Guy Boulaye

# Extensions dans les treillis

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 22, n° 1 (1968-1969), exp. n° 2, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_1_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
22e année, 1968/69, n° 2, 10 p.



18 novembre 1968

# EXTENSIONS DANS LES TREILLIS

par Guy BOULAYE

Notations. - Dans ce texte, les notations $\cap$ et $\cup$ désignent les opérations borne supérieure et borne inférieure des treillis, tandis que $\pmb{\cap}$ et $\pmb{\cup}$, $\pmb{\bigcap}$ et $\pmb{\bigcup}$ (caractères gras en typographie) représentent l'intersection et l'union ensemblistes, et leurs opérations collectives.

## 1. Notion d'extension dans les treillis.

### 1. Extension d'un ensemble ordonné. Définitions.

Nous dirons qu'un ensemble ordonné $E_{n+1}$ est obtenu par extension, à partir de l'ensemble ordonné $E_n$, si $E_{n+1}$ est un sous-ensemble de $E_n \times \{0 , 1 ; 0 < 1\}$, contenant $E_n \times \{0\}$ :

$$(E_n \times \{0\}) \subseteq E_{n+1} \subseteq (E_n \times \{0 , 1\}) ,$$

et $E_n$ sera dit ensemble initial de l'extension ; par $\{0 , 1\}$, et dans toute la suite, nous entendons $\{0 , 1 ; 0 < 1\})$.

Remarque. - Dualement, si $(E_n \times \{1\}) \subseteq E_{n+1} \subseteq (E_n \times \{0 , 1\})$, nous dirons que $E_{n+1}$ est obtenu par contre-extension.

Nous appelons support de l'extension la partie :

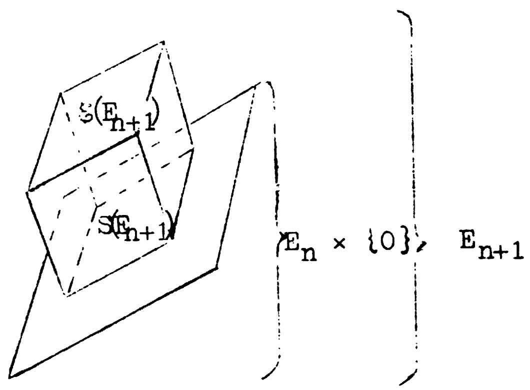
$$S(E_{n+1}) = \{(x , 0) ; x \in E_n , \exists (x , 1) \in E_{n+1}\} .$$

Nous dirons des éléments de $S(E_{n+1})$, qu'ils "participent à l'extension".

Nous appelons partie étendue, la partie :

$$\mathcal{E}(E_{n+1}) = \{(x , 1) ; x \in E_n\} = E_{n+1} - E_n \times \{0\}$$

On dira que l'extension est avec minimum si son support possède un minimum.




$$(E_n \times \{0\}) \subseteq E_{n+1} \subseteq (E_n \times \{0 , 1\})$$
$$S(E_{n+1}) = \{(x , 0) ; x \in E_n , \exists (x , 1) \in E_{n+1}\}$$
$$\mathcal{E}(E_{n+1}) = E_{n+1} - E_n \times \{0\}$$

Deux éléments sont dits "homologues", s'ils sont de la forme : l'un $(a , 0)$, l'autre $(a , 1)$.

Les éléments de $\mathcal{E}(E_{n+1}) \underset{\sim}{\cup} S(E_{n+1})$ sont deux à deux homologues, tandis que les éléments de $(E_{n+1} - [\mathcal{E}(E_{n+1}) \underset{\sim}{\cup} S(E_{n+1})])$ n'ont pas d'homologue.

Soit $x$ un élément, on notera $x^*$ son homologue (quand celui-ci existe).

Une extension sera dite caténaire si toute chaîne maximale du support est maximale dans l'ensemble initial.

THÉORÈME. - Une extension conserve la propriété de Jordan-Dedekind (J. D.) si, et seulement si, elle est caténaire.

Nature de l'ensemble initial pour un treillis obtenu par extension.

THÉORÈME. - Si $T$ est un treillis, obtenu par extension à partir d'un ensemble origine $E$, ce dernier est lui-même un treillis, sous-treillis convexe de $T$.

COROLLAIRE. - Si $T$ est distributif ou modulaire ou $\cup$-semi-modulaire ou $\cap$-semi-modulaire, le treillis initial l'est également.

THÉORÈME. - Un treillis $T_{n+1}$, obtenu par extension à partir du treillis $T_n$, est complet si, et seulement si, $T_n$ est complet.

## 2. Extension "latticielle" d'un treillis.

Dans le cas où l'ensemble origine $T_n$ est un treillis, nous appelons "latticielle" une extension qui conserve la structure de treillis ; c'est-à-dire que l'ensemble obtenu, $T_{n+1}$, est lui aussi un treillis (mais $T_{n+1}$ n'est pas obligatoirement un sous-treillis de $T_n \times \{0 , 1\}$). Le théorème suivant caractérise une telle extension. Nous étudierons ensuite les extensions préservant la distributivité, la modularité, l' $\cap$- et l' $\cup$-semi-modularité, la complémentarité.

THÉORÈME. - Une extension est latticielle si, et seulement si, $T_n$ étant le treillis initial et $T_{n+1}$ l'ensemble obtenu :

(1) $\forall \{(x , 0) , (y , 0)\} \subseteq S(T_{n+1})$, alors

$$[S(T_{n+1}) \underset{\sim}{\cap} \text{minor}(\{x , y\}) \neq \emptyset] \Longrightarrow [(x \cap y, 0) \in S(T_{n+1})] .$$

(2) $\forall \{x , y\} \subseteq T_n \times \{0\}$, alors :

$$S(T_{n+1}) \underset{\sim}{\cap} \text{major}(\{x , y\})$$ est non vide et possède un minimum.

Remarque : Treillis complet. - La seconde partie de la condition, exprimée dans le théorème précédent, est à remplacer par :

(2') $\max(T_n \times \{0\}) \in S(T_{n+1})$ .

## 3. Treillis obtenus par extensions successives.

Nous nous intéressons ici aux treillis (finis, d'ailleurs), obtenus par des extensions successives, la première portant sur le treillis à un seul élément.

THÉORÈME. - Les treillis finis obtenus par extensions successives, chaque fois avec minimum, à partir du treillis à un seul élément, sont les treillis dont la longueur est égale au nombre de leurs éléments $\cup$-irréductibles.

## 4. Conservation de la semi-modularité lors d'une extension.

Suivant qu'il s'agit d' $\cap$-semi-modularité ou d' $\cup$-semi-modularité, les conditions requises ne sont pas les mêmes, d'où les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME. - Une extension latticielle conserve l' $\cap$-semi-modularité si, et seulement si, tout intervalle participant à l'extension est convexe.

THÉORÈME. - Une extension conserve l' $\cup$-semi-modularité si, et seulement si, l'ensemble support est un sous-$\cap$-demi-treillis (du treillis initial), dont toute chaîne est maximale.

## 5. Extension latticielle, distributivité et modularité.

Nous nous proposons de caractériser les extensions qui conservent la distributivité ou la modularité. Puis nous établirons quelques résultats concernant les treillis distributifs. Préliminairement, démontrons le lemme suivant.

LEMME. - Soit un treillis $T_{n+1}$ obtenu par extension à partir du treillis $T_n$. Alors, $T_{n+1}$ est sous-treillis de $T_n \times \{0 , 1\}$ si, et seulement si, le support de l'extension est un sous-treillis convexe du treillis initial.

THÉORÈME. - Une extension latticielle conserve la modularité ou la distributivité si, et seulement si, le support de l'extension est un sous-treillis convexe du treillis initial.

THÉORÈME. - Les treillis distributifs finis sont les treillis obtenus par extensions successives à partir du treillis élémentaire à un seul élément, chaque extension ayant pour support un sous-treillis convexe.

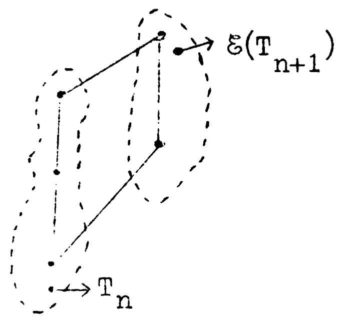
COROLLAIRE. - Un treillis distributif de longueur $n$ est sous-treillis du $n$-cube.

## 6. Relation entre co-atomes, $\cup$-générateurs maximaux et extension, dans un treillis fini distributif.

THÉORÈME. - Dans un treillis distributif fini, on peut mettre co-atomes et $\cup$-irréductibles maximaux en correspondance bi-univoque, de telle sorte qu'à chaque couple $(a_p , g_p)$ ainsi formé corresponde une possibilité d'obtenir le treillis donné par extension : le co-atome $a_p$ est le sommet du treillis initial, et l'élément $\cup$-générateur $g_p$ , associé à $a_p$ , est l'homologue du minimum du support de l'extension.

## 7. Treillis complémentés obtenus par extension.

Soit $T_{n+1}$ un treillis obtenu par extension à partir du treillis $T_n$ . Si $T_{n+1}$ est un treillis complémenté, cela signifie qu'il possède un maximum $I_n$ et un minimum $0$ . Le maximum $I_{n+1}$ est l'homologue d'un élément de $T_n \times \{0\}$ maximum dans $T_n \times \{0\}$ . Quant au minimum de $T_{n+1}$ , c'est aussi un minimum pour $T_n \times \{0\}$ . Ainsi, parler de $T_{n+1}$ comme d'un treillis complémenté revient à supposer implicitement que $T_n$ possède un maximum et un minimum. Par contre, $T_n$ n'est pas forcément complémenté. C'est le cas, dans l'exemple ci-contre, où $T_{n+1}$ est complémenté, alors que $T_n$ ne l'est pas.




THÉORÈME. - Un treillis $T_{n+1}$ , obtenu par extension à partir du treillis $T_n$ est complémenté si, et seulement si,

- $T_n$ possède un maximum et un minimum,
- $\forall x , \quad x \in T_n \times \{0\} , \quad \exists y , \quad y \in S(T_{n+1})$ ,

$$x \cap y = 0 , \quad (\text{major}(x , y) \underset{\sim}{\cap} S(T_{n+1}) = \max(T_n \times \{0\}) ,$$

(et alors $x$ et $y^*$ sont complémentaires).

Différentes façons possibles (en nombre fini) d'obtenir un treillis par extension.

Notons $T = (E_i \uparrow O_i)$ pour indiquer que $T$ peut être considéré comme obtenu par extension à partir de $O_i$ (sous-treillis convexe de $T$ ), avec, pour partie étendue, $E_i$ . S'il y a $p$ façons différentes d'obtenir $T$ par extension, on écrira :

$$T = (E_1 \uparrow O_1) = (E_2 \uparrow O_2) = \ldots = (E_p \uparrow O_p) .$$

Il est intéressant d'étudier l'intersection ensembliste des ensembles initiaux et l'union assembliste des parties étendues.

$\underset{\sim}{\bigcup}_{i=1}^{p} E_i$ est l'nsemble des éléments de $T$ qui font partie d'au moins une partie étendue.

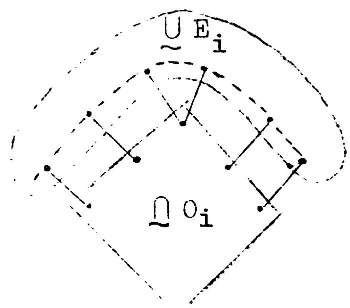
$\underset{\sim}{\bigcap}_{i=1}^{p} O_i$ est l'ensemble des éléments qui ne font partie d'aucune partie étendue ou, si l'on préfère, qui appartiennent à tous les treillis initiaux. Cet ensemble a souvent une signification : dans le treillis des sous-arbres d'un arbre, c'est l'ensemble des sous-arbres de l'arbre obtenu en supprimant toutes les feuilles ; dans un treillis distributif, c'est le sous-treillis construit sur les $\cup$-générateurs non maximaux.

THÉORÈME. - $\underset{\sim}{\bigcap} O_i$ contient, avec tout élément, tous ceux qui lui sont inférieurs, et est fermée par $\cup$ . De plus, si $T$ est complet :

$$\max\left(\underset{i\in[1,p]}{\underset{\sim}{\bigcap}} O_i\right) = \inf(\{\max(O_i) \ , \quad i \in [1 \ , \ p]\}) \ .$$

THÉORÈME. - $\underset{\sim}{\bigcup} E_i$ contient, avec tout élément, tous ceux qui lui sont supérieurs. Par ailleurs, un élément de $\underset{\sim}{\bigcup} E_i$ est $\cup$-irréductible dans $T$ si, et seulement si, il est minimal dans $\underset{\sim}{\bigcup} E_i$ ; un tel élément est, de plus, maximal parmi les éléments $\cup$-irréductibles de $T$ .

Commentaire. - Le dessin ci-contre illustre comment se présente $\underset{\sim}{\bigcup} E_i$ et $\underset{\sim}{\bigcap} O_i$ . On retrouve d'une certaine façon la notion de "couche" dont nous parlerons plus loin.




## 2. Immersion d'un treillis dans un autre et codage booléen d'un treillis.

### 1. Codage d'un treillis et codage booléen. Définitions.

Nous appelons codage une application injective d'un treillis donné $T$ (treillis "codé"), dans un autre $S$ (treillis de codage) :

$$T \xrightarrow{h} S \ .$$

Si le treillis de codage est un treillis de Boole, nous parlerons de codage booléen. D'une façon générale, nous désignerons un codage par $h$ .

Nous appelons $\cup$-codage un codage $h : T \xrightarrow{h} S$ tel que :

$$(\forall \{x \ , \ y\} \subseteq T) \implies (h(x \cup y) = h(x) \cup h(y)) \ .$$

Nous appelons $\cap$-codage un codage $h : T \xrightarrow{h} S$ tel que :

$$(\forall \{x \ , \ y\} \subseteq T) \implies (h(x \cap y) = h(x) \cap h(y)) \ .$$

$\cap$-codage booléen canonique. - Soit un treillis $T$ fini, et soit

$$G = \{g_1 , g_2 , \dots , g_n\}$$

l'ensemble des $\cup$-irréductibles ($\neq \min(T)$) de $T$. Définissons le codage suivant : A tout élément $x$ de $T$, associons $G_x = \{g_i , g_i \in G , g_i \leq x\}$, l'application

$$T \xrightarrow{h} P(G) ,$$

ainsi définie, immerge $T$ dans $P(G)$, treillis de Boole de dimension $n$. Dans $T$, $x = \sup G_x$, $G_x$ est maximal et $h$ est croissante. Constatons que

1° $h$ est injective :

$$(x = y) \iff (G_x = G_y) \iff \begin{pmatrix} \sup G_x = \sup G_y \\ \text{dans } T \quad \text{dans } T \end{pmatrix}$$

2° $h$ est un $\cap$-homomorphisme, en effet :

$$G_{x\cap y} \subseteq G_x \cap G_y , \text{ car } G_{x\cap y} \subseteq \begin{cases} G_x \\ G_y \end{cases} ,$$

et $h$ est croissante. Donc $h$ est un $\cap$-codage booléen.

Dans la pratique, on peut définir les lettres $g_1 , g_2 , \dots , g_n$, associées aux $\cup$-irréductibles, considérer l'algèbre de Boole libre engendrée par ces lettres (c'est-à-dire l'ensemble des polynômes booléens en $g_i$) et, pour chaque $G_x$, définir le monôme canonique :

$$h(x) = \pi g_i \, \pi \bar{g}_j , \quad g_i \in G_x , \quad g_j \notin G_x ,$$

enfin, attacher au treillis lui-même la fonction :

$$f(T) = \sum_{x\in T} h(x) .$$

Notons que cette fonction possède les monômes :

$$\bar{g}_1 , \bar{g}_2 , \dots , \bar{g}_n \text{ et } g_1 , g_2 , \dots , g_n .$$

De manière analogue, on définit l' $\cup$-codage booléen canonique.

THÉORÈME D'ISOMORPHISME. - Un $\cup$- ou $\cap$-codage conduit à un isomorphisme d'ordre entre le treillis $T$ codé et son image dans le treillis $S$ de codage.

## 2. Fonction booléenne caractéristique d'un treillis fini.

THÉORÈME. - La fonction booléenne attachée par $\cap$-codage booléen canonique (ou $\cup$- ... ) à un treillis fini est caractéristique de ce treillis.

Remarque 1. - Il est nécessaire de préciser les variables ; par exemple :

$$f(A, B, C, D) = E + D = (A + \bar{A})(B + \bar{B})(\bar{C} + D) .$$

Remarque 2. - Etant donnée une fonction, nous ne connaissons pas de condition suffisante pour qu'elle soit la fonction attachée à un treillis.

Applications.

- Représentation de treillis, et contrôle, au passage, de la structure de treillis ; si on n'a pas un treillis, un conflit naîtra, en ce sens que l'on tentera d'attribuer à un élément, un monôme booléen déjà attribué. Naturellement, il ne peut s'agir que d'un ensemble fini, et on commencera par s'assurer qu'il possède un minimum et un maximum.

- Représentation aussi de sup- ou inf-demi-treillis (arborescences, etc., très répandus en documentation, enquêtes d'opinions, par exemple).

- Recherches concernant les treillis par l'intermédiaire de la fonction caractéristique attachée. En particulier, il est facile de rechercher, sur la fonction, plutôt que sur le treillis lui- même, si celui-ci est un produit de treillis.

### 3. Dimension minimale et conservation des opérations $\cup$ ou $\cap$ .

THÉORÈME. - Un $\cap$-codage booléen est de dimension au moins $n$ ( $n$ : nombre des $\cup$-irréductibles du treillis à coder), et, pour cette dimension, le seul codage possible est le codage canonique.

### 4. Fonctions attachées aux treillis obtenus par extension.

Le théorème le plus simple, et de preuve immédiate, est le suivant :

THÉORÈME. - Un treillis fini est obtenu par extension avec élément minimum si, et seulement si, sa fonction booléenne caractéristique obtenue par $\cap$-codage canonique est décroissante pour au moins une variable.

THÉORÈME GÉNÉRAL. - Un treillis fini est obtenu par extension si, et seulement si, la fonction booléenne, obtenue par $\cap$-codage canonique, attachée au treillis dual, est croissante pour au moins une variable.

## 3. Questions relatives à la modularité ou la semi-modularité.

### 1. Fermetures associées aux opérations $\cup$ et $\cap$ dans un treillis.

Indice d'un élément d'un treillis. - L'indice d'un élément $a$ d'un treillis, noté $i(a)$ , est la longueur de la plus longue suite d' $\cup$-irréductibles inférieurs ou égaux à $a$ .

Ainsi, cette notion n'est pas toujours définie.

Dans les treillis atomiques, les atomes ont l'indice 1 .

S'il existe, le minimum du treillis est d'indice nul.

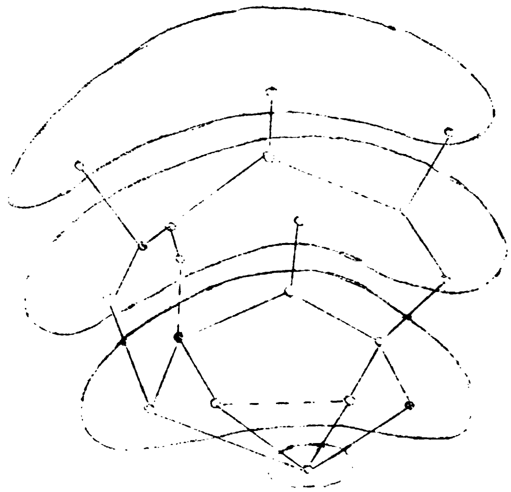
LEMME. - Dans un treillis modulaire atomique, les éléments d'indice $\leq 1$ forment un sous-treillis convexe.

THÉORÈME. - Dans un treillis modulaire atomique $T$ , les éléments d'indice $\leq i$ , forment un sous-treillis convexe $T_i$ pour tout $i$ . De plus, un élément ayant une représentation d'indice $i+1$ ne comportant qu'un $\cup$-irréductible d'indice $i+1$ , couvre un et un seul élément de $T_i$ .

Commentaire. - On aboutit à une sorte de stratification du treillis suivant l'indice : l'élément nul est d'indice 0 . Puis les éléments d'indice 1 forment une strate $S_1$ . Puis, les éléments d'indice 2 forment une strate $S_2$ ; etc.

Chaque strate est fermée pour l'union.

COROLLAIRE 1. - Dans un treillis modulaire, $i(a \cup b) = \max(i(a) , i(b))$ .




## 4. Treillis $(\alpha)$ et $\alpha$-affaiblis.

Nous étudions ici une classe de treillis dont le premier exemple fut le treillis des sous-arbres d'un arbre. Ces treillis sont très liés à la notion d'extension que nous avons développée ; ils sont difficilement caractérisables algébriquement, ce qui s'explique parce qu'un sous-treillis d'un treillis $(\alpha)$ ou $\alpha$-affaibli n'est pas forcémént $(\alpha)$ ou $\alpha$-affaibli.

### 1. Condition $(\alpha)$ pour un treillis fini.

Un treillis $T_n$ fini est dit satisfaire la condition $(\alpha)$ d'ordre $n$ ou, plus simplement, $T_n$ est dit $(\alpha)$ d'ordre $n$ si :

$(\alpha - 1)$ $T_n$ possède exactement $n$ $\cup$-irréductibles,

$(\alpha - 2)$ Toute chaîne maximale joignant $\min(T_n)$ à $\max(T_n)$ est de longueur $n$ (c'est-à-dire $T_n$ est J. D. de longueur $n$ ),

$(\alpha - 3)$ Les atomes sont les seuls éléments $\cup$-irréductibles de $T_n$ .

Remarque. - Pour un treillis $T$ infini, la condition $(\alpha)$ peut s'exprimer :

- $T$ est atomique,
- Les atomes sont les seuls $\cup$-irréductibles,
- Le treillis $T$ est J. D. de longueur égale au nombre de ses $\cup$-irréductibles.

## 2. Conditions $(\alpha)$-affaiblie pour un treillis fini.

Un treillis fini $T_n$ est dit satisfaire la condition $(\alpha)$-affaiblie d'ordre $n$, ou, plus simplement, $T_n$ est dit $\alpha$-affaibli d'ordre $n$, s'il ne satisfait que les deux premiers points de la définition précédente.

L'intérêt de ces deux définitions provient de ce que de nombreux treillis que nous avons étudiés satisfont l'une ou l'autre de ces deux conditions, dont nous verrons qu'elles sont caractéristiques d'une classe assez nombreuse de treillis.

THÉORÈME. - Tout treillis $\alpha$-affaibli d'ordre $n$ est :

- sous-treillis d'un treillis $S$, $(\alpha)$ d'ordre $n$,
- formé de chaînes maximales de $S$.

Réciproquement : Si $T$ est un treillis $\alpha$-affaibli d'ordre $n$, et si $a < b$ sont deux éléments dans $T$, de hauteur relative $p$, tout sous-treillis $T_p$ de $T$, formé de chaînes maximales (dans $T$) de $[a, b]$, vérifie la condition $\alpha$-affaiblie d'ordre $p$.

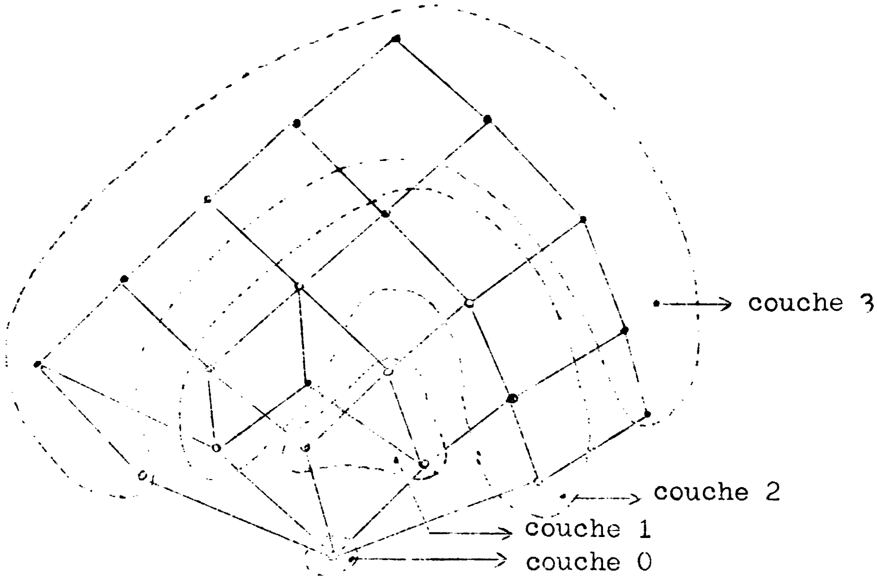
## 3. Treillis $\alpha$-affaiblis et extension.

THÉORÈME. - les treillis $\alpha$-affaiblis sont les treillis générables par extensions (latticielles) successives à partir du treillis à un seul élément, chaque extension étant caténaire et avec minimum.

Préordre associé à l'extension. - Soit $T_n$ un treillis $\alpha$-affaibli. Il peut s'obtenir de différentes façons par extensions à partir d'un treillis de longueur $n - 1$. Considérons l'union des parties étendues possibles, $\underset{\sim}{\cup} E_i$, pour reprendre les mêmes notations que dans le chapitre 1. Considérons $T_n - \underset{\sim}{\cup} E_i$.

Pour un treillis $\alpha$-affaibli, $T_n - \underset{\sim}{\cup} E_i$ est facile à déterminer : c'est le sous-treillis convexe dont le maximum est la borne inférieure des co-atomes. A son tour, ce treillis est $\alpha$-affaibli puisque sous-treillis à chaînes maximales, d'où pour lui aussi une dernière couche, etc. Finalement, c'est tout le treillis $T_n$ qui se trouve stratifié en diverses "couches".

Exemple :




Couche dans un treillis $\alpha$-affaibli $T$ .

Propriété 1. - Chaque couche ne comporte que des $\cup$-irréductibles incomparables deux à deux, et contient, avec tout couple d'éléments, leur borne supérieure.

Propriété 2. - Chaque élément d'une couche ne couvre qu'un élément au plus de la couche inférieure.

Propriété 3. - Pour chaque couche $C_i$ $(i \neq 0)$ , $[\max(C_{i-1}) , \max(C_i)]$ est un treillis de Boole (Il y a ainsi entre $\min(T)$ et $\max(T)$ , une suite de treillis de Boole).

Propriété 4. - Dans une couche $C_i$ , il y a autant de co-atomes, relativement à $\max(C_i)$ , qu'il y a d' $\cup$-irréductibles dans la couche, cela par application du théorème,

$$(a \succ b) \implies (\forall y , y \leqslant a) \implies (\exists u_{ab} , y \geqslant u_{ab} \text{ ou } y \leqslant b) .$$

N. B. - Démonstrations et compléments se trouvent dans :

BOULAYE (Guy). - Contribution à la théorie des treillis (Thèse Sc. math. Grenoble, 1970).

(Texte reçu le 7 décembre 1970)

Guy BOULAYE
Institut de mathématiques appliquées
CEDEX 53
38 - GRENOBLE-Gare