}_S A$. La condition $\alpha \in \mathfrak{A}'$ équivaut à : il existe un $s \in S$, tel que $s\alpha = 0$, c'est-à-dire à : il existe $\beta \in \mathfrak{A}$ tel que $\alpha = \beta\alpha$. Puisque $\mathfrak{A}$ est fortement idempotent à gauche, il en résulte $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. La surjectivité de u_A résulte du fait que A_S est un anneau de fractions à gauche de A pour S, et que $u_A(s)$ est l'élément unité de A_S, pour tout $s \in S = 1 - \mathfrak{A}$, ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 3.5. - Pour tout idéal bilatère $\mathfrak{A}$ d'un anneau unitaire A, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) La sous-catégorie $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ est une mono-sous-catégorie de $\mathcal{A}$.

(b) Le A-module à droite $A' = A/\mathfrak{A}$ est <u>plat</u>.

(c) L'idéal bilatère $\mathfrak{A}$ est un <u>idéal à droite pur dans</u> A.

(d) L'idéal bilatère $\mathfrak{A}$ est <u>fortement idempotent à gauche</u>.

La proposition 3.1 montre qu'un coréflecteur $R_{\mathfrak{A}}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ peut être caractérisé par $R_{\mathfrak{A}} M = A' \otimes M$. D'après le corollaire 1.4, un coréflecteur de $\mathcal{A}$ dans une mono-sous-catégorie respecte les monomorphismes. Ainsi (a) entraîne que $R_{\mathfrak{A}}$ est exact, ce qui implique (b).

Réciproquement, (b) entraîne que $R_{\mathfrak{A}}$ est exact et que $\mathrm{Tor}_1(A', M) = 0$ pour tout objet M de $\mathcal{A}$. Il en résulte que le noyau de $R_{\mathfrak{A}}$ est une sous-catégorie localisante $\mathcal{C}'_{\mathfrak{A}}$ telle que le foncteur $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{A}}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}'_{\mathfrak{A}}$ soit caractérisé par $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{A}} M = \mathfrak{A} \otimes M$, ce qui donne en particulier :

$$\mathfrak{F}'_{\mathfrak{A}} A = \mathfrak{A} \otimes A = \mathfrak{A} \quad .$$

Les objets M de $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ sont caractérisés par $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{A}} M = 0$, ce qui montre que $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ est la mono-sous-catégorie associée à $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{A}}$ ou à $\mathcal{C}'_{\mathfrak{A}}$. Ainsi (b) implique (a).

L'équivalence de (b) et de (c) est évidente.

Lorsque les conditions équivalentes (a) et (b) sont vérifiées, l'ensemble $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{A}}$ topologisant et idempotent est constitué par les idéaux à gauche I de A pour lesquels $A' \otimes (A/I) = 0$. Il est facile de vérifier que cette condition se traduit par $\rho(I) = A'$, c'est-à-dire par $1' \in \rho(I)$, ou encore par l'existence d'un élément $u \in I$ tel que $(1 - u) \in \mathfrak{A}$. Ainsi $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{F}_S$ avec $S = 1 - \mathfrak{A}$. Puisque $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{A}} A$ est constitué par les éléments de A dont l'annulateur appartient à $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{A}}$, la relation $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{A}} A = \mathfrak{A}$ entraîne que la condition $\alpha \in \mathfrak{A}$ est équivalente à la condition : il existe $s \in S$ tel que $s\alpha = 0$, c'est-à-dire à la condition : il existe $\beta \in \mathfrak{A}$

tel que $\alpha = \beta\alpha$, ce qui montre que $\mathfrak{A}$ est fortement idempotent à gauche. Ainsi (b) implique (d), et la réciproque résulte de la troisième partie du lemme 3.4.

COROLLAIRE 3.6. - Pour toute mono-sous-catégorie $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{A}$, déterminée par un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant et idempotent, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) La sous-catégorie $\mathfrak{M}$ est localisante.

(b) La sous-catégorie $\mathfrak{M}$ coïncide avec une sous-catégorie $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$, pour un idéal bilatère $\mathfrak{A}$ fortement idempotent à gauche de A .

(c) L'ensemble $\mathfrak{F}$ coïncide avec l'ensemble $\mathfrak{F}_S$ des idéaux à gauche de A qui rencontrent une partie multiplicative S , telle que $\mathfrak{A} = 1 - S$ soit un idéal bilatère fortement idempotent à gauche de A .

D'après le lemme 3.2, la condition (a) entraîne $\mathfrak{M} = \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ pour un idéal bilatère idempotent $\mathfrak{A}$ de A . Le théorème 3.5 entraîne alors que $\mathfrak{A}$ est fortement idempotent à gauche, ce qui montre que (a) implique (b).

Il est immédiat que (b) implique (a).

Les conditions équivalentes (a) et (b) entraînent, d'après la démonstration du théorème 3.5, que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{F}_S$ pour la partie multiplicative $S = 1 - \mathfrak{A}$. Ainsi (b) implique (c).

La condition (c) entraîne que pour tout objet M de $\mathcal{A}$, le sous-module $\mathfrak{F}M$ est constitué par les éléments $x \in M$, pour lesquels il existe $\alpha \in \mathfrak{A}$, tel que $x = \alpha x$. Il en résulte facilement que tout objet de $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ est un objet de $\mathfrak{M}$. Si M n'est pas un objet de $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$, il existe $y \in M$ et $\alpha \in \mathfrak{A}$, tels que $x = \alpha y \neq 0$. Il existe aussi $\beta \in \mathfrak{A}$ tel que $\alpha = \beta\alpha$, ce qui entraîne $x = \beta x$, c'est-à-dire $x \in \mathfrak{F}M$ avec $x \neq 0$, ce qui montre que M n'est pas un objet de $\mathfrak{M}$. Ainsi (c) implique (b).

REMARQUE 3.7. - Il existe des anneaux A ayant des idéaux bilatères $\mathfrak{A}$ fortement idempotents à gauche, propres et essentiels. Par exemple, pour une famille infinie $\{K_j\}_{j\in J}$ de corps, il suffit de prendre : $A = \prod_{j\in J} K_j$ et $\mathfrak{A} = \coprod_{j\in J} K_j$.

4. Mono-sous-catégories abéliennes.

Etant donnés deux anneaux unitaires A et B , en désignant par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les catégories de modules à gauche sur A et sur B , tout homomorphisme d'anneaux unitaires $\varphi : A \to B$ détermine un foncteur "restriction des scalaires" φ_* de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$, et un foncteur "extension des scalaires" φ^* de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.

Pour toute sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ associée à un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant et idempotent, il est facile de vérifier que la sous-catégorie pleine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$, caractérisée par les objets de $\mathcal{B}$, dont l'image par ω_* est un objet de $\mathcal{C}$, constitue une sous-catégorie localisante de $\mathcal{B}$, appelée l'<u>image</u> de $\mathcal{C}$ par ω. L'ensemble $\mathfrak{S}$ topologisant et idempotent associé à $\mathcal{D}$, appelé l'<u>image</u> de $\mathfrak{F}$ par ω, est constitué par les idéaux à gauche J de B, tels que $\omega_*(B/J)$ soit un objet de $\mathcal{C}$. Il est facile de vérifier que $\mathfrak{S}$ est le plus fin des ensembles topologisants $\mathfrak{S}'$ de B, tels que l'application ω de l'anneau topologique $(A , \mathfrak{F})$ dans l'anneau topologique $(B , \mathfrak{S}')$ soit continue.

Dans ce paragraphe, étant donnée une sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, associée à un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant et idempotent, ρ désignera l'homomorphisme canonique d'anneaux unitaires de A sur l'anneau quotient $A' = A/\mathfrak{F}A$.

L'ensemble $\mathfrak{F}'$ topologisant et idempotent, image de $\mathfrak{F}$ par ρ, est associé à la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}'$ de la catégorie $\mathcal{A}'$ des modules à gauche sur A', image de $\mathcal{C}$ par ρ.

PROPOSITION 4.1. - Avec les notations précédentes, si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont les mono-sous-catégories de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{A}'$ associées à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$, et si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont les sous-catégories pleines de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{A}'$, caractérisées par les objets $\mathcal{C}$-fermés et $\mathcal{C}'$-fermés, alors :

1° Les sous-catégories $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}$ sont des sous-catégories de $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$.

2° L'équivalence entre $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ et $\mathcal{A}'$ induite par ρ^*, détermine une équivalence entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$, et une équivalence entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$.

En particulier, l'anneau A' est un objet de $\mathcal{M}'$, c'est-à-dire $\mathfrak{F}' A' = 0$.

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

THÉORÈME 4.2. - Pour toute mono-sous-catégorie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$, associée à une sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, ou à un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant et idempotent, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) La mono-sous-catégorie $\mathcal{M}$ est abélienne.

(b) La mono-sous-catégorie $\mathcal{M}$ coïncide avec la catégorie $\mathcal{L}$ des objets $\mathcal{C}$-fermés de $\mathcal{A}$.

(c) La mono-sous-catégorie $\mathcal{M}$ est localisante.

(d) L'ensemble $\mathfrak{F}'$ topologisant et idempotent, image de $\mathfrak{F}$ par l'homomorphisme canonique d'anneaux unitaires ρ de A dans $A' = A/\mathfrak{F}A$, vérifie $\mathfrak{F}' = \{A'\}$.

(e) La mono-sous-catégorie $\mathcal{M}$ coïncide avec une sous-catégorie $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ pour un idéal bilatère $\mathfrak{A}$ fortement idempotent à gauche de A.

(f) L'ensemble $\mathfrak{F}$ coïncide avec l'ensemble $\mathfrak{F}_S$ topologisant et idempotent constitué par les idéaux à gauche de A qui rencontrent une partie multiplicative S, telle que $\mathfrak{A} = 1 - S$ soit un idéal bilatère fortement idempotent à gauche de A.

En outre, si ces conditions équivalentes sont vérifiées, $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}A$ et $\mathfrak{M} = \mathfrak{L} = \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$.

La condition (a) entraîne, en particulier, que tout monomorphisme dans $\mathfrak{M}$ est normal. D'après la condition 1° (d) de la proposition 2.5, la caractérisation des objets $\mathcal{C}$-fermés, exprimée par la condition 2° (a') de la proposition 1.6, montre que tout objet de $\mathfrak{M}$ est $\mathcal{C}$-fermé. Ainsi (a) implique (b).

D'après la proposition 4.1, la condition (b) entraîne $\mathfrak{M}' = \mathfrak{L}'$. Puisque A' est un objet de $\mathfrak{M}'$, c'est aussi un objet de $\mathfrak{L}'$. Tout idéal à gauche I' de A' est aussi un objet de $\mathfrak{M}'$, et par suite de $\mathfrak{L}'$. Il en résulte que les quotients A'/I' sont des objets de $\mathfrak{M}'$, ce qui entraîne $\mathfrak{F}'(A'/I') = 0$. Les éléments I' de $\mathfrak{F}'$ étant caractérisés par la condition $\mathfrak{F}'(A'/I') = A'/I'$, il en résulte $\mathfrak{F}' = \{A'\}$. Ainsi (b) implique (d).

La condition (d) entraîne $\mathfrak{M}' = \mathfrak{L}' = \mathcal{A}'$, et en posant $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}A$, la proposition 4.1 implique $\mathfrak{M} = \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$. Puisque $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ est alors une mono-sous-catégorie de $\mathcal{A}$, le théorème 3.5 entraîne que $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}A$ est un idéal bilatère fortement idempotent à gauche de A. Ainsi, (d) implique (e).

Il est immédiat que (e) implique (a). L'équivalence de (c), (e) et (f), résulte du corollaire 3.6, ce qui achève la démonstration.

5. Applications à l'essentialité et à ses généralisations.

5.1. Caractérisation de certains ensembles topologisants. - Etant donnés un anneau unitaire A et un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant, mais non nécessairement idempotent, qui est associé à une sous-catégorie fermée $\mathcal{C}$, le corollaire 1.4 donne une caractérisation de l'ensemble $\overline{\mathfrak{F}}$ topologisant et idempotent engendré par $\mathfrak{F}$, associé à la sous-catégorie localisante $\overline{\mathcal{C}}$ engendrée par $\mathcal{C}$.

Il est immédiat que $\overline{\mathfrak{F}}$ contient les ensembles topologisants $\mathfrak{F}^n$ ([3]). Il peut arriver que $\overline{\mathfrak{F}}$ coïncide avec l'une de ces puissances de $\mathfrak{F}$, par exemple avec $\mathfrak{F}^2$.

L'étude de cette situation a été faite par TISSERON.

Pour tout objet M de $\mathcal{A}$ et tout sous-objet N de M qui détermine une suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{u} M \xrightarrow{u'} M/N \longrightarrow 0 \quad ,$$

soit $\beta^M_{\mathfrak{F}}(N)$ le sous-objet de M contenant N, constitué par l'image réciproque par u' de $\mathfrak{F}(M/N)$.

La condition $M = \beta^{M}_{\mathfrak{F}}(N)$ signifie que M/N est un objet de $\mathcal{C}$, et la condition $N = \beta^{M}_{\mathfrak{F}}(N)$ signifie que $\mathfrak{F}(M/N) = 0$, c'est-à-dire que M/N est un objet de la mono-sous-catégorie $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{A}$, associée à $\mathfrak{F}$.

De plus, tout ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant, vérifie $[\beta^{M}_{\mathfrak{F}}]^{n} = \beta^{M}_{\mathfrak{F}^{n}}$ pour tout objet M de $\mathfrak{A}$.

Les conditions $\overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}^{n}$, $\mathfrak{F}^{n} = \mathfrak{F}^{n+1}$, et $[\beta^{M}_{\mathfrak{F}}]^{n} = [\beta^{M}_{\mathfrak{F}}]^{n+1}$ pour tout objet M de $\mathfrak{A}$, sont équivalentes. Lorsqu'il en est ainsi, $[\beta^{M}_{\mathfrak{F}}]^{n} = \beta^{M}_{\mathfrak{F}^{n}} = \beta^{M}_{\overline{\mathfrak{F}}}$.

5.2. <u>Applications à l'essentialité</u>. - Pour tout anneau unitaire A, l'ensemble $\mathfrak{F}_0$ des idéaux à gauche de A <u>essentiels</u> dans A est topologisant. Il n'est pas nécessairement idempotent, mais TISSERON a montré que $\overline{\mathfrak{F}_0} = \mathfrak{F}_0^2$.

Soient $\mathcal{C}_0$ et $\overline{\mathcal{C}_0}$ la sous-catégorie fermée et la sous-catégorie localisante, associées à $\mathfrak{F}_0$ et à $\overline{\mathfrak{F}_0} = \mathfrak{F}_0^2$.

Soit $\mathfrak{M}_0$ la mono-sous-catégorie de $\mathfrak{A}$ associée à $\mathfrak{F}_0$ ou à $\overline{\mathfrak{F}_0}$, caractérisée par les objets M de $\mathfrak{A}$ vérifiant l'une des conditions équivalentes $\mathfrak{F}_0 M = 0$ ou $\overline{\mathfrak{F}_0} M = 0$.

Soit $\mathcal{L}_0$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}$ des objets purs de $\mathfrak{M}_0$ ou des objets $\overline{\mathcal{C}_0}$-fermés de $\mathfrak{A}$.

Si N est un sous-module essentiel de M, ce qui sera noté $N \Delta M$, il est facile de vérifier que M/N est un objet de $\mathcal{C}_0$, et que réciproquement, cette condition entraîne $N \Delta M$, si N contient $\mathfrak{F}_0 M$.

Les résultats rappelés ci-dessus sont applicables. Par exemple, en posant $\beta^{M}_{0} = \beta^{M}_{\mathfrak{F}_0}$ et $\overline{\beta}^{M}_{0} = \beta^{M}_{\overline{\mathfrak{F}_0}}$, il en résulte $[\beta^{M}_{0}]^{2} = \overline{\beta}^{M}_{0}$.

Si N contient $\mathfrak{F}_0 M$, la condition $\beta^{M}_{0}(N) = M$, qui exprime que M/N est un objet de $\mathcal{C}_0$, est donc équivalente à $N \Delta M$. En particulier, dans $\mathfrak{M}_0$, les conditions $\beta^{M}_{0}(N) = M$ et $N \Delta M$, sont équivalentes.

Si M est un objet de $\mathfrak{M}_0$, les conditions équivalentes $N = \beta^{M}_{0}(N)$ et $N = \overline{\beta}^{M}_{0}(N)$, signifient, d'après la proposition 2.5, que le monomorphisme $u : N \rightarrow M$ est normal, c'est-à-dire que N est l'image de u dans $\mathfrak{M}_0$, ou que N est un sous-objet <u>normal</u> de M dans $\mathfrak{M}_0$.

Plus généralement, si M est un objet de $\mathfrak{M}_0$, le corollaire 2.2 montre que $\overline{\beta}^{M}_{0}(N)$ est l'image du monomorphisme $u : N \rightarrow M$, dans la catégorie $\mathfrak{M}_0$.

La caractérisation de $\mathcal{L}_0$ fournit un autre exemple d'application.

Si L est un objet de $\mathcal{L}_0$, soit M un objet de $\mathfrak{A}$, tel que $L \Delta M$. La relation $\mathfrak{F}_0 L = \mathfrak{F}_0 M \cap L = 0$, entraîne $\mathfrak{F}_0 M = 0$ qui montre que M est un objet de $\mathcal{M}_0$. D'après ce qui précède, M/L est un objet de $\mathcal{C}_0$, et par suite de $\overline{\mathcal{C}_0}$. La proposition 1.6 montre que L est un facteur direct de M , ce qui entraîne $L = M$. Ainsi, tout objet L de $\mathcal{L}_0$ n'admet pas d'extension essentielle propre, ce qui montre que L est injectif dans $\mathfrak{A}$. Le corollaire 1.9 montre que tout injectif Q de $\mathfrak{A}$ tel que $\mathfrak{F}_0 Q = 0$, est un objet de $\mathcal{L}_0$.

Ainsi, $\mathcal{L}_0$ est la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}$ caractérisée par les objets Q , injectifs dans $\mathfrak{A}$, tels que $\mathfrak{F}_0 Q = 0$.

La recherche de conditions pour que $\mathcal{M}_0$ soit abélienne, donne un dernier exemple d'application.

Si $\mathcal{M}_0$ est abélienne, le théorème 4.2 entraîne $\mathcal{M}_0 = \mathcal{L}_0 = \mathcal{C}_{\mathfrak{A}} \simeq \mathfrak{A}'$, en posant $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{F}_0} A$ et $A' = A/\mathfrak{A}$. D'après ce qui précède, il en résulte que tout A'-module à gauche est injectif. L'anneau A' est donc semi-simple.

Soit $\mathfrak{F}'$ l'image de $\overline{\mathfrak{F}_0}$ par l'homomorphisme canonique $\rho : A \to A'$. Les éléments I' de $\mathfrak{F}'$ sont les idéaux à gauche de A' , tels que $\rho_*(A'/I')$ soit un objet de $\overline{\mathcal{C}_0}$. Si A' est semi-simple, tout idéal à gauche I' de A' est facteur direct ([2]), ce qui montre que A'/I' s'identifie à un sous-objet de A' , dont l'image par ρ_* est un objet de $\mathcal{M}_0$, puisque c'est un sous-objet du A-module à gauche A' qui est un objet de $\mathcal{M}_0$. Il en résulte que $\rho_*(A'/I')$ ne peut être un objet de $\overline{\mathcal{C}_0}$ que s'il est nul, c'est-à-dire si $I' = A'$, ce qui entraîne $\mathfrak{F}' = \{A'\}$. Le théorème 4.2 entraîne que $\mathcal{M}_0$ est abélienne.

Ainsi, pour que $\mathcal{M}_0$ soit abélienne, il faut et il suffit que l'anneau $A' = A/\overline{\mathfrak{F}_0} A$ soit <u>semi-simple</u>.

Ce résultat a été obtenu de façon différente par LECLERC.

5.3. <u>Interprétation des généralisations de l'essentialité</u>. - Soit Σ un ensemble d'idéaux à gauche d'un anneau unitaire A , vérifiant les axiomes de SANDERSON [9]. Il est facile de vérifier que Σ est un ensemble topologisant et idempotent.

La relation de Σ-essentialité étudiée dans [6] et dans [5], notée $N \underset{\Sigma}{\Delta} M$, peut être caractérisée par les conditions :

$$N \Delta M \quad \text{et} \quad M/N \text{ est } \Sigma\text{-négligeable} .$$

Soit $\mathcal{C}_\Sigma$ la sous-catégorie localisante de $\mathfrak{A}$, associée à Σ .

Si N contient $\mathfrak{F}_0 M$, la condition $N \underset{\Sigma}{\Delta} M$ équivaut à : M/N est un objet de

$\mathcal{C}_0$ et de $\mathcal{C}_\Sigma$, c'est-à-dire de la sous-catégorie fermée $\mathcal{C}$, associée à l'ensemble topologisant $\mathfrak{F}$ défini par $\mathfrak{F} = \Sigma \cap \mathfrak{F}_0$.

Ainsi, lorsque N contient $\mathfrak{F}_0 M$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) $N \underset{\Sigma}{\Delta} M$;

(b) M/N est un objet de $\mathcal{C}$;

(c) $M = \beta_{\mathfrak{F}}^{M}(N)$.

Cette remarque peut fournir une interprétation utile de la relation de Σ-essentialité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative. Chap. 1 : Modules plats. Chap. 2 : Localisation. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290 ; Bourbaki, 27).

[2] BOURBAKI (N.). - Algèbre. Chap. 8 : Modules et anneaux semi-simples. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Bourbaki, 23).

[3] GABRIEL (P.). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[4] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., Series 2, t. 9, 1957, p. 119-221.

[5] HUDRY (A.). - Sous-modules Σ-clos, sous-modules Σ-compléments relatifs, modules Σ-quasi-injectifs, Publications du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Lyon, t. 5, 1968, fasc. 1, p. 1-35.

[6] MAURY (G.). - Σ-compléments, Publications du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Lyon, t. 5, 1968, fasc. 1, p. 37-62.

[7] MITCHELL (B.). - Theory of categories. - New York and London, Academic Press, 1965 (Pure and applied Mathematics, 17).

[8] ROOS (Jan-Erik). - Caractérisation des catégories qui sont quotients de catégories de modules par des sous-catégories bilocalisantes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, Série A, p. 4954-4957.

[9] SANDERSON (D. F.). - A generalization of divisibility and injectivity in modules, Canad. math. Bull., t. 8, 1965, p. 505-513.

(Texte reçu le 10 février 1969)

Michel HACQUE
M. Conf. Fac. Sc. Lyon
Résidence des Coteaux du Rhodon n° 25
78 - CHEVREUSE