Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Fernand Lapscher

Fermetures sur l'ensemble des fonctions booléennes incomplètes applications

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, n° 2 (1967-1968), exp. n° 15, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A6_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, n° 15

1er avril 1968

FERMETURES SUR L'ENSEMBLE DES FONCTIONS BOOLÉENNES INCOMPLÈTES APPLICATIONS

par Fernand LAPSCHER

Sommaire. - La notion de fermeture sur un ensemble ordonné s'applique au cas du treillis L_n des fonctions booléennes de n variables, et au cas du sup-demi-treillis I_n des fonctions booléennes incomplètes de n variables. Elle intervient dans la recherche des représentations possédant une propriété donnée (monotonie, indépendance, décomposition, etc.) de fonctions booléennes incomplètes.

Première partie

Etude générale

1. Isomorphisme d'ordre. Dualité.

Pour deux ensembles ordonnés T et S, on nomme isomorphisme toute application φ de T sur S, bijective, vérifiant la propriété suivante :

(1) $f \leqslant g \iff \varphi f \leqslant \varphi g$,

pour f , $g \in T$ et φf , $\varphi g \in S$. Si l'un des deux ensembles T et S est un treillis, il en est de même pour l'autre, et l'on a les propriétés suivantes :

(2) $\varphi \sup_i f_i = \operatorname{Sup}_i \varphi f_i$,

(3) $\varphi \inf_i f_i = \operatorname{Inf}_i \varphi f_i$.

Les opérations sup et inf sont relatives à T . Les opérations Sup et Inf sont relatives à S . Les indices i appartiennent à un ensemble I pouvant être infini si l'un des treillis est complet (l'autre l'étant alors aussi). L'hypothèse de bijection et l'une des trois propriétés précédentes entraînent d'ailleurs les deux autres ([5], chap. IV, § 3, et [2], chap. I, § 3).

L'application bijective φ , entre ensembles ordonnés T et S , est un antimorphisme si :

(1') $f \leqslant g \iff \varphi f \geqslant \varphi g$.

Si l'un des ensembles T et S est un treillis, il en est de même pour l'autre, et l'on a :

(2') $\varphi \sup_i f_i = \operatorname{Inf}_i \varphi f_i$,

(3') $\varphi \inf_i f_i = \operatorname{Sup}_i \varphi f_i$.

Ici encore, l'hypothèse de bijection et l'une des trois propriétés entraînent les deux autres ([5], [2]). T et S sont dits duaux. Si T et S sont confondus, T est dit autodual.

Principe de dualité ([2], chap. I, § 3). - L'inverse d'une relation d'ordre est une relation d'ordre.

Deux propositions relatives à des ensembles ordonnés sont dites duales si l'on passe de l'une à l'autre en inversant les relations d'ordre. Le principe de dualité montre que, si l'une est vraie, il en est de même pour l'autre. D'après ce qui précède, la dualité dans un treillis permute les opérations de bornes supérieure et inférieure et les éléments nul et universel lorsqu'ils existent.

2. Fermetures sur un treillis complet.

Nous désignerons par 0 l'élément nul et par 1 l'élément universel d'un treillis, quand ils existent. Rappelons tout d'abord quelques définitions et quelques propriétés.

Fermeture. - On nomme fermeture sur un ensemble ordonné E , toute application α de E dans E .

1° Idempotente : $\alpha^2 f = \alpha f$,

2° Isotone : $f \geqslant g \implies \alpha f \geqslant \alpha g$,

3° Extensive : $\alpha f \geqslant f$,

quels que soient $f , g \in E$.

En particulier, nous envisagerons la fermeture identique e : $ef = f$, $\forall f \in E$, et s'il existe un élément universel, la fermeture unité u : $uf = 1$, $\forall f \in E$.

Famille de Moore. - Dans un treillis complet, on nomme ainsi toute partie :

1° contenant l'élément universel,

2° avec un ensemble quelconque non vide d'éléments, contenant leur borne inférieure.

Une famille de Moore est elle-même un treillis complet ([4], chap. V, § 4).

Premières propriétés.

(a) Caractérisation de αf . - αf est le plus petit invariant pour α , supérieur ou égal à f .

(b) Fermeture d'une borne supérieure. - Pour une partie $\{f_i \mid i \in I\}$ de E, supposée maintenant être un treillis, éventuellement complet si I est infini, on a

(1) $$\alpha \sup_i f_i = \alpha \sup_i \alpha f_i \geqslant \sup_i \alpha f_i \quad .$$

(c) Fermeture d'une borne inférieure. - Pour la même partie de E, on a

(2) $$\alpha \inf_i f_i \leqslant \inf_i \alpha f_i \quad .$$

(d) Fermetures et familles de Moore. - L'ensemble des invariants pour une fermeture donnée est une famille de Moore (l'inégalité (2) devient une égalité dans le cas d'un ensemble d'invariants et $\alpha 1 = 1$). Inversement, à toute famille de Moore correspond une fermeture unique dont les invariants sont les éléments de la famille de Moore. La relation entre l'ensemble F des fermetures et l'ensemble M des familles de Moore est en fait plus qu'une bijection : c'est une dualité entre treillis complets ([2], § 1, ex. 8, et [3], § 1, ex. 13 et § 2, ex. 7).

3. Fermetures inférieures.

Fermeture inférieure. - Sur un ensemble ordonné E, nous nommons fermeture inférieure, toute application $\underline{\alpha}$ de E dans E.

1° Idempotente : $\underline{\alpha}^2 f = \underline{\alpha} f$,

2° Isotone : $f \geqslant g \implies \underline{\alpha} f \geqslant \underline{\alpha} g$,

3° Réductive : $\underline{\alpha} f \leqslant f$,

quels que soient $f , g \in E$.

Par opposition, les fermetures extensives précédemment étudiées seront dites supérieures, et notées $\overline{\alpha}$. Les deux définitions sont duales.

Famille de Moore inférieure. - Dans un treillis complet, nous nommons ainsi toute partie :

1° contenant l'élément nul,

2° avec un ensemble quelconque non vide d'éléments, contenant leur borne supérieure.

Par opposition, les familles de Moore rencontrées précédemment seront dites supérieures.

Propriétés. - Elles sont duales de celles des fermetures et familles de Moore supérieures.

Identité des ensembles d'invariants de deux fermetures. - Si deux fermetures α et β, de même nature, ont des ensembles d'invariants $i(\alpha)$ et $i(\beta)$ égaux, nous savons qu'elles sont égales.

Supposons-les de natures différentes.

THÉORÈME 1. - *Si deux fermetures* $\overline{\alpha}$ *et* $\underline{\beta}$ *ont mêmes invariants, on a*

$$\overline{\alpha} \sup_{i\in I} f_i = \sup_{i\in I} \overline{\alpha} f_i \quad ,$$

$$\underline{\beta} \inf_{i\in I} f_i = \inf_{i\in I} \underline{\beta} f_i \quad .$$

Grâce au principe de dualité, il suffit d'établir la première égalité. Tous les $\overline{\alpha} f_i$ sont invariants pour $\overline{\alpha}$, donc pour $\underline{\beta}$. Leur borne supérieure est un invariant pour $\underline{\beta}$ (propriété de famille de Moore inférieure), donc pour $\overline{\alpha}$. Par suite, $\sup_i \overline{\alpha} f_i = \overline{\alpha} \sup_i \overline{\alpha} f_i$ et, d'après la relation (1) du § 2, $\sup_i \overline{\alpha} f_i = \overline{\alpha} \sup_i f_i$.

THÉORÈME 2. - *Réciproquement, si une fermeture supérieure* $\overline{\alpha}$ *est telle que* $\overline{\alpha} \sup_i f_i = \sup_i \overline{\alpha} f_i$ *et* $\overline{\alpha} 0 = 0$, *il existe une fermeture inférieure* $\underline{\beta}$ *telle que* $i(\underline{\beta}) = i(\overline{\alpha})$. *La proposition duale est également vraie.*

Il suffit de montrer que $i(\overline{\alpha})$ est une famille de Moore inférieure.

1° $0 \in i(\overline{\alpha})$.

2° Considérons un ensemble $\{f_i \mid i \in I \ , \ f_i \in i(\overline{\alpha})\}$. On a

$$\overline{\alpha} \sup_i f_i = \sup_i \overline{\alpha} f_i = \sup_i f_i \quad ,$$

ce qui montre que $\sup_i f_i \in i(\overline{\alpha})$.

Cas particulier des algèbres de Boole. - Nous notons additivement et multiplicativement les opérations de bornes supérieure et inférieure. Les équivalences suivantes sont voisines de celles établies par WRIGHT [10].

THÉORÈME 3. - *Sur une algèbre de Boole dont* $\overline{\alpha}$ *est une fermeture supérieure, et* f *et* g *sont deux éléments, les propositions suivantes sont équivalentes* :

1° $\overline{\alpha} f = f \iff \overline{\alpha}(f') = f'$ (*c'est-à-dire* $\overline{\alpha}(f') = (\overline{\alpha} f)'$) ;

2° $\overline{\alpha}$ *a pour trajectoire une sous-algèbre de Boole, complète si celle de départ l'est* ;

3° $f.\overline{\alpha} g = 0 \implies \overline{\alpha} f.\overline{\alpha} g = 0$;

4° $\overline{\alpha} 0 = 0$ *et* $\overline{\alpha}(f.\overline{\alpha} g) = \overline{\alpha} f.\overline{\alpha} g$.

$1^\circ \Longrightarrow 2^\circ$. Le produit d'invariants pour $\bar{\alpha}$ (en nombre éventuellement infini si l'algèbre de Boole est complète) est un invariant. Si de plus le complément d'un invariant est invariant, l'identité de De Morgan permet d'affirmer que la trajectoire de $\bar{\alpha}$ est une sous-algèbre de Boole (éventuellement complète). Remarquons que nous avons établi la conclusion du théorème 1 avec des hypothèses différentes.

$2^\circ \Longrightarrow 1^\circ$. Les invariants formant une sous-algèbre de Boole, le complément de tout invariant est un invariant.

$1^\circ \Longrightarrow 3^\circ$. $f.\bar{\alpha}g = 0$ équivaut à $f \leqslant (\bar{\alpha}g)'$ qui entraîne $\bar{\alpha}f \leqslant \bar{\alpha}[(\bar{\alpha}g)'] = (\bar{\alpha}g)'$, car $\bar{\alpha}g$ est invariant. Cette dernière inégalité équivaut à $\bar{\alpha}f.\bar{\alpha}g = 0$.

$3^\circ \Longrightarrow 1^\circ$.

(i) D'après l'extensivité, $\bar{\alpha}(f') \geqslant f'$.

(ii) Soit f invariant pour $\bar{\alpha}$. L'égalité $f'.f = 0$ s'écrit $f'.\bar{\alpha}f = 0$ et, d'après 3°, entraîne $\bar{\alpha}(f').\bar{\alpha}f = 0$ ou $\bar{\alpha}(f').f = 0$. D'où $\bar{\alpha}(f') \leqslant f'$.

Ceci établit l'égalité.

$3^\circ \Longrightarrow 4^\circ$.

(i) Pour $g = 1$, $\bar{\alpha}g = 1$, et 3° devient $f = 0 \Longrightarrow \bar{\alpha}f = 0$.

(ii) Ecrivons $f = f.\bar{\alpha}g + f.(\bar{\alpha}g)'$. D'après 2°, $\bar{\alpha}f = \bar{\alpha}(f.\bar{\alpha}g) + \bar{\alpha}[f.(\bar{\alpha}g)']$. Or

$$\text{(a)} \quad \bar{\alpha}(f.\bar{\alpha}g) \leqslant \bar{\alpha}g ,$$

$$\text{(b)} \quad \bar{\alpha}g.f.(\bar{\alpha}g)' = 0 \Longrightarrow \bar{\alpha}g.\bar{\alpha}[f.(\bar{\alpha}g)'] = 0 .$$

D'où

$$\bar{\alpha}f.\bar{\alpha}g = \bar{\alpha}(f.\bar{\alpha}g) .$$

$4^\circ \Longrightarrow 3^\circ$. Si $f.\bar{\alpha}g = 0$, on a $\bar{\alpha}f.\bar{\alpha}g = \bar{\alpha}0 = 0$.

Liaison entre fermetures inférieures et supérieures. - Ceci généralise la notion d'"intérieur" de RUTHERFORD ([8], § 34).

Soient α une fermeture sur un ensemble ordonné E , et φ un automorphisme ou un antimorphisme de E . On montre aisément que

$$\beta = \varphi\alpha\varphi^{-1} = \mu_{\varphi}\,\alpha \tag{3}$$

est une fermeture de même nature que α , ou non, suivant que φ est un automorphisme ou un antimorphisme. La transformation est d'ailleurs réciproque :

$$\alpha = \mu_{\varphi^{-1}}\,\beta = \varphi^{-1}\beta\varphi . \tag{4}$$

Les relations (3) et (4) équivalent à

$$i(\beta) = \varphi i(\alpha) . \tag{5}$$

L'application μ_φ est un isomorphisme entre ensembles de fermetures.

Dans le cas d'automorphismes ou d'antimorphismes involutifs (tels que $\varphi^2 f = f$), l'application μ_φ est également involutive. Ainsi, dans tout treillis complémenté, où la complémentation est un antimorphisme, nous associons, à toute fermeture supérieure $\overline{\alpha}$, la fermeture inférieure $\underline{\beta} = (\overline{\alpha})'$ telle que

$$\underline{\beta}f = \varphi\overline{\alpha}\varphi^{-1} f = [\overline{\alpha}(f')]' \quad ,$$

et inversement, à toute fermeture inférieure $\underline{\beta}$, la fermeture supérieure $\overline{\alpha} = (\underline{\beta})'$ telle que

$$\overline{\alpha}f = [\underline{\beta}(f')]' \quad ;$$

$\overline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ sont dites complémentaires.

4. Algèbre de Boole libre à n générateurs.

Une fonction booléenne peut être considérée comme un élément d'une algèbre de Boole libre finie. Nous notons L_n l'algèbre de Boole libre à n générateurs ou variables $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ et à 2^{2^n} éléments ([2], chap. X, § 8, [9], § 14).

Dans L_n considéré comme treillis distributif et complémenté, nous appelons produit, noté multiplicativement, et somme, notée additivement, les opérations de borne inférieure et de borne supérieure. Le complément est noté par l'accentuation de la quantité sur laquelle il porte. Les éléments nul et universel sont représentés par 0 et 1 . Nous appelons monôme tout produit d'un nombre quelconque de variables directes ou complémentées, chacune n'intervenant qu'une fois au plus. Au produit vide correspond le monôme 1 . Les atomes de L_n sont dits monômes canoniques; toutes les variables y figurent.

Nous nommons monôme premier d'une fonction f tout monôme inférieur à f dans L_n et maximal pour cette propriété, base première de f toute somme de monômes premiers égale à f .

Une fonction est dite monotone par rapport à une partie de ses variables s'il en existe au moins une expression en sommes et produits dans laquelle chacune de ces variables figure sous une seule forme, directe ou complémentée, ou ne figure pas.

Enfin, nous appelons variable générale l'ensemble $A = \{a_1 , \ldots , a_n\}$ de variables simples et, $\widetilde{a}_i$ désignant soit a_i , soit a_i' , nous posons

$$\widetilde{A} = \{\widetilde{a}_1 , \ldots , \widetilde{a}_n\} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{A}' = \{\widetilde{a}_1' , \ldots , \widetilde{a}_n'\} \ .$$

$\widetilde{A}$ et $\widetilde{A}'$ sont deux configurations opposées de A .

Exemple. – Considérons la fonction de 4 variables

$$f = abcd + abcd' + abc'd + abc'd' + ab'cd + ab'cd' + a'b'cd + a'b'cd' + ab'c'd' + a'b'c'd' + a'bc'd + a'bc'd' ,$$

donnée comme somme de ses monômes canoniques. Elle possède 7 monômes premiers

$$\begin{array}{ccccccc} ab & ac & ad' & b'c & b'd' & bc' & c'd' \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} ,$$

et 4 bases premières 1456 , 1467 , 2456 , 2467 , c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} f &= ab + b'c + b'd' + bc' \\ &= ab + b'c + bc' + c'd' \\ &= ac + b'c + b'd' + bc' \\ &= ac + b'c + bc' + c'd' . \end{aligned}$$

La fonction f est monotone par rapport à $\{a , d'\}$ et, plus précisément, croissante par rapport à a et décroissante par rapport à d .

5. Exemples de fermetures sur L_n .

Il est parfois commode de définir une fermeture par l'ensemble de ses invariants. Dans L_n , chacun des ensembles suivants de fonctions, sauf le premier,

1° monômes,
2° fonctions monotones suivant certaines variables,
3° fonctions indépendantes de certaines variables,
4° fonctions décomposables suivant un ensemble de fonctions,
5° fonctions antipermutables suivant certaines variables,
6° fonctions symétriques suivant certaines variables,
7° fonctions paires suivant certaines variables,

est à la fois une famille de Moore supérieure et une famille de Moore inférieure à laquelle sont associées une fermeture supérieure et une fermeture inférieure. Le premier ensemble est une famille de Moore supérieure, et l'ensemble dual des

1° bis sommes de lettres

une famille de Moore inférieure.

Le théorème 1, § 3, s'applique aux ensembles 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 7°, le théorème 3, aux ensembles 3°, 4°, 6°, 7°.

6. Fonctions booléennes incomplètes.

Définition. - Une fonction incomplète $f = (\underline{f}\ ,\ \overline{f})$ est définie par la donnée de deux fonctions comparables $\underline{f}$ et $\overline{f}$, $\underline{f} \leqslant \overline{f}$, qui sont ses bornes inférieure et supérieure.

L'ensemble des fonctions incomplètes, ayant des bornes égales, correspond bijectivement à L_n et, par opposition, les fonctions de L_n sont dites complètes. Nous nommons représentation d'une fonction incomplète, toute expression complète comprise entre les bornes.

Nous dirons qu'une fonction incomplète possède une propriété (monotonie, indépendance, décomposition, symétrie, ...), si chacune de ses bornes possède cette propriété.

Monôme premier d'une fonction incomplète. - Nous nommons ainsi tout monôme premier de $\overline{f}$ dont l'intersection avec $\underline{f}$ n'est pas vide.

Propriété caractéristique. - Un monôme μ est un monôme premier de la fonction incomplète $(\underline{f}\ ,\ \overline{f})$ si, et seulement si,

1° $\mu.\overline{f}' = 0$,

2° $\mu.\underline{f} \neq 0$,

3° μ est maximal pour la propriété 1°.

Relation de complétude sur l'ensemble des fonctions incomplètes. - Considérons le treillis L_n et le treillis dual L_n^* . L'ensemble $L_n^* \times L_n$ des couples de fonctions complètes de n variables, produit direct, est un treillis de Boole dans lequel la relation d'ordre induite, dite relation de complétude, est

$$(f_1\ ,\ f_2) \leqslant (g_1\ ,\ g_2) \iff \begin{cases} f_1 \geqslant g_1 \\ f_2 \leqslant g_2 \end{cases} ,$$

et l'on a

$$\sup_i\ (f_1^i\ ,\ f_2^i) = (\prod_i f_1^i\ ,\ \sum_i f_2^i) \quad ,$$

$$\inf_i\ (f_1^i\ ,\ f_2^i) = (\sum_i f_1^i\ ,\ \prod_i f_2^i) \quad ;$$

$(0\ ,\ 1)$ est l'élément universel, et $(1\ ,\ 0)$ l'élément nul.

Pour la même relation d'ordre, l'ensemble I_n des fonctions incomplètes de n variables, partie de $L_n^* \times L_n$, est un sup-demi-treillis d'élément universel $(0\ ,\ 1)$.

La borne inférieure n'y est pas toujours définie. Les éléments minimaux de I_n sont les fonctions complètes.

7. Fermetures sur l'ensemble des fonctions incomplètes.

Fermetures sur $L_n^* \times L_n$. – Nous nommons extensions les fermetures supérieures sur $L_n^* \times L_n$, et réductions les fermetures inférieures. Désignons par $\overline{F}(E)$ et $\underline{F}(E)$ les ensembles de fermetures supérieures et inférieures sur un ensemble ordonné E.

Propriété. – Le produit direct $\underline{F}(L_n) \times \overline{F}(L_n)$, isomorphe à $\overline{F}(L_n^*) \times \overline{F}(L_n)$, l'est aussi à une partie de $\overline{F}(L_n^* \times L_n)$. La propriété duale est valable pour $\overline{F}(L_n) \times \underline{F}(L_n)$.

Soient $(\underline{\alpha}, \overline{\beta})$ un élément du premier ensemble, et Γ l'application interne de $L_n^* \times L_n$ définie par

$$\Gamma(f , g) = (\underline{\alpha} f , \overline{\beta} g) .$$

On vérifie aisément que Γ est une extension sur $L_n^* \times L_n$, extension que nous noterons $\overline{\Gamma}$, et que l'application $(\underline{\alpha}, \overline{\beta}) \to \overline{\Gamma}$ est injective. De plus, si deux couples $(\underline{\alpha}_1 , \overline{\beta}_1)$ et $(\underline{\alpha}_2 , \overline{\beta}_2)$ sont tels que $\underline{\alpha}_1 \leqslant \underline{\alpha}_2$ et $\overline{\beta}_1 \geqslant \overline{\beta}_2$, on a $\overline{\Gamma}_1 \trianglerighteq \overline{\Gamma}_2$. Inversement, si une extension $\overline{\Gamma}$ est telle que

$$\overline{\Gamma}(f , g) = (\alpha f , \beta g) ,$$

il est immédiat que α est une fermeture inférieure et β une fermeture supérieure. De plus, si deux extensions $\overline{\Gamma}_1$ et $\overline{\Gamma}_2$ sont telles que

$$\overline{\Gamma}_1(f , g) = (\underline{\alpha}_1 f , \overline{\beta}_1 g) ,$$

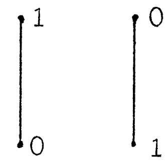
$$\overline{\Gamma}_2(f , g) = (\underline{\alpha}_2 f , \overline{\beta}_2 g) ,$$

avec $\overline{\Gamma}_1 \trianglerighteq \overline{\Gamma}_2$, on a $\underline{\alpha}_1 \leqslant \underline{\alpha}_2$ et $\overline{\beta}_1 \geqslant \overline{\beta}_2$. D'où l'isomorphisme.

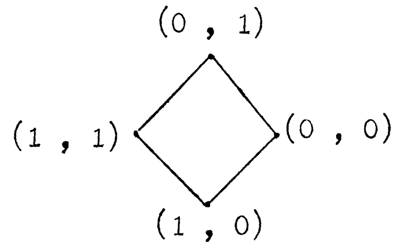
Remarquons qu'en général une extension $\overline{\Gamma}$ est de la forme

$$\overline{\Gamma}(f , g) = [\alpha(f , g) , \beta(f , g)] .$$

Dans l'exemple suivant, il en est ainsi pour l'extension ayant pour invariants $(1 , 0)$, $(1 , 1)$, $(0 , 1)$.



L_0 $\qquad$ L_0^*



$L_0^* \times L_0$

<u>Fermetures sur</u> I_n . - Les définitions et propriétés précédentes restent valables sur l'ensemble ordonné I_n . Toutefois, une réduction $\underline{\Gamma} = (\alpha , \beta)$ n'est pas nécessairement définie pour tout élément de I_n . Il faut, dans chaque cas, vérifier que $\underline{\Gamma} f \in I_n$, c'est-à-dire que

$$\alpha(f , g) \leqslant \beta(f , g) \quad .$$

Un problème important est la recherche, pour une fonction incomplète $(\underline{f} , \bar{f})$, des représentations possédant une propriété donnée. Si l'ensemble des fonctions complètes possédant cette propriété est à la fois une famille de Moore supérieure et une famille de Moore inférieure, désignons par $(\bar{\alpha} , \underline{\beta})$ le couple de fermetures associées. La conclusion du théorème 1, § 3, leur est applicable. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des représentations est alors que la fonction incomplète $\underline{\Gamma}(\underline{f} , \bar{f}) = (\bar{\alpha}\underline{f} , \underline{\beta}\bar{f})$ existe, c'est-à-dire que

$$\bar{\alpha}\underline{f} \leqslant \underline{\beta}\bar{f} \quad .$$

Dans ce cas, leur ensemble est un treillis ayant pour élément nul $\bar{\alpha}\underline{f}$, et pour élément universel $\underline{\beta}\bar{f}$. La condition précédente équivaut à

$$\bar{\alpha}\underline{f}.(\underline{\beta}\bar{f})' = 0$$

et à

$$\bar{\alpha}\underline{f}.(\underline{\beta})'(\bar{f}') = 0 \quad .$$

Si les fonctions $\bar{\alpha}\underline{f}$ et $(\underline{\beta}\bar{f})'$ sont données sous forme de sommes, le produit de tout terme de l'une par tout terme de l'autre est nul, et ces deux termes contiennent au moins deux facteurs complémentaires.

Deuxième partie

Fermetures monotones et indépendantes

8. Notations.

Nous notons $\overline{t}_{\tilde{A}}$ et $\underline{t}_{\tilde{A}}$ les fermetures supérieure et inférieure monotones en $\tilde{A}$, $\overline{i}_B$ et $\underline{i}_B$ les fermetures indépendantes de B. Elles ont respectivement mêmes invariants, et les résultats du § 7 s'appliquent.

Remarquons que

$$\begin{aligned}\overline{C}_{\tilde{A},B} &= \overline{t}_{\tilde{A}}\,\overline{i}_B \\ &= \overline{i}_B\,\overline{t}_{\tilde{A}}\end{aligned}$$

est une fermeture supérieure, et de même pour les fermetures inférieures.

9. Calcul.

Fermetures supérieures monotones. - Pour une fonction donnée en somme de produits, la fermeture supérieure est la somme des fermetures supérieures de ses monômes (théorème 1, § 3). Chaque monôme est remplacé par le monôme minimal qui le majore et qui est monotone en $\tilde{A}$. En pratique, ceci revient à remplacer par 1 les lettres de A qui figurent dans la fonction sous la forme opposée à celle qu'elles ont dans $\tilde{A}$.

Exemple :

$$\begin{aligned} f &= ab + b'c + b'd + bc' \;, \\ \overline{t}_b\, f &= ab + c + d + bc' \;, \\ \overline{t}_{ac'}\, f &= ab + b' + b'd + bc' \;. \end{aligned}$$

Fermetures supérieures indépendantes. - Le même procédé est valable à condition de remplacer par 1 toute lettre de A figurant dans f.

Exemple :

$$\begin{aligned} \overline{i}_a\, f = \overline{i}_{a'}\, f &= b + b'c + b'd + bc' \;, \\ \overline{i}_{bc}\, f &= a + 1 + d + 1 \;. \end{aligned}$$

Il existe aussi d'autres modes de calcul.

1° $\overline{i_A} = \overline{t_{\tilde{A}}}\;\overline{t_{\tilde{A}'}}$, quel que soit A ;

2° $\overline{i_A}\, f(A , B) = [\overline{t_{\tilde{A}}}\, f(A , B)]_{A=A_0}$, où A_0 est la valeur de A correspondant à la configuration $\tilde{A}$ (chaque variable de $\tilde{A}$ est remplacée, dans A_0 , par 1 ou 0 suivant qu'elle est directe ou complémentée) ;

3° $\overline{i_A}\, f(A , B) = \sum_{\tilde{A}} f(\tilde{A} , B)$, la somme portant sur les 2^n configurations de A ;

4° $\overline{i_A}\, f(A , B) = \sum_{A_0} f(A_0 , B)$, la somme portant sur les 2^n valeurs de A .

Fermetures inférieures monotones. - On peut appliquer les méthodes duales des précédentes.

Ou encore, on peut remarquer que $\underline{t_{\tilde{A}}}\, f$ est la somme des monômes premiers de f monotones en $\tilde{A}$. Dans la base première complète de f (c'est-à-dire la somme de tous les monômes premiers de f), il suffit alors de supprimer les monômes premiers non monotones en $\tilde{A}$, c'est-à-dire de remplacer par 0 les lettres de A figurant sous une forme différente de celle qu'elles ont dans $\tilde{A}$.

Exemple :

$$\underline{t_{ab}}\, f = ab + bc' + ac + ad + c'd \quad .$$

Une autre méthode de calcul est décrite dans la note de BENZAKEN [1].

Cas particuliers. - Lorsque les variables de A sont toutes directes ou toutes complémentées, les fermetures monotones sont dites croissantes ou décroissantes. D'après KUNTZMANN ([6], chapitre VI, partie II), on a, en supposant les variables de A directes,

$$\overline{t_A}\, f(A , B) = \max_{X \leq A} f(X , B) \quad ,$$

$$\overline{t_{A'}}\, f(A , B) = \max_{X \geq A} f(X , B) \quad ,$$

$$\underline{t_A}\, f(A , B) = \min_{X \geq A} f(X , B) \quad ,$$

$$\underline{t_{A'}}\, f(A , B) = \min_{X \leq A} f(X , B) \quad .$$

10. Recherche de fonctions incomplètes monotones ou indépendantes pour certaines variables, inférieures dans I_n à une fonction incomplète donnée et dépendant d'ensembles minimaux de variables (cf. [6], chap. I, § 50, et [7]).

Première méthode. – Pour la fermeture $\overline{\mathcal{C}_{\tilde{A},B}}$, la condition de possibilité du § 7 s'écrit

$$\overline{\mathcal{C}_{\tilde{A},B}}\,\underline{f}\cdot\overline{\mathcal{C}_{\tilde{A}',B}}(\overline{f}') = 0 \quad ,$$

$\underline{f}$ et $\overline{f}'$ étant données en sommes de produits, nous savons calculer les fermetures supérieures en sommes de produits, monôme à monôme, par suppression de lettres (§ 9). Toutefois, dans tout couple de monômes de $\overline{\mathcal{C}_{\tilde{A},B}}\,\underline{f}$ et de $\overline{\mathcal{C}_{\tilde{A}',B}}(\overline{f}')$, il doit rester au moins un couple de lettres complémentaires (§ 7). Nous sommes ainsi amenés à comparer chaque monôme de $\underline{f}$ à chaque monôme de $\overline{f}'$, et à noter, par exemple sous la forme qu'elles ont dans le monôme de $\underline{f}$, les variables qui assurent la nullité du produit.

Prenons l'exemple suivant :

	abc def	
	000 110	1
	010 101	2
$\underline{f}$	101 001	3
	001 110	4
	001 100	5
	111 000	1'
$\overline{f}'$	110 110	2'
	011 101	3'

.

Nous obtenons le tableau suivant :

	1	2	3	4	5
1'	a'b'c'de	a'c'df	b'f	a'b'de	a'b'd
2'	a'b'	a'e'f	b'cd'e'f	a'b'c	a'b'ce'
3'	b'c'ef'	c'	ab'd'	b'ef'	b'f'

.

Nous sommes ramenés à un calcul de duale. Après suppression de multiples, il reste à calculer le produit suivant,

$$(a' + b')(a' + e' + f)c'(b' + f)(a + b' + d')(b' + f')$$
$$= a'b'c' + b'c'e' + b'c'f + aa'c'ff' + a'c'd'ff' \quad .$$

Pour obtenir les représentations :

- croissantes en une variable x , nous posons $x' = 0$,
- décroissantes en x , nous posons $x = 0$,
- indépendantes de x , nous posons $x = x' = 0$,
- monotones en x , nous posons $xx' = 0$.

Deuxième méthode. - Si on connaît les monômes premiers de $(\underline{f} , \overline{f})$, on associe à chaque monôme canonique de $\underline{f}$ la somme des monômes premiers qui le majorent, et on fait le produit des sommes ainsi obtenues. En effet, pour majorer un monôme canonique de $\underline{f}$, les variables de l'un au moins des monômes premiers majorants sont nécessaires.

Dans l'exemple précédent, les monômes premiers sont :

$$b' , a'c' , a'e , a'f' , af , c'f , d'f , c'e' , cdf' , de'f' , ce \quad .$$

D'où le produit de sommes

$$(b' + a'c' + a'e + a'f')(a'c' + c'f + c'e')(b' + af + d'f)$$
$$(b' + a'e + a'f' + cdf' + ce)(b' + a'f' + cdf' + de'f') ,$$

qui redonne le résultat précédent.

11. Décomposition en somme d'une fonction incomplète.

Un ensemble de conditions nécessaires pour que la fonction incomplète $f(A , B)$ admette des représentations de la forme $g(A) + h(B)$ est

$$\overline{i_B}[\underline{f}(A , B).\overline{i_A}\ \overline{f}'(A , B)] \leqslant \underline{i_B}\ \overline{f}(A , B) \quad , \tag{6}$$

$$\overline{i_A}[\underline{f}(A , B).\overline{i_B}\ \overline{f}'(A , B)] \leqslant \underline{i_A}\ \overline{f}(A , B) \quad . \tag{7}$$

En effet, g étant indépendant de B , et h indépendant de A ,

$$\underline{i_B}(g + h) = g + \underline{i_B}\, h = g \leqslant \underline{i_B}\, \overline{f} \quad ,$$

et, de même,

$$h \leqslant \underline{i_A}\, \overline{f} \quad .$$

D'autre part,

$$\overline{i_B}[\underline{f}.(\underline{i_A}\,\overline{f})'] \leqslant \overline{i_B}[(g+h)(\underline{i_A}\,\overline{f})'] = \overline{i_B}[g.(\underline{i_A}\,\overline{f})']$$

$$= g.\overline{i_B}(\underline{i_A}\,\overline{f})'$$

$$= g \quad .$$

D'où la relation (6) et, d'une façon analogue, la relation (7). Pour g et h, les solutions appartiennent respectivement aux intervalles $(\overline{i_B}[\underline{f}.\overline{i_A}\,\overline{f}'] \,,\, \underline{i_B}\,\overline{f})$ et $(\overline{i_A}[\underline{f}.\overline{i_B}\,\overline{f}'] \,,\, \underline{i_A}\,\overline{f})$. En pratique, il faut vérifier que

$$g(A) + h(B) \geqslant \underline{f}(A\,,\,B) \quad ,$$

ce qui est toujours vrai si

$$k(A\,,\,B) = \overline{i_B}[\underline{f}.\overline{i_A}\,\overline{f}] + \overline{i_A}[\underline{f}.\overline{i_B}\,\overline{f}] \geqslant \underline{f}(A\,,\,B) \quad .$$

Des résultats analogues sont obtenus, par dualité, pour les décompositions en produit.

12. Résolution de l'équation $a(A)x + b(A)x' = 1$.

L'équation en x , $a(A)x + b(A)x' = 1$, a pour solution la fonction incomplète $[b'(A)\,,\,a(A)]$. Posons

$$f = ax + bx' \quad .$$

On a

$$\overline{i_x}\,f = a + b = 1 \quad ,$$

$$\overline{i_a}\,f = x + b = 1 \quad ,$$

$$\overline{i_b}\,f = x' + a = 1 \quad ,$$

d'où

$$b' \leqslant x \leqslant a \quad .$$

Inversement, si $b' \leqslant x \leqslant a$, on a $ax = x$, $bx' = x'$ et $ax + bx' = 1$.

Le procédé peut être généralisé pour les équations à plusieurs inconnues.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAKEN (C.). - Les familles de fonctions booléennes déduites de certaines familles de fonctions booléennes croissantes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 1528-1531.

[2] BIRKHOFF (G.). - Lattice theory. 3rd edition. - Providence, American mathematical Society, 1967 (American mathematical Society, Colloquium Publications, 25).

[3] BOURBAKI (N.). - Théorie des ensembles. Chap. 3 : Ensembles ordonnés. 2e édition. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1243 ; Bourbaki, 20).

[4] DUBREIL (P.), DUBREIL-JACOTIN (M.-L.). - Leçons d'algèbre moderne. 2e édition. - Paris, Dunod, 1964 (Collection universitaire de Mathématiques, 6).

[5] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.), CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[6] KUNTZMANN (J.). - Algèbre de Boole. - Paris, Dunod, 1965 (Bibliothèque de l'Ingénieur automaticien, 10).

[7] MacCLUSKEY (E. J., Jr). - Minimal sums for boolean functions having many unspecified fundamental products, Proceeding of the Second annual symposium on switching circuits theory ... [1962. Détroit].

[8] RUTHERFORD (D. E.). - Introduction to lattice theory. - Edinburgh, London, Oliver and Boyd, 1965 (University mathematical Monographs).

[9] SIKORSKI (R.). - Boolean algebras. - Berlin, Springer-Verlag, 1964 (Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 25).

[10] WRIGHT (F. B.). - Boolean averages, Canad. J. of Math., t. 15, 1963, p. 440-455.

(Texte définitif reçu le 2.1.1969)

Fernand LAPSCHER
Laboratoire de Calcul
Faculté des Sciences
34 avenue Carnot
63 - CLERMONT-FERRAND