Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Guy Maury

Remarques sur les ordres maximaux réguliers noethériens sans diviseurs de zéro

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, nº 1 (1968-1969), exp. nº 8, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_1_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
22e année, 1968/69, n° 8

3 février 1969

REMARQUES SUR LES ORDRES MAXIMAUX RÉGULIERS NOETHÉRIENS SANS DIVISEURS DE ZÉRO

par Guy MAURY

1. Introduction : Rappels et notations.

Dans cet article, R désigne un anneau non nécessairement commutatif à élément unité noethérien (c'est-à-dire satisfaisant à la condition de chaîne ascendante pour les idéaux à gauche et pour les idéaux à droite), sans diviseurs de zéro. On sait qu'un tel anneau admet un corps des fractions K [3].

Nous allons supposer de plus que R est un ordre maximal régulier dans K au sens de ASANO [1]. Les définitions sont données dans l'article de ASANO [1] ou dans ma thèse [7] (chapitre III, partie II, p. 84 à 87). Dans la suite, nous dirons "ordre maximal" pour "ordre maximal dans K ".

Dans le chapitre III, partie II, de ma thèse [7], j'ai établi comme application de la théorie des $\mathcal{T}$-algèbres de LESIEUR et CROISOT [6], un théorème qui s'énonce dans le cas particulier considéré ici :

THÉORÈME 0. - Soit R un ordre maximal, régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro. Soit a , $a \neq 0$, $a \in R$, Ra (respectivement aR) est intersection d'idéaux à gauche (respectivement à droite) primaires (au sens de LESIEUR et CROISOT [6]) dont les radicaux sont des idéaux premiers bilatères minimaux de R .

Cet article a pour but de donner des propriétés des ordres maximaux noethériens, réguliers, sans diviseurs de zéro, vérifiant la condition (C) supplémentaire suivante :

(C) Pour tout idéal premier bilatère minimal $\mathfrak{P}$ de R , tout idéal d'un côté $\mathfrak{P}$-primaire est compris dans $\mathfrak{P}$.

La condition (C) est vérifiée en particulier si tout idéal d'un côté X , $\mathfrak{P}$-primaire, est bilatère.

Ces propriétés découlent principalement du théorème 0. On démontre, après une étude assez longue, que R a ses idéaux à gauche et à droite tous bilatères. D'où résulte l'existence, pour tout idéal premier bilatère $\mathfrak{P}$, de R , non obligatoirement minimal, d'un anneau de fractions à droite et à gauche selon $S = R - \mathfrak{P}$.

Lorsque $\mathcal{P}$ est un idéal premier bilatère minimal, la structure de R_S est particulièrement simple. Toujours dans le cas où $\mathcal{P}$ est un idéal premier bilatère minimal, nous étudions les puissances symboliques $\mathcal{P}^{(n)}$, $n = 1 , 2 , \dots ,$ de $\mathcal{P}$, définies de façon générale par GOLDIE [4].

Cet article laisse ouvertes bon nombre de questions dont quelques-unes sont citées à la fin.

Je remercie L. LESIEUR pour ses précieuses remarques au cours d'une discussion orale.

2. Anneaux de fractions selon un idéal premier, non nécessairement minimal de l'anneau R .

Dans toute la suite, nous dirons idéal pour idéal bilatère.

Soient $\mathcal{P}$ un idéal premier de R , et $S = R - \mathcal{P}$. Rappelons que si I désigne un idéal à gauche $\mathcal{Q}$-primaire, $\mathcal{Q}$ désignant un idéal premier, il existe un entier naturel p tel que $\mathcal{Q}^p \subseteq I$ (voir LESIEUR-CROISOT [6], propriétés 5.5 et 5.6, et théorème 5.1), et si $\mathcal{Q}$ est premier minimal, la condition (C) entraîne $I \subseteq \mathcal{Q}$.

THÉORÈME 1. - S <u>est un sous-demi-groupe multiplicatif de</u> R , R <u>vérifie la condition de Ore des deux côtés par rapport à</u> S .

<u>Démonstration</u>. - Soient s et s' deux éléments de S ; nous allons établir que ss' appartient à S . Appliquons le théorème (0) :

$$Rs = \bigcap_{i=1}^{n} X_i , \qquad X_i \text{ idéal à gauche } \mathcal{P}_i\text{-primaire} , \quad i = 1 , \dots , r ,$$

$$s'R = \bigcap_{i=1}^{n'} X'_i , \qquad X'_i \text{ idéal à droite } \mathcal{P}'_i\text{-primaire} , \quad i = 1 , \dots , r' .$$

Il existe des entiers p'_i et p'_j , $i = 1 , \dots , r$, $j = 1 , \dots , r'$, tels que $\mathcal{P}_i^{p_i} \subseteq X_i$ et $\mathcal{P}_j'^{p'_j} \subseteq X'_j$, $i = 1 , \dots , r$, $j = 1 , \dots , r'$. On peut alors écrire :

$$\prod_{i=1}^{r} \mathcal{P}_i^{p_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{i=r} X_i = Rs \ ; \qquad \prod_{j=1}^{j=r'} \mathcal{P}_j'^{p'_j} \subseteq \bigcap_{j=1}^{r'} X'_j = s'R \ .$$

Si ss' appartient à $\mathcal{P}$, on a $Rss'R \subseteq \mathcal{P}$, et par suite :

$$(1) \qquad \Big(\prod_{i=1}^{i=r} \mathcal{P}_i^{p_i}\Big) \times \Big(\prod_{j=1}^{j=r'} \mathcal{P}_j'^{p'_j}\Big) \subseteq \text{idéal engendré par } Rss'R \subseteq \mathcal{P} \ .$$

On déduit de là que l'un des $\wp'_j$ ou l'un des $\wp_i$ est compris dans $\wp$. Mais ceci entraîne que s ou s' appartient à $\wp$, contrairement à l'hypothèse.

Ceci étant, montrons que, pour tout s appartenant à S, il existe un s' appartenant à S, tel que $Rs \supseteq s'R$. On a établi plus haut $\prod_{i=1}^{i=r} \wp_i^{p_i} \subseteq Rs$. Supposons que $\prod_{i=1}^{i=r} \wp_i^{p_i}$ appartienne à $\wp$, on en déduirait que l'un au moins des $\wp_i$ serait contenu dans $\wp$, donc aussi Rs contenu dans X_i, donc dans $\wp_i$.

On démontrerait de même que, pour tout s appartenant à S, il existe s" appartenant à S tel que $sR \supseteq Rs''$.

Il est facile de démontrer, pour terminer, que R vérifie la condition de Ore des deux côtés par rapport à S : démontrons, par exemple, qu'étant donnés a non nul appartenant à R et s appartenant à S, il existe a' appartenant à R et s' appartenant à S tel que $as' = sa'$: en effet il existe, d'après ce qui précède, $s' \in S$ tel que $sR \supseteq Rs'$, et as' s'écrit aussi sa' pour un certain a' appartenant à R, a et a' étant non nuls.

COROLLAIRE 1. - <u>Si</u> M <u>est un idéal à gauche de</u> R, <u>on a</u>

$$M_\wp = \{x \in K \mid \exists\, s \in S\,,\ sRx \subseteq M\} = \{x \in K \mid \exists\, s' \in S\,,\ s'x \in M\}\ ,$$

<u>et</u> $M_\wp$ <u>est un idéal à gauche de l'anneau</u> $R_\wp$.

<u>Si</u> M <u>est un idéal à droite de</u> R, <u>on a</u>

$$_\wp M = \{x \in K \mid \exists\, s \in S\,,\ xRs \in M\} = \{x \in K \mid \exists\, s' \in S\,,\ xs' \in M\}\ ,$$

<u>et</u> $_\wp M$ <u>est un idéal à droite de l'anneau</u> $R_\wp = {}_\wp R = R_S$.

<u>Démonstration</u>. - Démontrons d'abord que $R_\wp$ est un sous-anneau de K : soient x et y appartenant à $R_\wp$, il existe s et s' appartenant à S tels que $sRx \subseteq R$, $s'Ry \subseteq R$. Comme $sRs' \not\subseteq \wp$, il existe τ de R tel que $s\tau s'$ n'appartient pas à $\wp$. On peut écrire alors

$$s\tau s'R(x + y) \subseteq s\tau s'Rx + s\tau R \subseteq sRx + s\tau R \subseteq R\ ,$$

et $x + y$ appartient à $R_\wp$.

Considérons maintenant xy. On a, y" désignant un élément de R tel que $s'y''s \in S$,

$$s'y''sRxy \subseteq s'y''Ry \subseteq s'Ry \subseteq R\ .$$

En s'inspirant de cette démonstration, le lecteur établira de même que $M_\wp$ est un idéal à gauche de $R_\wp$, M désignant un idéal à gauche de R. Finalement, de

$sRx \subseteq M$ nous déduisons $sx \in M$, puisque R possède un élément unité. Réciproquement, de $sx \in M$, $s \in S$, nous déduisons successivement $Rsx \in M$ et $s'Rx \in M$, $s' \in S$ tel que $Rs \supseteq s'R$.

Il est bien connu que la condition de Ore des deux côtés par rapport à S entraîne l'existence d'un anneau de fractions au sens ordinaire de R selon S , noté R_S : R_S est l'ensemble des éléments de K de la forme as^{-1} , $a \in R$, $s \in S$; on a donc $R_S = {}_{\wp}R$; on a de même $R_S = R_{\wp}$. Remarquons que si M est un idéal à gauche de R , on peut écrire $M_{\wp} = R_S M$.

3. Anneau de fractions à droite et à gauche R_S , $S = R - \wp$, $\wp$ idéal premier bilatère minimal de R .

Dans toute la suite de l'article, $\wp$ désigne un idéal premier bilatère minimal de R .

PROPOSITION 1 (ASANO [2]). - $R_{\wp}$ est un ordre maximal régulier.

Démonstration. - Le lecteur est prié de se reporter à l'article de ASANO [2], p. 25, théorème 5.4 (la démonstration de ce théorème, donnée dans le cas où R est un demi-groupe, se recopie lorsque R est un anneau). Dans le cas particulier où R est un anneau dont tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux, ce résultat se trouve aussi dans l'article de ASANO [1] (théorème 3.13).

LEMME 1. - Soit $M = \bigcap_{i=1}^{r} X_i$, X_i , $i = 1 , \ldots , n$, et M désignant des idéaux à gauche, on a $M_{\wp} = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i)_{\wp}$. Si de plus X_i est $\wp_i$-primaire avec $\wp_i \not\subseteq \wp$, on a $(X_i)_{\wp} = R_{\wp}$.

Démonstration. - De $M \subseteq X_i$ résulte $M_{\wp} \subseteq (X_i)_{\wp}$ pour $i = 1 , \ldots , n$, donc $M_{\wp} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (X_i)_{\wp}$. Soit maintenant $x \in \bigcap_{i=1}^{n} (X_i)_{\wp}$: pour chaque $i = 1 , \ldots , n$, il existe $s_i \in S$ tel que $s_i\, x \in X_i$. Il est facile d'établir par récurrence sur n , grâce à la condition de Ore, l'existence d'éléments α_i appartenant à S tels que

$$\gamma = \alpha_1\, s_1 = \ldots = \alpha_n\, s_n \,, \qquad \text{avec } \gamma \in S \,.$$

On en déduit $\gamma x \in X_i$, $i = 1 , \ldots , n$, donc $\gamma x \in \bigcap_{i=1}^{n} X_i$ et $x \in M_{\wp}$. Ainsi $M_{\wp}$ est égal à $\bigcap_{i=1}^{n} (X_i)_{\wp}$.

La deuxième partie du lemme est démontrée au lemme II.2, p. 98 de ma thèse [7].

LEMME 2. - Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de R maximal dans sa classe modulo l'équivalence d'Artin $\mathcal{R}$, on a

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = {}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{a} = R_S\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}R_S \quad ;$$

en particulier on a $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = {}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}$.

Démonstration. - De $sRx \subseteq \mathfrak{a}$, on déduit $RsR.RxR \subseteq \mathfrak{a}$, en désignant aussi par RsR l'idéal engendré par RsR dans R . En passant aux classes des idéaux modulo l'équivalence d'Artin $\mathcal{R}$ dans R (on pourra se reporter, pour les définitions et les propriétés relatives à l'équivalence $\mathcal{R}$, au livre de JACOBSON [5] ou à ma thèse [7]), on obtient : $\overline{RsR}.\overline{RxR} \subseteq \overline{\mathfrak{a}}$, donc $\overline{RxR} \subseteq \overline{RsR}^{-1}.\overline{\mathfrak{a}} = \overline{\mathfrak{a}}.\overline{RsR}^{-1}$ et $\overline{RxR}.\overline{RsR} \subseteq \overline{\mathfrak{a}}$ et $RxR.RsR \subseteq \mathfrak{a}$, puisque $\mathfrak{a}$ est maximum dans sa classe modulo $\mathcal{R}$: par suite x appartient à ${}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}$, et réciproquement : on a donc $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = {}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}$. Comme $\mathfrak{p}$ est maximal dans sa classe modulo $\mathcal{R}$ ([7], chapitre III, théorème II.5 et lemme II.1), on peut appliquer au cas particulier $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$.

LEMME 3. - Pour $n = 1 , 2 , \dots ,$ $(\mathfrak{p}^n)_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})^n = {}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^n)$.

Démonstration. - Démontrons par exemple $({}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p})^n = {}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^n)$: soient $x_i \in \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = {}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}$ pour $i = 1 , \dots , n$, et considérons $\prod_{i=1}^{i=n} x_i$; on a $x_i = s_i^{-1}\, p_i = p_i'\, s_i'^{-1}$, avec p_i et p_i' appartenant à $\mathfrak{p}$, et s_i , s_i' appartenant à S . On peut écrire

$$x_1\, x_2 = p_1'\, s_1'^{-1}\, s_2^{-1}\, p_2 = p_1\, \tau^{-1}\, p_2 \; , \qquad \text{avec} \quad \tau = s_2\, s_1 \in S \quad .$$

Or $\tau^{-1}\, p_2$ appartient à $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = {}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}$, et on peut écrire $\tau^{-1}\, p_2 = p_2''\, \tau'^{-1}$, $\tau' \in S$, $p_2'' \in \mathfrak{p}$, et $x_1\, x_2 = p_1\, p_2''\, \tau'^{-1}$. On peut appliquer ce raisonnement à

$$x_1\, x_2\, x_3 \, , \, \dots \, , \, x_1\, x_2 \dots x_n \quad .$$

On obtient finalement

$$x_1\, x_2 \dots x_n = p_1\, p_2'' \dots p_n''\, \gamma^{-1} \; , \qquad \text{avec} \quad \gamma \in S \quad ,$$

$p_1 , p_2'' , \dots , p_n''$ appartenant à $\mathfrak{p}$. On a donc $x_1 \dots x_n\, \gamma \in \mathfrak{p}^n$, donc

$$x_1 \dots x_n \in {}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^n) \qquad \text{et} \qquad ({}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p})^n \subseteq {}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^n) \quad .$$

L'inclusion ${}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^n) \subseteq ({}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p})^n$ est immédiate.

LEMME 4. - $\forall\, a \in R$, $R_S\, a = (Ra)_{\mathfrak{p}}$.

Démonstration. - Si x appartient à $R_S a$, on a $x = s^{-1}\lambda a$, $\lambda \in R$, donc $sx \in Ra$ et $R_S a \subseteq (Ra)_{\wp}$. Soit $x \in (Ra)_{\wp}$, il existe $s \in S$ tel que $sx \in Ra$, donc $x = s^{-1}\lambda a$ pour $\lambda \in R$ et $x \in R_S a$, $(Ra)_{\wp} \subseteq R_S a$.

PROPOSITION 2. - R_S est un anneau noethérien ; $\wp_{\wp}$ est son plus grand idéal à gauche et aussi son plus grand idéal à droite. $\wp_{\wp}$ et (0) sont les seuls idéaux premiers de R_S. Il y a une correspondance entre les idéaux à gauche propres (à droite propres) de R_S et les idéaux à gauche (à droite) ne rencontrant pas S :

$$I \text{ idéal à gauche de } R_S \to I' = I \cap R ,$$

$$I' \text{ idéal à gauche de } R \to I = R_S I' ;$$

de plus, I désignant un idéal à gauche de R_S, on a

$$I = R_S(I \cap R) .$$

Démonstration. - Soit I un idéal à gauche propre de R_S, $I' = R \cap I$ est un idéal à gauche de R. On a $I \supseteq R_S I'$. Soit $i = s^{-1} a \in I$, $a \in R$, $s \in S$. On peut écrire $si = a \in I \cap R = I'$ et $i \in R_S I'$. D'ailleurs I' ne rencontre pas S, sinon on aurait $I' = R_S$. Si I' est maintenant un idéal à gauche de R ne rencontrant pas S, $R_S I'$ est un idéal à gauche de R_S propre car, si 1 appartient à $R_S I'$, on peut écrire

$$1 = \sum_{j=1}^{r} s_j^{-1} a_j i'_j , \quad \text{avec } i'_j \in I' , \ a_j \in R \text{ et } s_j \in S \text{ pour } j = 1 , \ldots , r .$$

On a vu au lemme 1, au cours de la démonstration, l'existence de γ, $\gamma \in S$, tel que

$$\gamma = \alpha_1 s_1 = \ldots = \alpha_r s_r , \qquad \alpha_j \in S , \quad j = 1 , \ldots , r .$$

Dès lors $\gamma = \sum_{j=1}^{r} \gamma s_j^{-1} a_j i'_j \in I'$, ce qui entraîne une contradiction.

Le fait que R_S est noethérien se démontre comme dans le cas commutatif. Cherchons les idéaux premiers de R_S. Démontrons d'abord que $\wp_{\wp}$ est le plus grand idéal à gauche de R_S : soit I un idéal à gauche de R_S, $I \neq R_S$, $I' = I \cap R$ ne rencontre pas S, donc est inclus dans $\wp$, et on a $I = R_S I' \subseteq R_S \wp = \wp_{\wp}$.

Comme $\wp_{\wp} = {}_{\wp}\wp$ (lemme 2), $\wp_{\wp}$ est aussi le plus grand idéal à droite de R_S. Soit $\mathfrak{Q}$ un idéal premier non nul de R_S, donc compris dans $\wp_{\wp}$. On veut démontrer l'égalité $\mathfrak{Q} = \wp_{\wp}$. Soit $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q} \cap R$, $0 \subsetneq \mathfrak{Q}' \subseteq \wp$. Démontrons que $\mathfrak{Q}'$ est complètement premier, donc premier dans R (a, $b \in \mathfrak{Q}'$, $ab \in \mathfrak{Q}'$ entraîne a ou b appartient à $\mathfrak{Q}'$). On peut supposer d'entrée que a et b n'appartiennent pas à S, car si l'un d'eux, par exemple a, appartient à S, de $ab \subseteq \mathfrak{Q}'$ on déduit $b \in \mathfrak{Q}$, donc $b \in \mathfrak{Q}'$. Supposons donc que a et b appartiennent à $\mathfrak{P}$ et qu'ils n'appartiennent pas à $\mathfrak{Q}'$: de $ab \subseteq \mathfrak{Q}'$, on déduit $(R_S\, a).b \subseteq \mathfrak{Q}$, donc $(Ra)_{\mathfrak{P}}.b \subseteq \mathfrak{Q}$ (lemme 4). D'après le théorème 0, on peut écrire

$$Ra = \bigcap_{i=1}^{n} X_i \;, \qquad X_i \;\; \mathfrak{P}_i\text{-primaire} \;, \quad i = 1 , \dots , n \;,$$

et, d'après le lemme 1,

$$(Ra)_{\mathfrak{P}} = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i)_{\mathfrak{P}} \;;$$

puisque l'on suppose que a appartient à $\mathfrak{P}$, l'un des $\mathfrak{P}_i$, par exemple $\mathfrak{P}_1$, est égal à $\mathfrak{P}$. D'après le lemme 1, on a

$$(X_1)_{\mathfrak{P}} = (Ra)_{\mathfrak{P}} \;.$$

Comme $\mathfrak{P}^{p_1} \subseteq X_1$ pour un certain entier naturel p_1, on a $(\mathfrak{P}^{p_1})_{\mathfrak{P}} \subseteq (X_1)_{\mathfrak{P}}$ et, d'après le lemme 3,

$$(\mathfrak{P}^{p_1})_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1} \subseteq (X_1)_{\mathfrak{P}} \;.$$

Si l'on avait $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1} \subseteq \mathfrak{Q}$, on déduirait $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$, c'est-à-dire ce que nous voulons établir. Supposons donc $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1} \not\subseteq \mathfrak{Q}$, il existe alors a', $a' \notin \mathfrak{Q}$, $a' \in (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1}$, donc $a'R_S \in (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1} \subseteq (X_1)_{\mathfrak{P}}$. On a donc $a'R_S\, b \subseteq (Ra)_{\mathfrak{P}}.b \subseteq \mathfrak{Q}$ avec a' et b n'appartenant pas à $\mathfrak{Q}$: il y a une contradiction. Finalement $\mathfrak{Q}'$ est bien premier dans R. Il est donc égal à $\mathfrak{P}$, et $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$.

LEMME 5. - Soit R un ordre maximal régulier noethérien, sans diviseurs de zéro ; soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier minimal de R, on a $\bigcap_{n=1}^{n=+\infty} \mathfrak{P}^n = 0$.

Démonstration. - Soit $K = \bigcap_{n=1}^{n=+\infty} \mathfrak{P}^n$. Si K est non nul, en désignant comme plus haut par $\overline{\mathfrak{A}}$ la classe de $\mathfrak{A}$, idéal de R, modulo $\mathfrak{R}$, on a $\overline{K} \neq \overline{R}$, car $\overline{K} = \overline{R}$ entraînerait $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{R}$, ce qui est impossible (cf. [7], lemme II.1, p. 97). On pourrait écrire alors :

$$\overline{K} = \overline{\mathfrak{Q}_1^{p_1}} \dots \overline{\mathfrak{Q}_r^{p_r}} \subseteq \overline{\mathfrak{P}} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathfrak{Q}_1} = \overline{\mathfrak{P}} \;,$$

par exemple, $\overline{\mathfrak{P}}$ étant un élément premier dans l'ensemble des classes (théorème II.5, p. 93 de ma thèse [7]). Comme on a $\overline{K} \subseteq \overline{\mathfrak{P}^n}$ pour tout n entier naturel, on peut écrire $\overline{\mathfrak{P}^{p_1+1}} \supseteq \overline{\mathfrak{P}^{p_1}\, \mathfrak{Q}_2^{p_2} \dots \mathfrak{Q}_r^{p_r}}$, d'où $\overline{\mathfrak{P}} \supseteq \overline{\mathfrak{Q}_2^{p_2} \dots \mathfrak{Q}_r^{p_r}}$ et $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{Q}_j}$ pour un

j compris entre 2 et r . Or ceci est impossible, car on a supposé $\overline{\mathfrak{Q}_i} \neq \overline{\mathfrak{Q}_j}$ pour $i \neq j$, $i , j = 1 , \ldots , r$). Il y a une contradiction, et $K = 0$.

LEMME 6 (NAKAYAMA). - Soit A un anneau à élément unité, admettant un idéal M qui soit à la fois le plus grand idéal à gauche propre de A et le plus grand idéal à droite propre de A .

1° Si E est un A-module à gauche (respectivement à droite) de type fini, $E = ME$ entraîne $E = 0$ (respectivement $E = EM$ entraîne $E = 0$).

2° Si F est un sous-A-module à gauche (respectivement à droite) du A-module à gauche (respectivement à droite) E' , tel que E'/F soit un A-module à gauche (respectivement à droite) de type fini, alors $E' = F + ME'$ (respectivement $E' = F + E'M$) entraîne $E' = F$.

Démonstration. - Elle est bien connue. Le lecteur la retrouvera sans peine de toutes façons.

LEMME 7. - Soit X un idéal à gauche $\wp$-primaire de R , $\wp$ désignant, rappelons-le, un idéal premier minimal de R ; on a $X = (R_S X) \cap R$.

Démonstration. - Elle a été faite, sous des hypothèses plus générales, au lemme II.2, p. 98, de ma thèse [7].

PROPOSITION 3. - Soit T un idéal non nul de R_S , R_S/T est un anneau à idéaux à gauche tous principaux et à idéaux à droite tous principaux.

Démonstration. - JACOBSON a démontré (cf. [5], théorème 24, p. 128 et 129) que si L est un ordre maximal régulier noethérien vérifiant la condition de chaîne descendante affaiblie pour les idéaux (c'est-à-dire que toute chaîne descendante d'idéaux de L contenant un idéal donné s'arrête au bout d'un nombre fini d'idéaux), pour tout idéal non nul T de L , L/T a tous ses idéaux à gauche principaux et tous ses idéaux à droite principaux. Or R_S est un ordre maximal régulier noethérien sans diviseurs de zéro ne possédant qu'un seul idéal premier non nul $\wp_{\wp}$, qui est d'ailleurs le plus grand idéal à gauche et le plus grand idéal à droite de R_S . On sait alors qu'il vérifie la condition de chaîne descendante affaiblie pour les idéaux (cf. ASANO [1], théorème 2.16), et on peut appliquer le théorème de Jacobson à R_S .

THÉORÈME 2. - Les seuls idéaux à gauche (respectivement à droite) de R_S sont les $\wp_{\wp}^n$, $n = 0 , 1 , 2 , \ldots$; ainsi tout idéal d'un côté de R_S est bilatère. Enfin il existe un élément a , $a \in R_S$, tel que $R_S a^n = a^n R_S = \wp_{\wp}^n$, $n = 1 , 2, \ldots$

Démonstration. - D'après la proposition 3, $\overline{R_S} = R_S/\wp_\wp^2$ est un anneau à idéaux à gauche (respectivement à droite) tous principaux, et $\wp_\wp/\wp_\wp^2 = \overline{R_S}\,\overline{a}$, $\overline{a} \in \overline{R_S}$. On a donc $R_S\, a + \wp_\wp^2 = \wp_\wp$ et, d'après le lemme 6, $\wp_\wp = R_S\, a$.

Soit I un idéal à gauche propre non nul de R_S , I contient $\wp_\wp^n$ pour un certain n puisque, pour $i \in I$, $i \neq 0$, $R_S\, i$ est $\wp_\wp$-primaire (théorème 0). On a donc $I/\wp_\wp^{n+1} = \widetilde{R}_S\, \widetilde{a}'$, en posant $\widetilde{R}_S = R_S/\wp_\wp^{n+1}$ et $a' \in I$. On peut écrire successivement :

$$I = R_S\, a' + \wp_\wp^{n+1} = R_S\, a' + \wp_\wp . \wp_\wp^n \subseteq R_S\, a' + \wp_\wp . I \subseteq I \quad ,$$

donc $I = R_S\, a' + \wp_\wp\, I$ et, d'après le lemme 6, $I = R_S\, a'$. Mais a' , appartenant à $\wp_\wp$, s'écrit $a_1\, a = a'$, et il est alors facile de prouver que $I = R_S\, a'^r$ pour un entier naturel r . En particulier, on a $\wp_\wp^r = R_S\, a^p \subseteq \wp_\wp^p$: si l'on avait $p > r$, on en déduirait $\wp_\wp^p = \wp_\wp^r$, mais cela entraînerait $\bigcap_1^\infty \wp_\wp^n \neq 0$, contrairement au lemme 5. On a donc $p \leqslant r$. Or ceci entraîne $p = r$ (démonstration par récurrence sur p pour $p = 1$, on a évidemment $r = 1$).

Le théorème s'en déduit alors facilement.

THÉORÈME 3. - Tout idéal à gauche (respectivement à droite) de R est bilatère.

Démonstration. - Nous considérons un idéal à gauche $\wp$-primaire, $\wp$ premier minimal, X . D'après le lemme 7, $X = (R_S\, X) \cap R$. D'après le théorème 2, $R_S\, X$ est un idéal bilatère de R_S , donc X est un idéal de R . Soit alors $Ra = \bigcap_{i=1}^n X_i$, $a \in R$, $a \neq 0$, une représentation de Ra comme intersection d'idéaux à gauche $\wp_i$-primaires (théorème 0), $\wp_i$ premier minimal, $i = 1 , \dots , n$. Chaque X_i est bilatère, et par suite Ra est bilatère. On démontrerait de même que aR est bilatère, et par suite tout idéal d'un côté de R est bilatère.

4. Puissance symbolique n-ième d'un idéal premier minimal $\wp$ de R .

Dans son article [4], GOLDIE définit la puissance symbolique n-ième d'un idéal bilatère premier $\wp$, notée $\wp^{(n)}$, d'un anneau non commutatif noethérien. En transposant dans le cas particulier considéré ici, la définition de $\wp^{(n)}$, par récurrence sur n , prend la forme simple suivante : on pose pour $n = 1$, $\wp^{(1)} = \wp$. Supposons $\wp^{(n-1)}$ définie, $\wp^{(n)}$ est définie ainsi :

$$\wp^{(n)} = \{x \mid x \in R , \ \exists\, F \in \mathfrak{F} , \ \exists\, G \in \mathfrak{F} , \text{ tel que } GxF \subseteq \wp^{(n-1)}.\wp\} \quad ,$$

$\mathfrak{F}$ désignant la famille des idéaux de R qui coupent $S = R - \wp$.

THÉORÈME 4. - <u>Pour</u> $n = 1, 2, \ldots$, $\mathfrak{P}^{(n)}$ <u>est le plus grand idéal de la classe de</u> $\mathfrak{P}^n$ <u>modulo l'équivalence d'Artin</u> $\mathcal{R}$; <u>de plus, on a</u>

$$(\mathfrak{P}^n)_{\mathfrak{P}} = {}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{P}^n) = (\mathfrak{P}^{(n)})_{\mathfrak{P}} = {}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{P}^{(n)}) = R_S\,\mathfrak{P}^{(n)} = \mathfrak{P}^{(n)}\,R_S = (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^n \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Partageons la démonstration en plusieurs points :

<u>Premier point</u> : Les $\mathfrak{P}^{(n)}$, pour $n = 1, 2, \ldots$, sont tous distincts. En effet, si l'on avait $\mathfrak{P}^{(n-1)} = \mathfrak{P}^{(n)}$, cela signifierait (cf. [4], proposition 3.3) :

$$G\mathfrak{P}^{(n)}\,F \subseteq \mathfrak{P}^{(n-1)}\,\mathfrak{P} \ ,$$

pour un certain F et un certain G appartenant à $\mathfrak{F}$. Passons aux classes modulo $\mathcal{R}$, compte tenu de $\mathfrak{P}^{(n)} = \mathfrak{P}^{(n-1)}$, il vient :

$$\overline{G}.\overline{\mathfrak{P}^{(n)}}.\overline{F} \subseteq \overline{\mathfrak{P}^{(n)}}.\overline{\mathfrak{P}}$$

et

$$\overline{G}.\overline{F} \subseteq \overline{\mathfrak{P}}$$

et

$$G.F \subseteq \mathfrak{P} \ ,$$

puisque $\mathfrak{P}$ est maximal dans sa classe. Soient $s \in F$, $s' \in G$, s et s' appartenant à S. On en déduit $ss' \in \mathfrak{P}$, ce qui est impossible d'après le théorème 1. On ne peut donc avoir l'égalité $\mathfrak{P}^{(n)} = \mathfrak{P}^{(n')}$ avec $n \neq n'$.

<u>Deuxième point</u> : $\mathfrak{P}^{(n)}$ est le plus grand idéal de la classe de $\mathfrak{P}^n$ modulo $\mathcal{R}$. En effet, on sait, d'après GOLDIE ([4], théorème 4.3), que $\mathfrak{P}^{(n)}$ est $\mathfrak{P}$-primaire des deux côtés, $n = 1, 2, \ldots$. Les idéaux $\mathfrak{P}^{(k)}$ sont donc les plus grands idéaux de leur classe $\overline{\mathfrak{P}^{(k)}}$ modulo $\mathcal{R}$, $k = 1, 2, \ldots$. Les classes $\overline{\mathfrak{P}^{(k)}}$, $k = 1, \ldots, n$, sont des classes $\overline{\mathfrak{P}}$-primaires contenant $\overline{\mathfrak{P}^n}$ (cf. [7], théorème II.6, p. 94, et lemme II.1) : ce sont donc des classes parmi les $\overline{\mathfrak{P}^k}$, $k = 1, \ldots, n$. Comme les classes $\overline{\mathfrak{P}^{(k)}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, sont distinctes d'après le premier point, on a l'égalité $\overline{\mathfrak{P}^{(k)}} = \overline{\mathfrak{P}^k}$, et $\mathfrak{P}^{(k)}$ est élément maximum de la classe $\overline{\mathfrak{P}^k}$, $k = 1, \ldots, n$.

<u>Troisième point</u> : On montre alors, comme au lemme 5, en remplaçant $\mathfrak{P}^n$ par $\mathfrak{P}^{(n)}$, que $\bigcap_{n=1}^{n=+\infty} \mathfrak{P}^{(n)} = 0$.

<u>Quatrième point</u> : L'anneau local associé par GOLDIE à $\mathfrak{P}$, dans son article [4], est R_S (grâce au troisième point). En appliquant les résultats de GOLDIE ([4], théorème 4.6), on peut écrire $\mathfrak{P}^{(n)} = (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^n \cap R$, d'où résulte $\mathfrak{P}^{(n)}\,R_S = R_S\,\mathfrak{P}^{(n)} = (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^n$.

On a vu, au lemme 3, l'égalité $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^n = (\mathfrak{P}^n)_{\mathfrak{P}}$.

THÉORÈME 5. - Pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ associé à $Ra = aR$, $a \neq 0$, $a \in R$, il n'y a pas d'idéal $\mathcal{P}$-primaire entre $\mathcal{P}^{(2)}$ et $\mathcal{P}$. De façon générale, les seuls idéaux $\mathcal{P}$-primaires entre $\mathcal{P}^n$ et $\mathcal{P}$ sont $\mathcal{P}^{(n)}$, $\mathcal{P}^{(n-1)}$, ... , $\mathcal{P}$.

Démonstration. - Rappelons que les idéaux $\mathcal{P}$-primaires sont maximaux dans leurs classes modulo $\mathcal{R}$, et celles-ci sont distinctes de la classe de $\overline{R}$. La classe d'un idéal $\mathcal{P}$-primaire contenant $\mathcal{P}^n$ est donc de la forme $\overline{\mathcal{P}^k}$ avec $k = 1, \ldots, n$. Un idéal $\mathcal{P}$-primaire contenant $\mathcal{P}^n$ est donc élément maximal de la classe $\overline{\mathcal{P}^k}$ pour un certain k , $1 \leqslant k \leqslant n$: c'est donc $\mathcal{P}^{(k)}$.

Problèmes ouverts :

Premier problème : Dans le cas commutatif, la réciproque du théorème 5 est exacte (cf. [8] et [9]). Est-elle exacte dans le cas non commutatif ?

Deuxième problème : $\mathcal{P}^{(n)}$ est-elle composante $\mathcal{P}$-primaire de $\mathcal{P}^n$ bien déterminée dans toute décomposition réduite de $\mathcal{P}^n$ en idéaux tertiaires ?

Troisième problème : Comment se modifie cette étude lorsque R est un anneau premier ou semi-premier ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] ASANO (Keizo). - Zur Arithmetik in Schiefringen, I, Osaka math. J., t. 1, 1949, p. 98-134.

[2] ASANO (Keizo) and MURATA (Kentaro). - Arithmetical ideal theory in semigroups, J. of Inst. of Polyt., Osaka City Univ., Series A : Math., t. 4, 1953, p. 9-33.

[3] GOLDIE (A. W.). - The structure of prime rings under ascending chain conditions, Proc. London math. Society, 3rd Series, t. 8, 1958, p. 589-608.

[4] GOLDIE (A. W.). - Localization in non-commutative noetherian rings, J. of Algebra, t. 5, 1967, p. 89-105.

[5] JACOBSON (Nathan). - Theory of rings. - New York, American mathematical Society, 1943 (Mathematical Surveys, 2).

[6] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie noethérienne des anneaux des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I, Colloque d'Algèbre supérieure [1956. Bruxelles], p. 79-121. - Louvain, Centerick, 1957 (Centre Belge de Recherches mathématiques).

[7] MAURY (G.). - La condition intégralement clos dans quelques structures algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 78, 1961, p. 31-100 (Thèse Sc. math. Paris, 1960).

[8] MORI (S.) und DODO (T.). - Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit in Integritätsbereichen, J. of Sc. of Hiroshima Univ., Series A, t. 7, 1937, p. 15-28.

[9] YOSHIDA (Michio) and SAKUMA (Motoyoshi). - On integrally closed noetherian rings, J. of Sc. of Hiroshima Univ., Series A, t. 17, 1954, p. 311-315.

(Texte reçu le 10 février 1969)

Guy MAURY
Prof. Fac. Sc. Lyon
49 rue Duguesclin
69 - LYON 06