Jacques Ravel

Théorie axiomatique de l'essentialité

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, n° 2 (1967-1968), exp. n° 18,
p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A9_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, n° 18
13 mai 1968

THÉORIE AXIOMATIQUE DE L'ESSENTIALITÉ

par Jacques RAVEL

Soit T un treillis complet, c'est-à-dire un ensemble ordonné (dont l'ordre sera noté $\leqslant$) dans lequel toute famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de T a une borne inférieure, encore appelée intersection, et notée $\bigwedge_{i\in I} x_i$ [et, par là même, une borne supérieure, encore appelée union, et notée $\bigvee_{i\in I} x_i$].

On appelle <u>relation d'essentialité</u> dans T , toute relation $x \lhd y$ entre éléments de T telle que

1° $(\forall\ x \in T)$, $(x \lhd x)$ [<u>réflexivité</u>].

2° $(\forall\ x , y \in T)$, $(x \lhd y \implies x \leqslant y)$ [c'est-à-dire plus forte que l'ordre de T , et, en particulier, telle que l'antisymétrie soit vérifiée, car si $x \lhd y$ et $y \lhd x$, on a $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, d'où $x = y$].

3° $(\forall\ x , y , z \in T)$, $(x \lhd y$ et $y \lhd z \implies x \lhd z)$ [<u>transitivité</u>].

4° $(\forall\ x , y , z \in T)$, $[(x \leqslant y \leqslant z$ et $x \lhd z) \implies (x \lhd y$ et $y \lhd z)]$ [<u>convexité de</u> T <u>pour l'essentialité</u>].

5° L'ensemble T est inductif pour l'ordre d'essentialité.

Si $x , y \in T$, et si $x \lhd y$, on dit que x est <u>essentiel</u> dans y , ou que y est une <u>extension essentielle</u> de x .

THÉORÈME. - <u>L'ensemble des fermetures d'un ensemble inductif est un treillis complet</u>.

Rappelons :

- qu'on appelle fermeture dans un ensemble ordonné E , toute application f de E dans lui-même extensive, croissante et idempotente, c'est-à-dire telle que

1° $(\forall\ x \in E)$, $(x \leqslant f(x))$,

2° $(\forall\ x , y \in E)$, $(x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y))$,

3° $(\forall\ x \in E)$, $(f[f(x)] = f(x))$;

- que l'ensemble $I(f) = \{x \in E \mid f(x) = x\}$ des invariants de f est égal à $f(E)$ et est tel que $f(x)$ soit le plus petit majorant de x invariant par f ;

– que d'ailleurs, inversement, si F est une partie de E telle que, pour tout élément x de E, l'ensemble F_x des éléments de F majorant x ait un plus petit élément $f(x)$, f est une fermeture dans E telle que $I(f) = F$;

– que la relation $f \leqslant g \iff (\forall\, x \in E)\ (f(x) \leqslant g(x))$ est une relation d'ordre dans l'ensemble E' des fermetures de E, et que $f \leqslant g \iff I(g) \subseteq I(f)$;

– enfin que l'application $f \to I(f)$ qui, à une fermeture, associe l'ensemble de ses invariants, est un anti-isomorphisme de E' sur l'ensemble Φ ordonné par inclusion des parties F de E telles que, pour tout élément x de E, l'ensemble F_x des éléments de F majorant x ait un plus petit élément.

Nous allons montrer que, si E est inductif, Φ n'est autre que l'ensemble Ψ des parties F de E telles que tout minorant maximal d'une partie quelconque de F appartienne à F : Φ étant une famille de Moore sera un treillis complet, et cette propriété se transmettra à E' par anti-isomorphisme.

On a toujours $\Phi \subseteq \Psi$; en effet, si y est un minorant maximal de la partie X de l'élément F de Φ, soit f la fermeture dont F est l'ensemble des invariants : On a $(\forall x \in X)\ (y \leqslant x)$, d'où $(\forall\, x \in X)\ (f(y) \leqslant f(x) = x)$ et, puisque $y \leqslant f(y)$, $f(y) = y$, vu la maximalité de y ; ainsi $y \in I(f) = F$ et $F \in \Psi$.

Achevons la démonstration du théorème en prouvant que si F est une partie de l'ensemble inductif E telle que tout minorant maximal d'une partie de F appartienne à F et si $x \in E$, l'ensemble F_x des éléments de F majorant x a un plus petit élément. Si X est une partie de E, nous désignerons par $\rho(X)$ [resp. par $\sigma(X)$] l'ensemble des majorants [resp. des minorants] de X dans E ; on dit qu'une partie S de E est une section de E s'il existe des parties X et Y de E telles que $S = \rho(X) \cap \sigma(Y)$.

Toute section d'un ensemble inductif est inductive (pour l'ordre induit) ; soit en effet $(x_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée non vide d'éléments de $S = \rho(X) \cap \sigma(Y)$ si $x = \sup_{E,\, i\in I} x_i$, $x \in \rho(X)$, car si $j \in I$, on a $x \geqslant x_j \in \rho(X)$; si $y \in Y$, y est un majorant de la famille $(x_i)_{i\in I}$ et $y \geqslant x$, d'où $x \in \sigma(Y)$; ainsi $x \in S$ et $x = \sup_{S,\, i\in I} x_i$.

La section $S = \rho(\{x\}) \cap \sigma(F_x)$ n'étant pas vide, puisque $x \in S$ a au moins un élément maximal y ; je dis que $y \in F$, car y est un minorant maximal dans E de la partie F_x de F (sinon, la maximalité de y dans S serait contredite) ; ainsi $y \in F_x$, et, puisque $y \in S \subseteq \sigma(F_x)$, y est bien le plus petit élément de F_x.

En particulier, tout ensemble inductif a une plus grande fermeture, et nous allons identifier la plus grande fermeture de l'ensemble inductif $T_{\lhd}$ qu'est l'ensemble T muni de l'ordre d'essentialité.

Dans cet ensemble, tout élément a au moins un majorant maximal [pour l'ordre de T aussi bien que pour l'ordre d'essentialité : en effet, si y est un $\lhd$-majorant de x maximal pour l'essentialité, et si $z \geqslant y$ est tel que $x \lhd z$, alors, par convexité, $y \lhd z$, d'où $z = y$ et la maximalité de y pour l'ordre de T ; si y est un $\lhd$-majorant de x maximal pour l'ordre de T, il l'est <u>a fortiori</u> pour l'ordre d'essentialité, qui entraîne l'ordre de T].

On désigne par $M(x)$ l'ensemble des extensions essentielles maximales de x (c'est-à-dire l'ensemble des majorants maximaux de x pour l'essentialité).

THÉORÈME 1. - <u>L'application</u> $x \to \omega(x) = \bigwedge_{y \in M(x)} y$ <u>est la plus grande fermeture de l'ensemble inductif</u> $T_{\lhd}$.

1° <u>Extensivité</u> : Si $x \in T$, soit $y \in M(x)$; on a $x \leqslant \bigwedge_{y \in M(x)} y \leqslant y$, d'où, puisque $x \lhd y$, par convexité, $x \lhd \bigwedge_{y \in M(x)} y = \omega(x)$.

2° <u>Croissance</u> : Si $x, y \in T$ et si $x \lhd y$, alors $M(y) \subseteq M(x)$ (car si $z \in M(y)$, on a $y \lhd z$, d'où, par transitivité $x \lhd z$; et si $z \lhd t$, on a $y \lhd t$, par transitivité, d'où $z = t$, en raison de la maximalité de z : ainsi, $z \in M(x)$) d'où $\omega(x) = \bigwedge_{z \in M(x)} z \leqslant \bigwedge_{z \in M(y)} z = \omega(y)$. Ainsi $x \leqslant \omega(x) \leqslant \omega(y)$: mais, puisque $x \lhd y$ et que $y \lhd \omega(y)$, par extensivité, on a, par transitivité, $x \lhd \omega(y)$, d'où par convexité, $\omega(x) \lhd \omega(y)$.

3° <u>Idempotence</u> : Si $x \in T$, on a $M(\omega(x)) = M(x)$. En effet, puisque $x \lhd \omega(x)$, on a $M(\omega(x)) \subseteq M(x)$; soit maintenant $y \in M(x)$: on a $\omega(x) = \bigwedge_{y \in M(x)} y \lhd y$, d'où $x \leqslant \omega(x) \leqslant y$, et, puisque $x \lhd y$, par convexité, $\omega(x) \lhd y$; si, maintenant $y \lhd z$, on a $x \lhd \omega(x) \lhd y \lhd z$ d'où, par transitivité, $x \lhd z$; vu la maximalité de y il s'ensuit que $y = z$, d'où le fait que $y \in M(\omega(x))$; ainsi $M(x) \subseteq M(\omega(x))$, d'où $M(x) = M(\omega(x))$, $\omega[\omega(x)] = \bigwedge_{y \in M(\omega(x))} y = \bigwedge_{y \in M(x)} y = \omega(x)$ et le résultat.

Soit maintenant φ une fermeture de $T_{\lhd}$: si $x \in T$, soit $y \in M(x)$; on a $x \lhd y$, d'où, en raison de la croissance de φ, $\varphi(x) \lhd \varphi(y)$; mais puisque $y \lhd \varphi(y)$, en raison de l'extensivité, on a, compte tenu de la maximalité de y, $\varphi(y) = y$, d'où $\varphi(x) \lhd y$, et, en particulier, $\varphi(x) \leqslant y$, ce $(\forall\, y \in M(x))$: ainsi, $\varphi(x) \leqslant \bigwedge_{y \in M(x)} y = \omega(x)$; comme $x \lhd \varphi(x)$, vu l'extensivité de φ, on a $x \leqslant \varphi(x) \leqslant \omega(x)$, d'où, puisque $x \lhd \omega(x)$, par convexité, $\varphi(x) \lhd \omega(x)$, ce $(\forall\, x \in T)$: ainsi $\varphi \lhd \omega$, et le résultat est démontré.

On dit qu'un élément x de T est <u>fermé</u> dans T si x est la seule extension essentielle de x dans T, c'est-à-dire si $(\forall\, y \in T)\ (x \lhd y \implies x = y)$.

THÉORÈME 2. - <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1° <u>Tout élément</u> x <u>de</u> T <u>possède une plus grande extension essentielle dans</u> T (<u>qui est alors, par définition,</u> $\omega(x)$) <u>et</u> ω <u>est une fermeture dans</u> T.

2° <u>L'essentialité de</u> T <u>est compatible avec l'union (finie)</u>.

3° <u>L'intersection de deux éléments de</u> T <u>fermés dans</u> T <u>est fermée dans</u> T.

Remarquons que ω, qui est idempotente, est, pour l'ordre de T, une application extensive [car $x \lhd \omega(x) \implies x \leqslant \omega(x)$, ce $(\forall\, x \in T)$] ; ainsi, pour que ω soit une fermeture dans T pour l'ordre de T, et non plus seulement dans $T_{\lhd}$, pour l'ordre d'essentialité, il faut et il suffit que ω soit croissante pour l'ordre de T, c'est-à-dire que l'on ait $(\forall\, x\,,\, y \in T)\ (x \leqslant y \implies \omega(x) \leqslant \omega(y))$. Une condition équivalente est la suivante : soit $I(\omega) = \{x \in T \mid \omega(x) = x\}$ l'ensemble des invariants de ω ; ω est une fermeture dans si, et seulement si, $I(\omega)$ est tel que $(\forall\, x\,,\, y \in T)\ (\omega(x) \wedge \omega(y) \in I(\omega))$.

- La condition est nécessaire : en effet, si ω est une fermeture dans le treillis complet T, l'ensemble de ses invariants est un treillis complet dont l'intersection coïncide avec celle de T.

- La condition est suffisante : si elle est vérifiée, soient $x\,,\, y \in T$ tels que $x \leqslant y$; on a, puisque $x \leqslant \omega(x)$ et $y \leqslant \omega(y)$, $x = x \wedge y \leqslant \omega(x) \wedge \omega(y) \leqslant \omega(x)$, d'où, par convexité, puisque $x \lhd \omega(x)$, $x \lhd \omega(x) \wedge \omega(y)$. Mais on sait que $\omega(x)$ est le plus petit invariant de ω majorant x (pour l'essentialité), d'où

$$\omega(x) \leqslant \omega(x) \wedge \omega(y) \leqslant \omega(y)\ ,$$

et le résultat est démontré.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 2.

1° $\implies$ 2° : Vu la commutativité de l'union, il suffit de prouver que $(\forall\, x\,,\, y\,,\, z \in T)\ (x \lhd y \implies x \vee z \lhd y \vee z)$; on a, vu 1°, et puisque $x \lhd y$, $y \leqslant \omega(x)$, ω étant une fermeture dans T, $x \leqslant x \vee z \implies \omega(x) \leqslant \omega(x \vee z)$, d'où $y \leqslant \omega(x \vee z)$; mais $z \leqslant x \vee z < \omega(x \vee z)$, d'où $y \vee z \leqslant \omega(x \vee z)$, soit $x \vee z \leqslant y \vee z \leqslant \omega(x \vee z)$. Mais, vu l'extensivité de ω, $x \vee z \lhd \omega(x \vee z)$, d'où, par convexité $x \vee z \lhd y \vee z$.

2° $\implies$ 3° : Soient x et y des éléments de T fermés dans T : si $x \wedge y \lhd z$ on a, vu 2°, $x = x \vee (x \wedge y) \lhd x \vee z$, d'où $x \vee z = x$ et $z \leqslant x$, de même $z \leqslant y$, d'où $z \leqslant x \wedge y$ et $z = x \wedge y$; ainsi $x \wedge y$ est fermé dans T, et le résultat est démontré.

3° $\Longrightarrow$ 1° : Si $x \in T$, les extensions essentielles maximales de x sont fermées dans T : ainsi, si $y , z \in M(x)$, $y \wedge z$ est fermé dans T ; mais $x \leqslant y \wedge z \leqslant y$ et $x \lhd y$, d'où, par convexité, $y \wedge z \lhd z$, d'où $y \wedge z = z$ et $y \geqslant z$; de même $z \geqslant y$ et $z = y$ est l'unique extension essentielle maximale de x , donc la plus grande extension essentielle de x , vu l'inductivité de l'ensemble des majorants de x pour l'essentialité.

Tout élément x de T a donc une plus grande extension essentielle $\omega(x)$: il s'ensuit que les invariants de ω sont précisément les éléments de T fermés dans T , d'où le fait que ω est une fermeture dans T , compte tenu de la condition suffisante d'une équivalence précédente.

Les conditions précédentes sont aussi équivalentes à la suivante :

4° <u>Toute intersection d'une famille quelconque d'éléments de</u> T <u>fermés dans</u> T <u>est fermée dans</u> T .

En effet, 4° $\Longrightarrow$ 3° , et, si on a 3°, ω est une fermeture dans le treillis complet T , et 4° est bien vérifiée.

<u>Remarque</u>. - L'union dans $T_{\lhd}$, quand elle existe, coïncide avec l'union dans T : en effet, si $\bigcup_{i\in I} x_i = \sup_{\lhd}{}_{i\in I} x_i$, on a $(\forall\ i \in I)$ $(x_i \lhd \bigcup_{i\in I} x_i)$, d'où $(\forall\ i \in I)$ $(x_i \leqslant \bigcup_{i\in I} x_i)$ et $\bigvee_{i\in I} x_i \leqslant \bigcup_{i\in I} x_i$. Soit $j \in I$: on a $x_j \leqslant \bigvee_{i\in I} x_i \leqslant \bigcup_{i\in I} x_i$ et $x_j \lhd \bigcup_{i\in I} x_i$, d'où par convexité, $\bigvee_{i\in I} x_i \lhd \bigcup_{i\in I} x_i$ et $(\forall\ j \in J)$ $(x_j \lhd \bigvee_{i\in I} x_i)$: ainsi $\bigvee_{i\in I} x_i = \bigcup_{i\in I} x_i$ et le résultat est démontré.

THÉORÈME 3. - <u>Soit</u> T <u>un treillis complet intercontinu [c'est-à-dire tel qu'on ait, pour toute famille totalement ordonnée</u> $(x_i)_{i\in I}$ <u>d'éléments de</u> T (<u>donc telle que</u> $(\forall\ i , j \in I)$ $(x_i \leqslant x_j$ ou $x_j \leqslant x_i)$) <u>et pour tout élément</u> x <u>de</u> T , $x \wedge (\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I} (x \wedge x_i)$]. <u>Si</u> F <u>est une partie quelconque de</u> T , <u>la relation</u>

$$x \underset{F}{\lhd} y = [x \leqslant y \quad \text{et} \quad (\forall\ z \in F)(x \wedge z = 0 \implies y \wedge z = 0)]$$

<u>est une relation d'essentialité dans</u> T [nous désignons par 0 le plus petit élément de T].

<u>Démonstration</u>.

1° $(\forall\ x \in T)$ $[x \leqslant x$ et $(\forall\ z \in F)(x \wedge z = 0 \implies x \wedge z = 0]$ d'où la **réflexivité** de $\underset{F}{\lhd}$.

2° $\underset{F}{\lhd}$ est par définition même plus forte que l'ordre de T .

3° Si $x \underset{F}{\lhd} y$ et $y \underset{F}{\lhd} z$, on a $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, d'où $x \leqslant z$, et si $t \in F$ est tel que $x \wedge t = 0$, alors puisque $x \underset{F}{\lhd} y$, $y \wedge t = 0$, d'où, puisque $y \underset{F}{\lhd} z$, $z \wedge t = 0$. Ainsi, $x \underset{F}{\lhd} z$, et $\underset{F}{\lhd}$ est transitive.

4° Si $x \leqslant y \leqslant z$ et $x \underset{F}{\lhd} z$, montrons que $x \underset{F}{\lhd} y$ et que $y \underset{F}{\lhd} z$. En effet, si $t \in F$ est tel que $x \wedge t = 0$, on a aussi $z \wedge t = 0$, d'où, puisque $x \wedge t \leqslant y \wedge t \leqslant z \wedge t$ $y \wedge t = 0$, et $x \underset{F}{\lhd} y$; si $t \in F$ est tel que $y \wedge t = 0$, on a, puisque $0 \leqslant x \wedge t \leqslant y \wedge t$, $x \wedge t = 0$, d'où aussi $z \wedge t = 0$. Ainsi, $y \underset{F}{\lhd} z$, et la convexité de $\underset{F}{\lhd}$ est démontrée.

5° Soit $(y_i)_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée pour $\underset{F}{\lhd}$ d'éléments de T $[(\forall\ i\ ,\ j \in I)(y_i \underset{F}{\lhd} y_j$ ou $y_j \underset{F}{\lhd} y_i)]$. On a $y = \bigvee_{i \in I} y_i = \sup_{i \in I}^{\underset{F}{\lhd}} y_i$. En effet,

(a) Si $i \in I$, montrons que $y_i \underset{F}{\lhd} y$. On a $y_i \leqslant y$; soit maintenant $z \in F$ tel que $y_i \wedge z = 0$. Si $j \in I$, ou bien $y_i \underset{F}{\lhd} y_j$, et alors $y_j \wedge z = 0$, ou bien $y_j \underset{F}{\lhd} y_i$, et alors $y_j \leqslant y_i$ et $0 \leqslant y_j \wedge z \leqslant y_i \wedge z = 0$ entraîne $y_j \wedge z = 0$. Ainsi $(\forall\ j \in I)$ $(y_j \wedge z = 0)$, d'où $y \wedge z = (\bigvee_{j \in I} y_j) \wedge z = \bigvee_{j \in I} (y_j \wedge z) = 0$ et $y_i \underset{F}{\lhd} z$.

(b) Soit $x \in T$ tel que $(\forall\ i \in I)$ $(y_i \underset{F}{\lhd} z)$. On a, en particulier $(\forall\ i \in I)$ $(y_i \leqslant z)$, d'où $y \leqslant z$. Ainsi, si $i_0 \in I$, on a $y_{i_0} \leqslant y \leqslant z$ et $y_{i_0} \underset{F}{\lhd} z$, d'où $y \underset{F}{\lhd} z$ et le fait que y est bien le plus petit $\underset{F}{\lhd}$-majorant des y_i .

L'ensemble des relations d'essentialité définies dans un treillis T est, pour l'ordre d'implication, un treillis complet dont le plus petit élément est l'égalité et dont le plus grand élément est l'ordre de T . Notons au passage qu'on peut associer, à tout élément t de T , la relation $\underset{F}{\lhd}$ correspondant à

$$F = [0\ ,\ t] = \{x \in T \mid x \leqslant t\} .$$

Dès que F est une section initiale de T , la relation d'essentialité associée à F est compatible avec l'intersection : c'est le cas en particulier lorsque $F = T$, et ce fait nous servira dans la démonstration du théorème suivant.

THÉORÈME 4. - Soit T un treillis de Johnson [c'est-à-dire un treillis complet, modulaire et intercontinu] et soit ω la plus grande fermeture de l'ensemble T ordonné par la relation

$$x \lhd y \iff [x \leqslant y \text{ et } (\forall\ z \in T)\ (x \wedge z = 0 \implies y \wedge z = 0)]$$

(dont nous dirons qu'elle est la relation d'essentialité de T).

Les propriétés équivalentes du théorème 2 sont encore équivalentes à la suivante :

5° ω <u>est une fermeture dans</u> T , <u>et le treillis des invariants de</u> ω <u>est modulaire</u>.

[ω étant une fermeture dans le treillis complet T , $I(\omega)$ est un treillis complet, pour l'ordre induit par celui de T : son intersection $\cap$ coïncide avec celle de T , et son union $\cup$ est donnée par $\bigcup_{i\in I} x_i = \omega(\bigvee_{i\in I} x_i)$; sa modularité peut donc s'exprimer par le fait que $(\forall\, x , y , z \in I(\omega))$ les relations

$$\begin{cases} x \leqslant y \\ x \wedge z = y \wedge z \\ \omega(x \vee z) = \omega(y \vee z) \end{cases}$$

entraînent l'égalité de x et de y .]

1° $\Longrightarrow$ 5° : Comme $x \leqslant y \Longrightarrow x \vee z \leqslant y \vee z \leqslant \omega(y \vee z) = \omega(x \vee z)$ et puisque $x \vee z \lhd \omega(x \vee z)$, en raison de l'extensivité de ω , on a, par convexité, $x \vee z \lhd y \vee z$, d'où, en raison de la compatibilité de l'essentialité avec l'intersection, $(x \vee z) \wedge y \lhd (y \vee z) \wedge y = y$; mais, par modularité, puisque $x \leqslant y$,

$$(x \vee z) \wedge y = x \vee (z \wedge y) = x \vee (z \wedge x) = x$$

et $x \lhd y$, d'où $y = x$, puisque la plus grande extension essentielle de x est $\omega(x) = x$ (x étant invariant par ω).

5° $\Longrightarrow$ 1° : Si $x \in T$, l'ensemble $\{y \in T \mid x \wedge y = 0\}$ est un sous-ensemble inductif non vide de T [inductif en raison de l'intercontinuité, non vide, puisque 0 lui appartient]. Il a donc des éléments maximaux qui seront appelés <u>compléments</u> de x (dans T) ; JOHNSON a montré que si y est un complément de x dans T , on a $x \vee y \lhd I$ [nous désignons par I le plus grand élément de T . On a donc $x \vee y \leqslant I$, et, si z est un élément de T tel que $(x \vee y) \wedge z = 0$, on a en appliquant la modularité,

$$\begin{aligned} y \vee [x \wedge (y \vee z)] &= (y \vee x) \wedge (y \vee z) \\ &= (x \vee y) \wedge (z \vee y) \\ &= [(x \vee y) \wedge z] \vee y \\ &= 0 \vee y \\ &= y \end{aligned}$$

d'où $x \wedge (y \vee z) \leqslant y$ et, puisque $x \wedge (y \vee z) \leqslant x$, $0 \leqslant x \wedge (y \vee z) \leqslant x \wedge y = 0$; ainsi, $x \wedge (y \vee z) = 0$ et, y étant un complément de x , on a, puisque $y \vee z \geqslant y$, $y \vee z = y$, d'où $z \leqslant y < x \vee y$ et $0 = (x \vee y) \wedge z = z$].

Il résulte de la définition de l'essentialité que tout complément y d'un élément x de T est fermé dans T [car si $y \lhd z$, on a, puisque $x \wedge y = 0$,

$x \wedge z = 0$, d'où, puisque $z \geqslant y$, et puisque y est un complément de x , $z = y$; la réciproque est d'ailleurs vraie, tout élément x de T fermé dans T étant un complément de l'un quelconque de ses compléments. En effet, si x' est un complément de l'élément x de T dans T , il existe, puisque $x \wedge x' = 0$, un majorant x'' de x maximal tel que $x'' \wedge x' = 0$, c'est-à-dire un complément de x' majorant x ; or $x \vee x' \lhd I$, et $(x \vee x') \wedge x'' \lhd I \wedge x'' = x''$; mais, par modularité $(x \vee x') \wedge x'' = x \vee (x' \wedge x'') = x \vee 0 = x$ et $x \lhd x''$. En particulier, si x est fermé dans T , $x = x''$ est un complément de x' dans T].

En particulier, tout complément est invariant par ω , ce qui nous permet d'affirmer que si y est un complément d'un élément x de $I(\omega)$, on a $x \cup y = I$ [en effet, x , y et I appartiennent à $I(\omega)$, et on a $x \vee y \lhd I$, d'où $\omega(x \vee y) = I$ soit $x \cup y = I$].

Remarquons enfin que deux éléments dont l'un est essentiel dans l'autre ont les mêmes compléments (plus généralement les conditions suivantes sont équivalentes pour deux éléments x et y de T :

1° x et y ont les mêmes compléments.

2° $(\forall z \in T)$ $(x \wedge z = 0 \iff y \wedge z = 0)$.

3° $x \wedge y \lhd x$ et $x \wedge y \lhd y$.

1° $\Longrightarrow$ 2° : Si $x \wedge z = 0$, soit z' un complément de x majorant z . C'est aussi un complément de y , d'où $y \wedge z' = 0$, et, puisque $0 \leqslant y \wedge z \leqslant y \wedge z' = 0$, $y \wedge z = 0$.

2° $\Longrightarrow$ 3° : On a $x \wedge y \leqslant y$, et, si $(x \wedge y) \wedge t = 0$, $x \wedge (y \wedge t) = 0$, d'où $y \wedge (y \wedge t) = 0$, soit $y \wedge t = 0$, et $x \wedge y \lhd y$: de même $y \wedge x \lhd x$, soit $x \wedge y \lhd x$.

3° $\Longrightarrow$ 1° : x et y ayant les mêmes compléments que $x \wedge y$, dont ils sont extension essentielle, ont les mêmes compléments].

Nous pouvons maintenant démontrer que 5° $\Longrightarrow$ 1° : Si $t \in T$, soient z une extension essentielle maximale de t , $x = \omega(t)$ et y un complément de x dans T . x , y et z appartiennent à $I(\omega)$ et on a $x \leqslant z$, d'où

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z = I \cap z = I \wedge z = z \; ;$$

mais le complément y de x est aussi un complément de z , d'où $y \cap z = y \wedge z = 0$ et $x \cup (y \cap z) = x \cup 0 = x$. Ainsi $z = x = \omega(t)$ est l'unique extension essentielle maximale de t , donc la plus grande extension essentielle de t .

Si le treillis de Johnson T possède l'une des cinq propriétés équivalentes précédentes, on a

$$(\forall\ x\ ,\ y \in T) \qquad \omega(x \wedge y) = \omega(x) \wedge \omega(y) \quad .$$

En effet, puisque $x \lhd \omega(x)$, et $y \lhd \omega(y)$, on a

$$x \wedge y \lhd \omega(x) \wedge \omega(y) \qquad \text{donc} \qquad \omega(x) \wedge \omega(y) \lhd \omega(x \wedge y)$$

puisque $\omega(x \wedge y)$ est la plus grande extension essentielle de $x \wedge y$; mais l'élément $\omega(x) \wedge \omega(y)$ de $I(\omega)$ est fermé dans T , d'où le résultat invoqué.

Notons qu'un treillis T complet, intercontinu et distributif vérifie les cinq propriétés équivalentes précédentes. En effet, la distributivité entraîne la modularité, et la compatibilité de l'essentialité avec l'union [si $x \lhd y$, on a $x \vee z \lhd y \vee z$: en effet, $x \leqslant y \implies x \vee z \leqslant y \vee z$, et, si $(x \vee z) \wedge t = 0$, $(x \wedge t) \vee (z \wedge t) = 0$, d'où $x \wedge t = 0$ (et $y \wedge t = 0$) et $z \wedge t = 0$. Ainsi

$$(y \vee z) \wedge t = (y \wedge t) \vee (z \wedge t) = 0 \quad].$$

De plus, dans ce cas, $I(\omega)$ est distributif [car si $x\ ,\ y\ ,\ z \in I(\omega)$,

$$\begin{aligned}(x \cap z) \cup (y \cap z) = (x \wedge z) \cup (y \wedge z) &= \omega[(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] \\ &= \omega[(x \vee y) \wedge z] \\ &= \omega(x \vee y) \wedge \omega(z) \\ &= \omega(x \vee y) \wedge z \\ &= (x \cup y) \cap z \ ].\end{aligned}$$

Nous allons maintenant passer aux applications aux modules. Tous les modules considérés dans ce qui suit seront des modules à gauche unitaires sur l'anneau unitaire A ; nous désignerons par $\hat{M}$ une enveloppe injective du module M , par $T(M)$ [resp. par $T_{\lhd}(M)$] le treillis des sous-modules de M [resp. l'ensemble des sous-modules de M ordonné par essentialité] et, enfin, par ω_M la plus grande fermeture de $T_{\lhd}(M)$. Le résultat fondamental est la suivant :

THÉORÈME 5. - <u>ω_M est une fermeture dans</u> $T(M)$, <u>et elle est induite par</u> $\omega_{\hat{M}}$ <u>dans</u> M [<u>en ce sens que</u> $(\forall\ N \leqslant M)$ $(\omega_M(N) = \omega_{\hat{M}}(N) \cap M)$].

Remarquons d'abord que si Q est un module injectif, ω_Q est croissante dans $T(Q)$; en effet, si $N \leqslant N' \leqslant Q$, soit Q'_0 une extension essentielle maximale de N' dans Q : Q'_0 étant fermé dans l'injectif Q , est injectif, et contient une extension essentielle maximale Q_0 de N ; Q_0 étant fermé dans l'injectif Q'_0 est injectif donc est une extension essentielle maximale de N dans Q , contenue dans Q'_0 , d'où le résultat.

Notons que ω_Q fait correspondre à un sous-module N de Q l'intersection des enveloppes injectives de N contenues dans Q. Il résulte alors d'un théorème de Renault suivant lequel les sous-modules d'un module M fermés dans M sont précisément les intersections avec M des sous-modules injectifs de $\hat{M}$ que $(\forall\ N \leqslant M)$ $(\omega_M(N) = \omega_{\hat{M}}(N) \cap M)$ [en effet, les extensions essentielles maximales dans M d'un sous-module N de M sont précisément les intersections avec M des enveloppes injectives de N dans $\hat{M}$].

La croissance de ω_M résulte alors de celle de $\omega_{\hat{M}}$, et le théorème est démontré.

Si tout sous-module N d'un module M possède une plus grande extension essentielle dans M, celle-ci n'est autre que $\omega_M(N)$; ω_M étant une fermeture dans $T(M)$; les assertions suivantes sont équivalentes pour un module M.

1° Tout sous-module N de M possède une plus grande extension essentielle dans M.

2° L'essentialité est compatible avec la somme dans $T(M)$.

3° L'intersection de deux sous-modules de M fermés dans M est fermée dans M.

4° Toute intersection de sous-modules de M fermés dans M est fermée dans M.

L'ensemble ordonné par inclusion des sous-modules de M fermés dans M est alors un treillis complet, modulaire et complémenté.

C'est le cas, en particulier, si le sous-module singulier

$$M^{\lhd} = \{x \in M \mid An(x) \lhd A\}$$

du module M est nul, car l'essentialité est alors compatible avec l'union dans $T(M)$ [en effet, si N, N', $P \leqslant M$ et si $N \lhd N'$, soit

$$n' + p \in (N' + P)^* = (N' + P) - \{0\} .$$

On a

$$I = \{\lambda \in A \mid \lambda n' \in N\} \subseteq J = \{\lambda \in A \mid \lambda(n' + p) \in N + P\}$$

d'où, puisque $I \lhd A$ (en raison de l'essentialité de N dans N'), $J \lhd A$ (par convexité) et le fait que $J \nsubseteq An(n' + p)$ (puisque $M^{\lhd} = 0$) ; ainsi, il existe un élément λ de A tel que $\lambda(n' + p) \in (N + P)^* = (N + P) - \{0\}$ et $N + P \lhd N' + P$].
On a dans ce cas

$$\omega(N) = \{x \in M \mid \{\lambda \in A \mid \lambda x \in N\} \lhd A\}$$

soit

$$\omega(N) = \{x \in M \mid (\forall\ I \leqslant A)[I \neq 0 \implies (\exists\ \lambda \in I^* = I - \{0\})(\lambda x \in N)]\} .$$

JOHNSON avait démontré ce théorème dans le cas où l'anneau A était tel que $A^{\lhd} = 0$.

Il y a bien entendu des cas où notre théorème s'applique à un module M , sans que l'on ait $M^{\lhd} = 0$ [par exemple si M est un module uniforme tel que $M^{\lhd} \neq 0$, tel l'anneau $A = \underset{\sim}{Z}/\underset{\sim}{Z}p^2$ en tant que A-module, p étant un entier premier].

Remarquons maintenant que pour que l'essentialité soit compatible avec la somme dans $T(M)$, il faut et il suffit que M possède la propriété suivante :

<u>Si</u> N , $N' \leqslant M$ <u>et si</u> P <u>est un sous-module de</u> N' <u>maximal tel que</u> $N \cap P = 0$, <u>alors</u> $N \oplus P \lhd N + N'$.

La condition est nécessaire, car, dans les conditions indiquées, P est un complément de $N \cap N'$ dans N' et $(N \cap N') + P \lhd N'$, d'où $N + (N \cap N') + P \lhd N + N'$ soit $N \oplus P \lhd N + N'$.

La condition est suffisante : si elle est vérifiée, soient N , N' , $P \leqslant M$ tels que $N \lhd N'$. Montrons que $N + P \lhd N' + P$. Soit R un sous-module de P maximal tel que $N \cap R = 0$. Par hypothèse, $N \oplus R \lhd N + P$, puisque $N \lhd N'$, on a $N' \cap R = 0$, et R est un sous-module de P maximal tel que $N' \cap R = 0$. Par hypothèse, $N' \oplus R \lhd N' + P$.

Or, l'essentialité étant compatible avec la somme directe, on a $N \oplus R \lhd N' \oplus R$, d'où $N \oplus R \lhd N' + P$ et, puisque $N \oplus R \leqslant N + P \leqslant N' + P$, par convexité, $N + P \lhd N' + P$, et le résultat est démontré.

En particulier, il résulte de ce critère que si l'essentialité est compatible avec la somme dans le treillis des sous-modules d'un module de Renault M , alors la somme de deux sous-modules de M fermés dans M est fermée dans M [on appelle en effet module de Renault un module M dans lequel tout sous-module fermé est un supplémentaire de l'un quelconque de ses compléments, ou, ce qui revient au même, tel que la somme directe de deux sous-modules de M fermés dans M soit fermée dans M ; une condition nécessaire et suffisante pour qu'un module soit de Renault étant qu'il soit stable par tous les endomorphismes idempotents de son enveloppe injective, tout module quasi-injectif est un module de Renault, ce que l'on peut d'ailleurs prouver directement : si N est un sous-module du module quasi-injectif M fermé dans M , et si N' est un complément de N dans M , l'application canonique de $N \oplus N'$ sur N se prolonge en un endomorphisme f de M ; on a $\mathrm{Ker}(f) = N'$, $\mathrm{Im}(f) = N$, donc f est idempotent, et

$$M = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = N \oplus N' \ ].$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] JOHNSON (R. E.). - Structure theory of faithful rings, I and II, Trans. Amer. math. Soc., t. 84, 1957, p. 508-544.

[2] JOHNSON (R. E.) and WONG (E. T.). - Quasi-injective modules and irreducible rings, J. London math. Soc., t. 36, 1961, p. 260-268.

[3] RAVEL (Jacques). - Injectivité ; Généralisations et applications extensions essentielles dans un treillis de Johnson, Publications du Département de Mathématiques, t. 4, 1967, fasc. 2, p. 1-73 (Thèse 3e cycle, Lyon, 1966).

[4] RENAULT (Guy). - Etude des sous-modules compléments dans un A-module, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 16e année, 1962/63, n° 16, 12 p.