

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

GÉRARD LALLEMENT

Représentations irréductibles et algèbres de demi-groupes finis

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, n° 2 (1967-1968), exp. n° 16,
p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A7_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS IRREDUCTIBLES ET ALGÈBRES DE DEMI-GROUPES FINIS

par Gérard LALLEMENT

Rappelons qu'un facteur principal d'un demi-groupe est le quotient de Rees $J(a)/I(a)$ d'un idéal principal $J(a)$ par l'idéal $I(a)$ formé des éléments de $J(a)$ non générateurs de $J(a)$. Ces facteurs principaux sont soit 0-simples (ou simples), soit de carré nul. MUNN [8] a montré que pour un demi-groupe D fini (et même, plus généralement, vérifiant la condition minimale sur les idéaux principaux) il y a une correspondance bijective entre les représentations linéaires irréductibles de D et les représentations irréductibles Γ telles que $\Gamma^{-1}(0) = 0$ de ses facteurs principaux 0-simples. Par ailleurs, CLIFFORD [2], [3] a décrit toutes les représentations, et en particulier celles qui sont irréductibles, d'un demi-groupe complètement 0-simple en termes d'"extensions" des représentations de ces sous-groupes maximaux. Théoriquement, le problème des représentations irréductibles d'un demi-groupe fini est donc résolu. Pratiquement, un certain nombre de difficultés se présentent. Pour les montrer, indiquons brièvement le processus d'obtention des représentations irréductibles d'un demi-groupe fini 0-simple $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ selon CLIFFORD :

(a) On part d'une représentation irréductible γ de G qu'on étend à G^0 en posant $\gamma(0) = 0$.

(b) On forme une matrice Ω de format $\Lambda' \times I'$ composée de blocs de matrices

$$\Omega = [\gamma(p_{\lambda i}) - \gamma(p_{\lambda 1} p_{1i})] \quad \text{où } i \in I_1 = I \setminus 1 \text{ et } \lambda \in \Lambda_1 = \Lambda \setminus 1.$$

(Le bloc indiqué entre les crochets est celui en position λ, i ; on a supposé que I et Λ ont un indice 1 en commun et que $p_{11} = e$ identité de G .)

(c) On détermine le rang h de la matrice Ω (on supposera $h \neq 0$).

(d) On factorise Ω sous la forme $\Omega = QR$ où $Q = \begin{pmatrix} \vdots \\ Q_\lambda \\ \vdots \end{pmatrix}$ est une matrice $\Lambda' \times h$ et $R = (\dots R_i \dots)$ une matrice $h \times I'$ (la factorisation est dite de largeur h). Alors :

$$\Gamma[(a; i, \lambda)] = \begin{pmatrix} \gamma(p_{1i} a p_{\lambda 1}) & \gamma(p_{1i} a) Q_\lambda \\ R_i \gamma(a p_{\lambda 1}) & R_i \gamma(a) Q_\lambda \end{pmatrix}$$

définit une représentation irréductible de S , et elles s'obtiennent toutes de cette façon. Pratiquement, c'est assez long, et la factorisation de Ω peut parfois

poser des problèmes difficiles.

Dans une première partie de l'exposé, on donne un procédé plus rapide d'obtention des représentations irréductibles pour les demi-groupes finis. Une seconde partie est consacrée à une étude de l'algèbre sur un corps (quelconque) d'un demi-groupe fini 0-simple : détermination du radical et étude des algèbres quotients. Les démonstrations complètes des résultats exposés paraîtront ultérieurement dans [6].

Les notations et la terminologie utilisées sont celles de [4] (chapitre 5). Signalons toutefois que si P est une matrice à éléments dans un groupe avec zéro G^0 et si γ est une représentation de G^0 , $\gamma(P)$ indique la matrice obtenue par remplacement des éléments de P par leur image par γ .

1. Représentations irréductibles d'un demi-groupe fini.

Soient D un demi-groupe fini et J une \mathcal{J} -classe de Green de D ($\mathcal{J} = \emptyset$). On note M_J la représentation de Schützenberger de D définie par J ([4], 3.5).

DÉFINITION 1.1. - Soient J une \mathcal{J} -classe régulière de D fini et G le sous-groupe maximal de J . Pour une représentation γ de G^0 par des matrices sur un corps Φ on définit $\Gamma(x)$ pour tout $x \in D$ par

$$\Gamma(x) = \gamma[M_J(x)] .$$

Alors, Γ est une représentation de D par des matrices sur Φ appelée représentation standard définie par J et γ .

On démontre qu'en fait la représentation standard Γ définie par J et γ est la représentation induite par la représentation γ de G , c'est-à-dire

$$M_\Gamma = \Phi_0[S] \otimes_{\Phi[G]} M_\gamma ,$$

où M_Γ (resp. M_γ) est le $\Phi_0[S]$ -module (resp. $\Phi[G]$ -module) associé à la représentation Γ (resp. γ) ; $\Phi_0[S]$ et $\Phi[G]$ désignent respectivement l'algèbre contractée de D et de G sur Φ .

Pour les raisons exposées dans l'introduction, on s'intéresse d'abord au cas où D est un demi-groupe fini 0-simple. On prendra $D = \mathcal{M}^0(G ; I, \Lambda ; P)$ où G est un groupe fini, $\text{card } I = m$, $\text{card } \Lambda = n$. Dans ce cas la représentation de Schützenberger définie par $J = D \setminus 0$ s'écrit

$$M_J[(a ; i, \lambda)] = P(a ; i, \lambda)$$

où $P(a ; i, \lambda)$ est le produit de la matrice P par la matrice $(a ; i, \lambda)$ de

format $I \times \Lambda$ dont le seul élément non nul est a en position (i, λ) . La représentation standard définie par $D \setminus 0$ et γ est

$$\Gamma(a ; i, \lambda) = \gamma[P(a ; i, \lambda)] .$$

La proposition suivante précise la nature de cette représentation standard dans le cadre de la théorie de CLIFFORD.

PROPOSITION 1.2. - La représentation standard de $D = \mathfrak{M}^0(G ; I, \Lambda, P)$ définie par une représentation propre de G de degré r correspond à la factorisation $\Omega = I_{r(n-1)} \Omega$ où $I_{r(n-1)}$ est la matrice unité d'ordre $r(n-1)$.

Pour le démontrer, on effectue un changement de base de l'espace vectoriel V sur lequel agissent les $\Gamma(a ; i, \lambda)$, défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma(p_{21}) & I_r & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\gamma(p_{n1}) & 0 & 0 & \dots & 0 & I_r \end{pmatrix}$$

La représentation Γ devient Γ' telle que

$$\Gamma'(e ; i, 1) = \begin{pmatrix} \gamma(p_{1i}) & 0 \\ R_i & 0 \end{pmatrix}$$

et le calcul donne

$$R_i = \begin{pmatrix} \gamma(p_{2i}) - \gamma(p_{21} p_{1i}) \\ \vdots \\ \gamma(p_{ni}) - \gamma(p_{ni} p_{ii}) \end{pmatrix}$$

d'où $R = [R_2, \dots, R_i, \dots, R_m] = \Omega$.

Le résultat suivant est essentiel pour la suite :

THÉOREME 1.3. - Soient $D = \mathfrak{M}^0(G ; I, \Lambda ; P)$ un demi-groupe fini 0-simple, γ une représentation irréductible de G et Γ la représentation standard définie par γ . Alors Γ a un seul constituant irréductible non nul. Ce constituant Γ^* définit une représentation irréductible de D et toutes les représentations irréductibles de D s'obtiennent ainsi.

La démonstration se fait ainsi :

(a) On montre qu'il existe un changement de base de V défini par une matrice A telle que pour tout $(a ; i, \lambda) \in D$

$$A\Gamma(a ; i , \lambda)A^{-1} = \begin{pmatrix} \Gamma^*(a ; i , \lambda) & \Delta_{12}(a ; i , \lambda) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\Gamma^*(a ; i , \lambda)$ est une matrice $t \times t$ avec $t = \text{rang de } \gamma(P)$. Il suffit pour cela de prendre pour A une matrice adaptée à l'espace nul de $\gamma(P)$; on a alors $A\Gamma(a ; i , \lambda)A^{-1} = A\gamma(P)\gamma[(a ; i , \lambda)]A^{-1}$ et la matrice $A\gamma(P)$ a des 0 dans les $nr - t$ dernière lignes ($r = \text{degré de } \gamma$).

(b) On établit que

$$\text{degré } \Gamma^* = \text{rang } \gamma(P) = \text{rang } \Omega + r$$

(Ω a été définie dans l'introduction).

(c) On applique le résultat de CLIFFORD ([4], théorème 5.51) indiquant qu'il y a une, et une seule, extension de γ à D de degré $\text{rang } \Omega + r$, que cette extension est une représentation irréductible de D et qu'on les obtient toutes ainsi.

Ce théorème étant établi, on l'applique ainsi que les résultats de MUNN ([4], théorème 5.33) pour obtenir le théorème suivant :

THEOREME 1.4. - Soient D un demi-groupe fini, Γ la représentation standard de D définie par J et une représentation irréductible γ du sous-groupe maximal de J . Alors Γ a un seul constituant irréductible non nul Γ^* tel que $[\Gamma^*(S)]$ coïncide avec $[\Gamma^*(J)]$. (Pour $T \subseteq S$, $[\Gamma^*(T)]$ indique le sous-espace de l'algèbre des matrices engendré par $\Gamma^*(T)$.) Réciproquement, toute représentation irréductible de D est équivalente au constituant Γ^* d'une représentation standard Γ définie comme précédemment.

La démonstration de ce résultat est assez longue et nous renvoyons le lecteur à [6]. Indiquons seulement qu'elle met en évidence une formule simple donnant Γ^* en fonction de γ :

Pour tout $x \in D$

$$(1) \quad \Gamma^*(x) = I_{t, nr} A\gamma[M_J(x)]A^{-1} I_{nr, t} .$$

Dans cette formule :

- A est une matrice de changement de base adaptée à l'espace nul de $\gamma(P)$, P étant la matrice médiane du facteur principal de J (ce facteur principal est isomorphe à $\mathbb{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$;

- t est le rang de $\gamma(P)$, r le degré de γ , $n = \text{card } \Lambda = \text{card de } \alpha\text{-classe de } J$;

- $I_{p, q}$ est la matrice de format $p \times q$ dont les éléments en position (i, j) sont nuls si $i \neq j$ et égaux à 1 si $i = j$.

2. Algèbre d'un demi-groupe fini 0-simple sur un corps.

Soit $D = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ un demi-groupe 0-simple fini et soit ϕ un corps. On désigne par $\phi_0[D]$ l'algèbre contractée de D sur ϕ (c'est une algèbre de base $D \setminus 0$ et on identifie le 0 de D au 0 du corps). Rappelons que $\phi_0[D]$ est isomorphe à l'algèbre de Munn [4],

$$\mathfrak{B} = \mathcal{M}(\phi[G]; I, \Lambda; P) .$$

\mathfrak{B} est l'algèbre sur ϕ des matrices $m \times n$ à éléments pris dans $\phi[G]$, avec un produit \otimes défini par

$$X \otimes Y = \mathbf{X}PY \dots$$

De préférence à $\phi_0[D]$, c'est sur cette algèbre \mathfrak{B} qu'on travaille.

THEOREME 2.1. - $\text{rad } \mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{B} \mid PXP \in (\text{rad } \phi[G])_{n \times m}\} .$

(Ici, comme dans la suite, $(\mathfrak{U})_{n \times m}$ désigne l'ensemble des matrices de format $n \times m$ à coefficients pris dans \mathfrak{U} .)

Pour établir ce résultat, on utilise la formule (1) pour montrer que $X \in \text{rad } \mathfrak{B}$, si, et seulement si,

$$(2) \quad I_{t, nr} A \gamma(P) \gamma(X) A^{-1} I_{nr, t} = 0$$

pour toute représentation irréductible γ de G . On montre ensuite que (2) est équivalent à

$$(3) \quad \gamma(PXP) = 0$$

pour toute représentation irréductible γ de G , d'où le théorème.

On en déduit immédiatement :

COROLLAIRE 2.2 (MUNN [7]). -

$$\text{rad } \mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{B} \mid M \otimes X \otimes N \in (\text{rad } \phi[G])_{m \times n} \text{ pour tout } M, N \in \mathfrak{B}\} .$$

En particulier, si $\text{car } \phi = 0$, en revenant à $\mathfrak{U} = \phi_0[D]$ et en posant $\mathfrak{N} = \text{rad } \phi_0[D]$, on a

$$\mathfrak{U}\mathfrak{N}\mathfrak{U} = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{U}x\mathfrak{U} = 0 \implies x \in \mathfrak{N} \quad (\text{cf. [7], [10]}) .$$

- Si D est simple à gauche (c'est-à-dire $P = (e \ e \ \dots \ e)$)

$$\text{rad } \mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{B} \mid PX \in \text{rad } \phi[G]\} .$$

En caractéristique 0 cela signifie que le radical de $\phi_0[D]$ est l'annihilateur à gauche de $\phi_0[D]$.

- Si D est un groupe rectangulaire (c'est-à-dire $P = (p_{\lambda i})$ avec $p_{\lambda i} = e$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $i \in I$) et si $\text{car } \mathfrak{F} = 0$, on a

$$\text{rad } \mathfrak{F}_0[D] = \{x \in \mathfrak{F}_0[D] \mid x = \sum_{\substack{a \in G \\ i \in I \\ \lambda \in \Lambda}} \alpha(a; i, \lambda) (a; i, \lambda) \text{ avec}$$

$$\sum_{\substack{i \in I \\ \lambda \in \Lambda}} \alpha(a; i, \lambda) = 0 \quad \text{pour tout } a \in G \} .$$

(Ces deux résultats sont dus à M. TEISSIER [9].)

La question qui se pose maintenant est la suivante : Quels liens y-a-t'il entre les algèbres semi-simples $\mathfrak{F}_0[D]/\text{rad } \mathfrak{F}_0[D]$ et $\mathfrak{F}[G]/\text{rad } \mathfrak{F}[G]$?

Du théorème 2.1, on déduit sans difficulté le résultat de MUNN-PONIZOVSKY ([4], théorème 5.19).

THÉORÈME 2.3. - $\mathfrak{F}_0[D]$ est semi-simple si, et seulement si, $\text{card } \mathfrak{F}$ ne divise pas l'ordre de G et si P est non singulière (c'est-à-dire est une unité) sur $\mathfrak{F}[G]$.

Notons que dans ce cas, conformément à la formule (1), les représentations irréductibles sont exactement les représentations standard, et $\mathfrak{F}_0[D] \cong (\mathfrak{F}[G])_{n \times n}$.

Les théorèmes qui suivent ont pour but de répondre à la question suivante : Dans quels cas a-t-on

$$(4) \quad \mathfrak{F}_0[D]/\text{rad } \mathfrak{F}_0[D] \cong (\mathfrak{F}[G]/\text{rad } \mathfrak{F}[G])_{t \times t} \quad ?$$

THÉORÈME 2.4. - $\mathfrak{F}_0[D]/\text{rad } \mathfrak{F}_0[D] \cong \mathfrak{F}[G]/\text{rad } \mathfrak{F}[G]$ si, et seulement si, tous les éléments $p_{\lambda i}$ de la matrice P de D sont tels que $p_{\lambda i} - e \in \text{rad } \mathfrak{F}[G]$.

Si \mathfrak{F} est de caractéristique 0 cela signifie que D est un groupe rectangulaire. Nous donnons ici une idée sommaire de la démonstration en supposant $\text{car } \mathfrak{F} = 0$. Supposons que l'isomorphisme de l'énoncé ait lieu. $X = (x_{k\nu}) \in \text{rad } \mathfrak{B}$ si, et seulement si, $PXP = 0$, ce qui est équivalent à

$$(5) \quad \sum_{k, \nu} p_{\lambda k} x_{k\nu} p_{\nu i} = 0 \quad \text{pour tout } \lambda \in \Lambda \text{ et } i \in I .$$

En écrivant chacune des équations (5) à l'aide des inconnues $\eta_{k\nu}^i$ où $x_{k\nu} = \sum_1^k \eta_{k\nu}^i g_i$ ($g_i \in G$ et $0(G) = h$), chacune des équations (5) fournit $0(G)$ équations linéairement indépendantes en les $\eta_{k\nu}^i$. D'après l'hypothèse, $0(G) = \text{codim rad } \mathfrak{F}_0[D]$. Donc l'une quelconque des équations (5) (par exemple, celle relative à $\lambda = 1$, $i = 1$) suffit pour déterminer $\text{rad } \mathfrak{F}_0[D]$. On montre alors que si $p_{\mu t} \neq e$ pour

un couple μ, t , l'équation (5) écrite avec $\lambda = \mu$ et i quelconque ne peut pas être équivalente à l'équation (5) écrite avec $\lambda = 1$ et $i = 1$, ce qui est une contradiction, donc $p_{\mu t} = e$. La réciproque résultera de la situation plus générale évoquée au théorème 2.8.

Pour étudier l'isomorphisme (4) dans le cas $t > 1$, on introduit les deux définitions suivantes :

DEFINITION 2.5. - Soit P une matrice $n \times m$ sur une algèbre \mathcal{Q} avec unité e sur un corps ϕ . Le rang d'invertibilité ou i -rang de P est le plus grand entier t tel que P ait une sous-matrice inversible $t \times t$.

(Le i -rang de P est inférieur ou égal au rang de P tel qu'on le définit habituellement [1].)

DEFINITION 2.6. - Soit P une matrice $n \times m$ sur \mathcal{Q} de i -rang $t > 0$ et soit M une sous-matrice inversible $t \times t$ de P . Supposons que $P = \begin{pmatrix} M & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$ et posons $Q = \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de format $m \times n$. On dira que P est une ϕ -matrice si, et seulement si, $PQP - P \in (\text{rad } \mathcal{Q})_{n \times m}$.

Toutes les matrices à éléments dans un corps ϕ sont des ϕ -matrices ; ce n'est pas le cas, en général, lorsque les éléments sont pris par exemple dans une algèbre de groupe. On démontre que :

LEMME 2.7. - P est une ϕ -matrice si, et seulement si, pour chaque représentation irréductible γ de \mathcal{Q} , de degré r sur ϕ , la matrice $\gamma(P)$ a pour rang rt , où t est le i -rang de P .

THEOREME 2.8. - Soient $D = \pi^0(G ; I, \Lambda ; P)$ un demi-groupe fini 0-simple et ϕ un corps. Soit t le i -rang de P sur $\phi[G]$.

(a) Si P est une ϕ -matrice, alors $\phi_0[D]/\text{rad } \phi_0[D]$ est isomorphe à $(\phi[G]/\text{rad } \phi[G])_{t \times t}$.

(b) Réciproquement, si l'isomorphisme a lieu et si ϕ est algébriquement clos, alors P est une ϕ -matrice.

(a) Partie directe : On démontre que l'application δ de l'algèbre de Munn \mathfrak{D} dans $(\phi[G]/\text{rad } \phi[G])_{t \times t}$ définie par

$$X\delta = I_{t,n} P X P I_{m,t} M^{-1} + (\text{rad } \phi[G])_{t \times t}$$

est un homomorphisme surjectif d'algèbres dont le noyau est précisément $\text{rad } \mathfrak{D}$.

(b) Réciproque : On utilise le lemme 2.7 ; on établit que, pour chaque représentation irréductible γ_σ de G de degré r_σ , $\gamma_\sigma(P)$ a pour rang $r_\sigma t$ où t est le i -rang de P . Si t_σ est le rang de $\gamma_\sigma(P)$, on a en général $t_\sigma > r_\sigma t$. On démontre que l'égalité a lieu en établissant que

$$(6) \quad \sum_{\sigma=1}^s t_\sigma^2 = t^2 \sum_{\sigma=1}^s r_\sigma^2 .$$

L'entier du membre de gauche de (6) est précisément la dimension sur \mathbb{F} de $(\mathbb{F}[G]/\text{rad } \mathbb{F}[G])_{t \times t}$. Pour établir (6), il suffit donc de montrer que le système d'équations linéaires sur \mathbb{F} permettant d'obtenir $\text{rad } \mathbb{F}$ est de rang $\sum_{\sigma=1}^s t_\sigma^2$. Pour cela, on fait usage notamment du théorème de Frobenius-Schur ([5], p. 183-184) qui impose \mathbb{F} algébriquement clos.

Il est probable (cf. théorèmes 2.3 et 2.4) que ce théorème 2.8 est valable sans l'hypothèse \mathbb{F} algébriquement clos.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHEVALLEY (Claude). - Fundamental concepts of algebra. - New York, Academic Press, 1956 (Pure and applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks, 7).
- [2] CLIFFORD (A. H.). - Matrix representations of completely simple semigroups, Amer. J. of Math, t. 64, 1942, p. 327-342.
- [3] CLIFFORD (A. H.). - Basic representations of completely simple semigroups, Amer. J. of Math, t. 82, 1960, p. 430-434.
- [4] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. I. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).
- [5] CURTIS (Charles W.) and REINER (Irving). - Representation theory of finite groups and associative algebras. - New York, London, Interscience Publishers, 1962 (Pure and applied Mathematics. A Series of Texts and Monographs, 11).
- [6] LALLEMENT (Gérard) and PETRICH (M.). - Irreducible matrix representations of finite semigroups, Trans. Amer. math. Soc. (à paraître).
- [7] MUNN (W. D.). - Semigroups and their algebras (Dissertation, Cambridge University, 1955).
- [8] MUNN (W. D.). - Irreducible matrix representations of semigroups, Quaterly J. of Math., Oxford Series, t. 11, 1960, p. 295-309.
- [9] TEISSIER (Marianne). - Sur l'algèbre d'un demi-groupe fini simple, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 234, 1952, p. 2413-2414.
- [10] TEISSIER (Marianne). - Sur l'algèbre d'un demi-groupe fini simple, II : Cas général, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 234, 1952, p. 2511-2513.