Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Earl J. Taft

Quelques relations entre les algèbres de Jordan et les algèbres de Lie

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, nº 1 (1968-1969), exp. nº 5, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_1_A3_0>

16 décembre 1968

QUELQUES RELATIONS ENTRE LES ALGÈBRES DE JORDAN ET LES ALGÈBRES DE LIE

par Earl J. TAFT

1. Introduction.

Soient A une algèbre de Jordan unitaire, et M un bimodule unitaire pour A. Nous allons utiliser une construction de Koecher ([5]), pour décrire le groupe de cohomologie $H^1(A, M)$, en termes de certaines algèbres de Lie et leurs modules. Nous donnons aussi quelques observations sur les idéaux et les sous-algèbres des algèbres de Lie construites par KOECHER, qui servent à faciliter la démonstration du théorème principal de Wedderburn, pour les algèbres de Jordan sur un corps commutatif de caractéristique zéro (voir [1] ou [3] pour des renseignements généraux sur les algèbres de Jordan).

2. L'algèbre $\mathfrak{L}(A)$ de Koecher.

Soit A une algèbre de Jordan sur un corps commutatif F, c'est-à-dire : A est commutatif et satisfait à l'identité $a^2(ba) = (a^2 b)a$ pour tout $a, b \in A$. Nous supposons aussi que A possède une unité 1, et que la caractéristique de F n'est pas égale à 2. Pour $a \in A$, nous désignons par $L(a)$ la multiplication déterminée par a dans A, alors

$$L(a)x = ax , \qquad x \in A .$$

Nous notons par $H(A)$, l'algèbre de Lie engendrée par $L(A) = \{L(a) \mid a \in A\}$. Le produit dans $H(A)$ est noté par des crochets carrés $[XY] = XY - YX$. A cause de l'identité

$$[[L(a) , L(b)] , L(c)] = L((bc)a - b(ca)) ,$$

qui est valable pour tout $a, b, c \in A$, on a

$$H(A) = L(A) + [L(A) L(A)] ,$$

où $[L(A) L(A)]$ est le F-sous-espace de A engendré par les produits $[L(a) L(b)]$, $a, b \in A$. Comme $1 \in A$, cette somme est directe, $H(A) = L(A) \oplus [L(A) L(A)]$, et on remarque que $L(1) = I$, application identique de A, appartient à $L(A)$. Nous remarquons aussi que les éléments de $[L(A) L(A)]$ sont des dérivations dans A.

Soit $\bar{A}$ une copie de A en tant qu'espace vectoriel ; nous formons l'espace vectoriel

$$\mathfrak{L}(A) = H(A) \oplus A \oplus \bar{A} \ .$$

Nous allons utiliser les triples ordonnés $(T , a , \bar{b})$ pour dénoter les éléments de $\mathfrak{L}(A)$. On définit une application bilinéaire Δ de $A \times \bar{A}$ dans $H(A)$:

$$a \Delta \bar{b} = L(ab) + [L(a) , L(b)] \ .$$

Ensuite, nous remarquons qu'il y a un anti-automorphisme $T \to T^*$ dans $H(A)$, donné par $(L(a) + D)^* = L(A) - D$, pour $a \in A$, $D \in [L(A) L(A)]$, et que $T^{**} = T$, $T \in H(A)$. L'application $T \to - T^*$ est alors un automorphisme d'ordre 2 dans $H(A)$. Maintenant, on munit $\mathfrak{L}(A)$ d'une structure d'algèbre, de la manière suivante :

$$[(T_1 , a_1 , \overline{b_1}) , (T_2 , a_2 , \overline{b_2})] = (T , a , \bar{b}) ,$$

$$\text{pour } T_i \in H(A) , \quad a_i , b_i \in A , \quad i = 1 , 2 ,$$

où :

$$T = [T_1 \ T_2] + a_1 \Delta \overline{b_2} - a_2 \Delta \overline{b_1} \in H(A) ,$$
$$a = T_1(a_2) - T_2(a_1) \in A ,$$
$$b = - T_1^* b_2 + T_2^* b_1 \in A .$$

Dans [5], on a vu que $\mathfrak{L}(A)$ est une algèbre de Lie sur F, et qu'il y a un automorphisme d'ordre 2 de $\mathfrak{L}(A)$ donné par

$$X = (T , a , \bar{b}) \to \bar{X} = (- T^* , b , \bar{a}) \ .$$

Nous appelons $X \to \bar{X}$ l'automorphisme principal de $\mathfrak{L}(A)$, et G le groupe d'ordre 2 engendré par $X \to \bar{X}$.

3. Le groupe $H^1(A , M)$.

Soit M un bimodule unitaire pour A, c'est-à-dire : il y a des applications bilinéaires de $M \times A$ et $A \times M$ dans M, et si on forme la somme semi-directe $B = A \oplus M$, alors le produit $(a_1 , m_1)(a_2 , m_2) = (a_1 a_2 , a_1 m_2 + m_1 a_2)$ munit B de la structure d'une algèbre de Jordan (commutative unitaire) sur F, A est une sous-algèbre de B, et M un idéal tel que $M^2 = 0$.

Soit $Z^1(A , M)$ l'espace vectoriel sur F formé des dérivations f de A dans M, c'est-à-dire, des applications F-linéaires $f : A \to M$ telles que

$$f(ab) = af(b) + f(a)b , \qquad a , b \in A \ .$$

Si $a_1 , \dots , a_n \in A$ et $x_1 , \dots , x_n \in M$, l'application

$$a \to \sum_{i=1}^{n} (a_i(x_i\ a) - x_i(a_i\ a)) \quad ,$$

qui est la restriction à A de la dérivation $\sum_{i=1}^{n} [L(a_i)\ L(x_i)]$ dans B , appartient à $Z^1(A , M)$, et nous désignons par $B^1(A , M)$ l'ensemble des éléments de $Z^1(A , M)$ qui se trouvent sous cette forme (n n'est pas fixe). $B^1(A , M)$ est un sous-espace de $Z^1(A , M)$, composé des dérivations intérieures de A dans M , et nous désignons par $H^1(A , M)$ l'espace quotient $Z^1(A , M) / B^1(A , M)$.

Maintenant, nous considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}(B)$ décrite dans le § 2. $\mathfrak{L}(B)$ a une sous-algèbre

$$s(A) = (L(A) + [L(A)\ L(A)] , A , \bar{A})$$

(qui n'est pas, en général, isomorphe à $\mathfrak{L}(A)$, le L indiquant ici la multiplication dans B), et $\mathfrak{L}(B)$ a un idéal

$$I(M) = (L(M) + [L(A)\ L(M)] , M , \bar{M}) \quad .$$

Il est évident que $\mathfrak{L}(B) = s(A) + I(M)$, parce que $[L(M)\ L(M)] = 0$, et la somme est directe, parce que si $D \in [L(A)\ L(A)] \cap [L(A)\ L(M)]$, alors $D(A) \subseteq A \cap M = 0$ et $D(M) = 0$ entraîne que $D = 0$. Or $I(M)$ est un bimodule pour l'algèbre de Lie $s(A)$ ($\mathfrak{L}(B)$ est une algèbre de Lie). Soit $Z^1(s(A) , I(M))$ l'espace vectoriel sur F des dérivations f de $s(A)$ dans $I(M)$, c'est-à-dire :

$$f([s_1\ s_2]) = [f(s_1)\ s_2] + [s_1\ f(s_2)] , \qquad s_1 , s_2 \in s(A) \quad .$$

Si $i \in I(M)$, l'application $(\delta i) : s(A) \to I(M)$, définie par $(\delta i)(s) = [is]$, $s \in s(A)$, est une dérivation de $s(A)$ dans $I(M)$, et nous posons

$$B^1(s(A) , I(M)) = \{\delta i \mid i \in I(M)\} \quad ,$$

les dérivations intérieures de $s(A)$ dans $I(M)$. Enfin, comme d'habitude,

$$H^1(s(A) , I(M)) = Z^1(s(A) , I(M)) / B^1(s(A) , I(M)) \quad .$$

Nous avons l'intention de démontrer que $H^1(A , M)$ est isomorphe à $H^1(s(A) , I(M))$, mais il convient d'introduire encore un autre groupe de cohomologie. Nous remarquons que le groupe G agit comme groupe d'automorphismes sur les algèbres de Lie $s(A)$ et $I(M)$, et qu'il respecte aussi la structure de $I(M)$ comme $s(A)$-bimodule (rappelons que G est le groupe engendré par l'automorphisme principal de $\mathfrak{L}(B)$). Si f est une application linéaire de $s(A)$ dans $I(M)$, on définit une application f^* de $s(A)$ dans $I(M)$ par $f^*(s) = \overline{f(\bar{s})}$. Alors $f^{**} = f$, et si

$f \in Z^1(s(A), I(M))$, on voit que $f^* \in Z^1(A, M)$. En outre, si $f = \delta i \in B^1$, on voit facilement que $f^* = \delta(\bar{i})$. Alors, il y a une action du groupe G sur $Z^1(s(A), I(M))$, sur $B^1(s(A), I(M))$, et donc sur $H^1(s(A), I(M))$. Nous posons

$$Z^1_*(s(A), I(M)) = \{f \in Z^1(s(A), I(M)) \mid f = f^*\} ,$$

$$B^1_*(s(A), I(M)) = Z^1_*(s(A), I(M)) \cap B^1(s(A), I(M)) ,$$

et

$$H^1_*(s(A), I(M)) = Z^1_*(s(A), I(M)) / B^1_*(s(A), I(M)) .$$

On remarque que $H^1_*(s(A), I(M))$ est isomorphe à l'espace des éléments de $H^1(s(A), I(M))$ qui sont stabilisés par le groupe G. En effet, l'application

$$f + B^1_*(s(A), I(M)) \to f + B^1(s(A), I(M)) , \qquad f \in Z^1_*(s(A), I(M)) ,$$

est un tel isomorphisme. Tout est évident, sauf peut-être la surjectivité. Si $f \in Z^1(s(A), I(M))$ est tel que $f + B^1(s(A), I(M))$ soit stabilisé par G, nous avons

$$f - f^* \in B^1(s(A), I(M)) .$$

Alors,

$$\frac{f + f^*}{2} \in Z^1_*(s(A), I(M)) ,$$

et

$$\frac{f + f^*}{2} + B^1_*(s(A), I(M)) \to \frac{f + f^*}{2} + B^1(s(A), I(M)) = f + B^1(s(A), I(M)) ,$$

parce que $f - (\frac{f + f^*}{2}) = \frac{f - f^*}{2} \in B^1(s(A), I(M))$.

LEMME 1. - Si $i \in I(M)$, $[s(A), i] = 0 \implies i = 0$.

Posons $i = (L(m) + D, y, \bar{z})$, $m, y, z \in M$, $D \in [L(A)\, L(M)]$.

$$[(I, 0, \bar{0}), i] = 0 \implies y = z = 0 ,$$

et $[(0, a, \bar{0}), i] = 0$ pour tout $a \in A \implies L(m) + D = 0$.

LEMME 2. - $B^1_*(s(A), I(M)) = \{\delta i \mid i \in I(M), i = \bar{i}\}$.

On a $\delta i = (\delta i)^* = \delta \bar{i}$, et $\delta(i - \bar{i}) = 0$. Alors $[s(A), i - \bar{i}] = 0$, et le lemme 2 résulte du lemme 1.

Maintenant, nous pouvons énoncer le théorème principal :

THÉORÈME. - $H^1(A, M) \simeq H^1_*(s(A), I(M)) \simeq H^1(s(A), I(M))$.

Nous donnons, d'abord, un isomorphisme τ de $H^1(A, M)$ sur $H^1_*(s(A), I(M))$. Soit $f \in Z^1(A, M)$. On prolonge f en une dérivation f' de B par

$$f'(a, m) = f(a) \quad ,$$

et alors $T \to [f', T]$ est une dérivation de $H(B)$. Enfin, on définit une application $\bar{f}$ de $s(A)$ dans $I(M)$, par

$$\bar{f}(T, a, \bar{b}) = ([f', T], f(a), \overline{f(b)}) \quad .$$

Utilisant le fait que $[D, L(a)] = L(Da)$, qui est valable pour une dérivation D quelconque d'une algèbre, on voit spécifiquement que

$$\bar{f}(L(c) + \sum_i [L(d_i) L(e_i)], a, \bar{b})$$
$$= (L(f(c)) + \sum_i [L(f(d_i)) L(e_i)] + \sum_i [L(d_i) L(f(e_i))], f(a), \overline{f(b)}) \quad ,$$

pour $c, d_i, e_i, a, b \in A$. On peut montrer directement que $\bar{f} \in Z^1(s(A), I(M))$ (nous omettons le calcul; voir [8]), et nous remarquons que la forme spécifique de $\bar{f}$ montre que $\bar{f} \in Z^1_*(s(A), I(M))$. Si $f \in B^1(A, M)$, disons $f = \sum_i [L(m_i) L(a_i)]$ restreint à A , $m_i \in M$, $a_i \in A$. Alors, on voit tout de suite que $\bar{f} = \delta i$, où $i = (\sum_i [L(m_i) L(a_i)], 0, \bar{0}) \in I(M)$, et $\bar{f} \in B^1(s(A), I(M))$. A cause de $i = \bar{i}$, on a, en plus, que $\bar{f} \in B^1_*(s(A), I(M))$. Donc, il existe une application linéaire τ de $H^1(A, M)$ dans $H^1_*(s(A), I(M))$, donnée par

$$\tau(f + B^1(A, M)) = \bar{f} + B^1_*(s(A), I(M)) \quad .$$

τ est évidemment injective. En effet, si $\bar{f} \in B^1_*(s(A), I(M))$, grâce au lemme 2, $\bar{f}$ est de la forme $\bar{f} = \delta(D, y, \bar{y})$, où $y \in M$, $D \in [L(M) L(A)]$. Si $a \in A$,

$$(0, f(a), 0) = \bar{f}(0, a, 0) = [(D, y, \bar{y})(0, a, 0)] \quad ,$$

et de la deuxième coordonnée, on a que $f(a) = D(a)$. Alors f est la restriction de D à A , et $f \in B^1(A, M)$.

La démonstration que τ est surjective est plus compliquée, et nous esquissons le procédé sans donner les détails des calculs. Soit $F \in Z^1_*(s(A), I(M))$. Posons

$$F(0, 1, 0) = (L(x_1) + D_1, y_1, z_1) \quad , \qquad x_1, y_1, z_1 \in M \; , \quad D_1 \in [L(M) L(A)] \quad .$$

Alors

$$F = F^* \implies F(0, 0, \bar{1}) = (-L(x_1) + D, z_1, \bar{y}_1) \quad .$$

$$(I , 0 , \bar{0}) = [(0 , 1 , \bar{0})(0 , 0 , \bar{1})] \Longrightarrow F(I , 0 , \bar{0}) = (L(2y_1) , x_1 , - \overline{x_1}) .$$

$$[(I , 0 , \bar{0})(0 , 1 , \bar{0})] = (0 , 1 , \bar{0}) \Longrightarrow D_1 = 0 \text{ et } y_1 = z_1 = 0 .$$

Alors on a

$$F(0 , 1 , \bar{0}) = (L(x_1) , 0 , \bar{0}) ,$$
$$F(0 , 1 , \bar{0}) = (- L(x_1) , 0 , \bar{0}) ,$$
$$F(I , 0 , \bar{0}) = (0 , x_1 , - \overline{x_1}) .$$

Si $a \in A$, posons

$$F(0 , a , 0) = (L(x_a) + D_a , y_a , \overline{z_a}) ,$$

où $x_a , y_a , z_a \in M$ et $D_a \in [L(M)\ L(A)]$ sont des fonctions sur A .

$$[(0 , 1 , \bar{0})(0 , a , \bar{0})] = 0 \Longrightarrow z_a = 0 \text{ et } x_a = x_1 a ,$$

$$[(I , 0 , \bar{0})(0 , a , \bar{0})] = (0 , a , \bar{0}) \Longrightarrow D_a = [L(a)\ L(x_1)] .$$

Alors on a

$$F(0 , a , 0) = (L(x_1 a) + [L(a)\ L(x_1)] , y_a , \bar{0}) ,$$

et

$$F(0 , 0 , \bar{a}) = (- L(x_1 a) + [L(a)\ L(x_1)] , 0 , \overline{y_a}) ,$$

$$[(0 , 1 , 0)(0 , 0 , \bar{a})] = (L(a) , 0 , \bar{0})$$
$$\Longrightarrow F(L(a) , 0 , \bar{0}) = (L(y_a) , x , a , - \overline{x_1 a}) .$$

Pour démontrer que $f : A \to M$, donné par $f(a) = y_a$, appartient à $Z^1(A , M)$, on regarde la deuxième coordonnée de l'équation

$$[(L(a) , 0 , \bar{0})(0 , b , \bar{0})] = (0 , ab , \bar{0}) , \qquad \text{pour } a , b \in A ,$$

en appliquant F . Enfin, on utilise

$$[(L(a) , 0 , \bar{0}) , (L(b) , 0 , \bar{0})] = ([L(a)\ L(b)] , 0 , \bar{0}) ,$$

pour calculer que

$$F([L(a)\ L(b)] , 0 , \bar{0})$$
$$= ([L(a)\ L(y_b)] + [L(y_a)\ L(b)] , [L(a)\ L(b)](x_1) , [L(a)\ L(b)](x_1)) .$$

Maintenant, on définit $\bar{f}$ comme dans la définition de τ , et posons $g = F - \bar{f}$. Alors, pour $a , b \in A$, on a

$$g(0\ ,\ a\ ,\ 0) = (L(x_1\ a) + [L(a)\ L(x_1)]\ ,\ 0\ ,\ \overline{0})\ ,$$

$$g(0\ ,\ 0\ ,\ \overline{a}) = (-\ L(x_1\ a) + [L(a)\ L(x_1)]\ ,\ 0\ ,\ \overline{0})\ ,$$

$$g(L(a)\ ,\ 0\ ,\ \overline{0}) = (0\ ,\ x_1\ a\ ,\ -\ x_1\ a)\ ,$$

$$g([L(a)\ L(b)]\ ,\ 0\ ,\ \overline{0}) = (0\ ,\ [L(a)\ L(b)](x_1)\ ,\ [L(a)\ L(b)](x_1))\ .$$

On peut vérifier que $g = \delta(0\ ,\ -\ x_1\ ,\ -\ \overline{x_1}) \in B^1_*(s(A)\ ,\ I(M))$. Alors,

$$F + B^1_*(s(A)\ ,\ I(M)) = \overline{f} + B^1_*(s(A)\ ,\ I(M)) = \tau(f + B^1(A\ ,\ M))\ ,$$

et nous avons démontré que τ est un isomorphisme de $H^1(A\ ,\ M)$ sur $H^1_*(s(A)\ ,\ I(M))$.

Maintenant, nous allons définir un isomorphisme α de $H^1(s(A)\ ,\ I(M))$ sur $H^1_*(s(A)\ ,\ I(M))$. Dès maintenant, nous posons

$$H^1 = H^1(s(A)\ ,\ I(M)) \qquad \text{et} \qquad H^1_* = H^1_*(s(A)\ ,\ I(M))\ ,$$

et pareillement pour Z^1 , Z^1_* , B^1 , B^1_* (il n'y a pas de danger, parce qu'on ne considère plus $H^1(A\ ,\ M)$).

Rappelons que, si $f \in Z^1$, nous avons défini $f^* \in Z^1$ par $f^*(s) = \overline{f(\overline{s})}$, $s \in s(A)$. Si $f \in Z^1$, il est évident que $\frac{1}{2}(f + f^*) \in Z^1_*$. Si $f \in B^1$, disons $f = \delta i$, $i \in I(M)$, on a

$$\frac{1}{2}(f + f^*) = \frac{1}{2}(\delta i + \delta\overline{i}) = \delta(\frac{1}{2}(i + \overline{i})) \in B^1_*\ .$$

Donc, il existe une application linéaire α de H^1 dans H^1_* , donnée par

$$\alpha(f + B^1) = \frac{1}{2}(f + f^*) + B^1_*\ , \qquad \text{pour } f \in Z^1\ .$$

Il est évident que α est surjective, parce que si $f \in Z^1_*$, on a aussi $f \in Z^1$, et

$$\alpha(f + B^1) = \frac{1}{2}(f + f) + B^1_* = f + B^1_*\ .$$

Encore une fois, nous esquissons le procédé qui montre que α est injective, sans donner tous les calculs. Soit $f \in Z^1$, tel que $\alpha(f + B^1) = 0$. Alors, on a

$$(\star) \qquad \frac{1}{2}(f + f^*) = \delta i \in B^1_*\ , \qquad i \in I(M)\ .$$

Grâce au lemme 2, i est sous la forme $i = (D\ ,\ y\ ,\ \overline{y})$, où $y \in M$, et $D \in [L(A)\ L(M)]$ est une dérivation de B .

1° Si $f(I, 0, \overline{0}) = (L(m) + U, w, \overline{q})$, $m, w, q \in M$, $U \in [L(A)\ L(M)]$,

$$(\star) \implies m = 0 \text{ et } q = w + 2y .$$

2° Si $f(0, 1, \overline{0}) = (L(n) + V, x, -\overline{z})$, $n, x, z \in M$, $V \in [L(M)\ L(A)]$,

$$(\star) \implies f(0, 0, \overline{1}) = (L(2y + n) - V, -z, -\overline{x}) .$$

3° Si on applique f à $[(0, 1, \overline{0})(0, 0, \overline{1})] = (I, 0, \overline{0})$, on trouve que $U = 0$, $w = -2y - n$.

4° En appliquant f à $[(I, 0, \overline{0})(0, 1, \overline{0})] = (0, 1, \overline{0})$, on trouve que $V = 0$ et $z = 0$.

Il suit de 1° à 4° qu'il existe $n, x, y \in M$ tels que

$$f(I, 0, \overline{0}) = (0, -2y - n, -\overline{n}) ,$$

$$f(0, 1, \overline{0}) = (L(n), x, \overline{0}) ,$$

$$f(0, 0, \overline{1}) = (L(n + 2y), 0, -\overline{x}) .$$

Maintenant, pour $a \in A$, posons

$$f(0, a, 0) = (T_a, W_a, x_a, \overline{z_a}) ,$$

où $T_a \in L(M)$, $W_a \in [L(A)\ L(M)]$, $x_a, z_a \in M$, et T_a, W_a, x_a, z_a sont des fonctions de a.

5° En appliquant f à $[(I, 0, \overline{0})(0, a, \overline{0})] = (0, a, \overline{0})$, on trouve que $T_a = L(an)$, $W_a = [L(a)\ L(n)]$, et $Z_a = 0$. Alors, on a

$$f(0, a, \overline{0}) = (L(an) + [L(a)\ L(n)], x_a, \overline{0}) .$$

6° Si on applique $(\star)$ au 5°, on trouve que

$$f(0, 0, \overline{a}) = (L(a(2y + n)) - [L(a)\ L(2y + n)], 0, \overline{2D(a) - x_a}) .$$

7° En appliquant f à $(L(a), 0, \overline{0}) = (0, a, \overline{0})(0, 1, \overline{0})$, on trouve que

$$f(L(a), 0, \overline{0}) = (L(x_a - xa) + [L(x)\ L(a)], -a(2y + n), -\overline{an}) .$$

8° Si on applique $(\star)$ au 7°, on a que $x_a = D(a) + ax$.

On peut conclure de 5° à 8°, que

$$f(0, a, 0) = (L(an) + [L(a), L(n)], D(a) + ax, \overline{0}) ,$$

$$f(0, 0, \overline{a}) = (L(a(2y + n)) + [L(2y + n), L(a)], 0, \overline{D(a) - ax}) ,$$

$$f(L(a), 0, \overline{0}) = (L(D(a)) + [L(x)\ L(a)], -a(2y + n), -\overline{an}) .$$

9° Si $a , b \in A$, nous appliquons f à

$$([L(a)\ L(b)] , 0 , \bar{0}) = [(L(a) , 0 , \bar{0})(L(b) , 0 , \bar{0})] ,$$

pour déterminer que

$$f([L(a)\ L(b)] , 0 , \bar{0})$$
$$= ([L(x) , [L(a) , L(b)]] + [D , [L(a)\ L(b)]] , - [L(a)\ L(b)](2y + n) , [L(a)\ L(b)](n)) ,$$

et nous remarquons que

$$[L(x) , [L(a)\ L(b)]] = L((ax)b - a(xb)) \in L(M) ,$$

et

$$[D , [L(a)\ L(b)]] = [L(D(a))\ D(b)] + [L(a)\ L(D(b))] \in [L(A)\ L(M)] .$$

10° A partir des formules précédentes, on peut vérifier directement que

$$f = \delta(L(x) + D , 2y + n , - \bar{n}) \in B^1 ,$$

nous avons montré ainsi que α est injective, α est un isomorphisme de H^1 sur H^1_* , et le théorème est démontré.

Nous remarquons encore que l'application β de H^1_* dans H^1 , définie par $\beta(f + B^1_*) = f + B^1$, $f \in Z^1_*$, est évidemment injective, et on a : $\alpha\beta$ est l'application identique dans H^1_* . Comme nous avons montré que α est un isomorphisme, il en résulte que β l'est aussi, et que $\beta = \alpha^{-1}$. Si on voulait prouver directement que β est surjective, on pourrait prouver la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Tout élément g de $Z^1(s(A) , I(M))$, qui est anti-symétrique, c'est-à-dire $g^* = - g$, appartient à $B^1(s(A) , I(M))$.

Si on suppose vraie la proposition, et $f \in Z^1$, on a

$$f = \frac{1}{2} (f + f^*) + \frac{1}{2} (f - f^*) ,$$

et $g = \frac{1}{2} (f - f^*)$ est anti-symétrique. Alors,

$$\frac{1}{2} (f + f^*) \in Z^1_* ,$$

et

$$\beta(\frac{1}{2} (f + f^*) + B^1_*) = \frac{1}{2} (f + f^*) + B^1 = f + B^1 ,$$

et β est surjective.

Cependant, à ce point, nous pouvons utiliser l'injectivité de α pour démontrer la vérité de cette proposition. Si $g \in Z^1$ est anti-symétrique, on a

$$\alpha(g + B^1) = \frac{1}{2}(g + g^*) + B^1_* = B^1_* ,$$

ce qui entraîne $g \in B^1$.

Le théorème implique aussi le corollaire suivant, déjà connu ([3]).

COROLLAIRE. - Soit A une algèbre de Jordan semi-simple, de dimension finie, sur un corps commutatif de caractéristique zéro, et soit M un A-bimodule. Alors, $H^1(A , M) = 0$.

Si on forme la somme semi-directe $B = A \oplus M$, on a vu que

$$\mathfrak{L}(B) = s(A) \oplus I(M) .$$

Dans [4], on a montré que $I(M)$ est le radical de $\mathfrak{L}(B)$. Donc, $s(A) \simeq \mathfrak{L}(B)/I(M)$ est semi-simple, et il est bien connu que $H^1(s(A) , I(M)) = 0$ (voir [4]). Grâce au théorème, $H^1(A , M) = 0$. Nous remarquons qu'une démonstration directe de ce corollaire, qui utilise l'algèbre $\mathfrak{L}(B)$, $B = A \oplus M$ la somme semi-directe, est donnée dans [8].

4. Remarques sur les idéaux et les sous-algèbres de $\mathfrak{L}(A)$.

Maintenant, A est une algèbre de Jordan unitaire. Nous remarquons que si M est un idéal dans A , alors

$$I(M) = (L(M) + [L(A)\, L(M)] , M , \overline{M})$$

est un idéal dans $\mathfrak{L}(A)$, qui est stable pour l'automorphisme principal de $\mathfrak{L}(A)$. $I(M)$ est aussi homogène, dans le sens suivant. Soient P_1 , P_2 , et P_3 les projections de $\mathfrak{L}(A)$ sur ses trois coordonnées $H(A)$, A , et $\overline{A}$ respectivement. Un sous-espace $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{L}(A)$ est appelé homogène si $\mathfrak{S}_1 = (\mathfrak{S}P_1 , 0 , \overline{0})$, $\mathfrak{S}_2 = (0 , \mathfrak{S}P_2 , \overline{0})$, et $\mathfrak{S}_3 = (0 , 0 , \mathfrak{S}P_3)$ sont tous les trois contenus dans $\mathfrak{S}$, et $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2 \oplus \mathfrak{S}_3$, c'est-à-dire, $\mathfrak{S}$ est homogène si $\mathfrak{S} = (\mathfrak{S}P_1 , \mathfrak{S}P_2 , \mathfrak{S}P_3)$.

PROPOSITION 2. - Tout idéal $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{L}(A)$ est homogène. En plus, $\mathfrak{M}$ est stable pour l'automorphisme principal de $\mathfrak{L}(A)$, et $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_3$ est un idéal dans A .

Soit $(T , a , \overline{b}) \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathfrak{M}_1$, $a \in \mathfrak{M}_2$, $b \in \mathfrak{M}_3$. Alors,

$$[(I , 0 , 0)(T , a , \overline{b})] = (0 , a , -\overline{b}) \in \mathfrak{M} ,$$

et

$$(T , a , \overline{b}) + (0 , a , -\overline{b}) = (T , 2a , \overline{0}) \in \mathfrak{M} .$$

De plus, $[(I , 0 , \bar{0})(T , 2a , \bar{0})] = (0 , 2a , \bar{0}) \in \mathfrak{M}$, et on a $(0 , a , \bar{0}) \in \mathfrak{M}$. Pareillement,

$$(T , a , \bar{b}) - (0 , a , - \bar{b}) = (T , 0 , 2\bar{b}) \in \mathfrak{M} ,$$

et

$$[(I , 0 , \bar{0})(T , 0 , 2\bar{b})] = (0 , 0 , - 2\bar{b}) \in \mathfrak{M} ,$$

et on a $(0 , 0 , \bar{b}) \in \mathfrak{M}$, et donc aussi $(T , 0 , \bar{0}) \in \mathfrak{M}$. Alors $\mathfrak{M}$ est homogène. Si $a \in A$, $m \in \mathfrak{M}_2$,

$$(0 , am , \bar{0}) = [(L(a) , 0 , \bar{0})(0 , m , \bar{0})] \in \mathfrak{M} ,$$

ce qui montre que $\mathfrak{M}_2$ est un idéal dans A. Pour $m \in \mathfrak{M}_2$, on a

$$[(0 , m , \bar{0})(0 , 0 , T)] = (L(m) , 0 , \bar{0}) \in \mathfrak{M} ,$$

et donc $[(0 , 0 , T)(L(m) , 0 , \bar{0})] = (0 , 0 , \bar{m}) \in \mathfrak{M}$, ce qui montre que $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_3$. Si $m \in \mathfrak{M}_3$, on a

$$[(0 , 1 , \bar{0})(0 , 0 , \bar{m})] = (L(m) , 0 , \bar{0}) \in \mathfrak{M} ,$$

et donc $[(L(m) , 0 , \bar{0})(0 , 1 , \bar{0})] = (0 , m , \bar{0}) \in \mathfrak{M}$, et $\mathfrak{M}_3 \subseteq \mathfrak{M}_2$. Donc, $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_3$. Enfin, soit

$$(L(a) + D , 0 , \bar{0}) \in \mathfrak{M} , \qquad a \in A , \quad D \in [L(A)\ L(A)] .$$

Alors

$$[(L(a) + D , 0 , \bar{0})(0 , 1 , \bar{0})] = (0 , a , \bar{0}) \in \mathfrak{M} ,$$

et aussi

$$[(0 , a , \bar{0})(0 , 0 , T)] = (L(a) , 0 , \bar{0}) \in \mathfrak{M} .$$

Donc, $(D , 0 , 0) \in \mathfrak{M}$, et $\overline{(L(a) + D , 0 , \bar{0})} = (- L(a) + D , 0 , 0) \in \mathfrak{M}$, ce qui prouve que $\mathfrak{M} = \bar{\mathfrak{M}}$, et achève la démonstration de la proposition. On remarque que si $M = \mathfrak{M}_2$, on a montré que $\mathfrak{M} \subseteq (L(M) + [L(A)\ L(A)] , M , \bar{M})$. Si

$$(L(m) + D , x , \bar{y}) \in \mathfrak{M} , \quad D \in [L(A)\ L(A)] , \qquad \text{on a} \quad (D , 0 , \bar{0}) \in \mathfrak{M} ,$$

et si

$$a \in A , \qquad (0 , D(a) , \bar{0}) = [(D , 0 , 0)(0 , a , \bar{0})] \in \mathfrak{M} ,$$

ce qui montre que D entraîne A dans M. Cependant, on ne peut conclure que $D \in [L(A)\ L(M)]$, autrement dit, nous ne sommes pas arrivés à montrer que $\mathfrak{M} = I(M)$.

Si on examine la démonstration de la proposition 2, on trouve qu'on peut démontrer, de la même manière, la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - <u>Toute sous-algèbre</u> $\mathfrak{S}$ <u>de</u> $\mathfrak{L}(A)$ <u>qui contient</u> $(I\ ,\ 0\ ,\ 0)$ <u>est homogène. Si, en plus,</u> $(0\ ,\ 1\ ,\ \overline{0})$ <u>et</u> $(0\ ,\ 0\ ,\ T)$ <u>appartiennent à</u> $\mathfrak{S}$, <u>alors</u> $\mathfrak{S}$ <u>est stable pour l'automorphisme principal de</u> $\mathfrak{L}(A)$, <u>et</u> $\mathfrak{S}_2$ <u>est une sous-algèbre de</u> A .

Nous remarquons que les propositions 2 et 3 rendent plus fortes, dans le cas d'une algèbre de Jordan, les remarques de [5] au sujet des idéaux et des sous-algèbres de l'algèbre $\mathfrak{L}(A)$, où A est une algèbre "admissible" (voir [5]). En particulier, c'est Nathan JACOBSON qui nous a suggéré que $\mathfrak{S} = \overline{\overline{\mathfrak{S}}}$ dans la proposition 3.

5. Le théorème principal de Wedderburn.

A est encore une algèbre de Jordan unitaire. Soient $H = (I\ ,\ 0\ ,\ \overline{0})$, $X = (0\ ,\ 1\ ,\ \overline{0})$, $Y = (0\ ,\ 0\ ,\ T)$. Alors $[HX] = X$, $[HY] = -Y$, $[XY] = H$, ce qui montre que $\mathfrak{K} = FH \oplus FX \oplus FY$ est une algèbre de Lie simple de dimension 3 . Si la caractéristique de F est 0 , et A de dimension finie sur F , on a montré dans [5] que le radical de $\mathfrak{L}(A)$ est $I(R) = (L(R) + [L(A)\ L(R)]\ ,\ R\ ,\ \overline{R})$, où R est le radical de A . Maintenant, on peut faire appel au théorème de Mal'cev et Harish-Chandra pour les algèbres de Lie (voir [4]), pour conclure que $\mathfrak{K}$ est contenue dans une sous-algèbre $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{L}(A)$ telle que $\mathfrak{L}(A) = \mathfrak{S} + I(R)$ soit une somme directe. Grâce à la proposition 3, $\mathfrak{S}$ est homogène, et $\mathfrak{S}_2$ est une sous-algèbre de A . En regardant la deuxième coordonnée, on trouve que $A = \mathfrak{S}_2 + R$ et $\mathfrak{S}_2 \cap R = 0$.

Alors, nous avons donné une démonstration du théorème principal de Wedderburn pour les algèbres de Jordan de dimension finie sur un corps commutatif F de caractéristique zéro, d'une manière un peu plus facile que la démonstration analogue dans [5]. Le théorème est originalement dû à PENICO (voir [6]). Il est aussi valable si la caractéristique p est positive (on suppose A/R séparable; voir [7]), mais on ne peut utiliser $\mathfrak{L}(A)$ dans ce cas, parce qu'il n'y a pas une telle théorie pour les algèbres de Lie sur un corps commutatif de caractéristique $\neq 0$. On remarque enfin que le théorème d'unicité, qui accompagne celui de Wedderburn, peut aussi se démontrer en utilisant $\mathfrak{L}(A)$, et on peut trouver cette démonstration dans [8].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRAUN (Hel) et KOECHER (Max). - Jordan-Algebren. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 128).

[2] JACOBSON (Nathan). - General representation theory of Jordan algebras, Trans. Amer. math. Soc., t. 70, 1951, p. 509-530.

[3] JACOBSON (Nathan). - Jordan algebras (à paraître).

[4] JACOBSON (Nathan). - Lie algebras. - New York, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 10).

[5] KOECHER (Max). - Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras, I, Amer. J. of Math., t. 89, 1967, p. 787-816.

[6] PENICO (A. J.). - The Wedderburn principal theorem for Jordan algebras, Trans. Amer. math. Soc., t. 70, 1951, p. 404-420.

[7] TAFT (E. J.). - Invariant Wedderburn factors, Illinois J. of Math., t. 1, 1957, p. 565-573.

[8] TAFT (E. J.). - On the Whitehead first lemma for Jordan algebras, Math. Z., t. 107, 1968, p. 83-86.

(Texte reçu le 25 février 1969)

Earl J. TAFT
Institute for advanced Study
PRINCETON, N. J. (Etats-Unis)