Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean Benabou

Catégories algébriques et théorie de la descente

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, n° 2 (1967-1968), exp. n° 14, p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, n° 14

23 mars 1968

CATÉGORIES ALGÉBRIQUES ET THÉORIE DE LA DESCENTE

par Jean BENABOU

La définition de Birkhoff des structures algébriques au moyen de familles de lois de composition "finitaires" internes partout définies satisfaisant des relations universelles, ainsi que ses généralisations au cas d'opérations infinies (SLOMINSKI) ou externes (HIGGINS), n'est pas intrinsèque : La structure de groupe, par exemple, peut être définie par une opération ternaire satisfaisant les axiomes appropriés. Outre le manque d'élégance, ce "défaut d'invariance" présente les inconvénients suivants :

Impossibilité de comparer deux théories algébriques (i. e. de définir des morphismes entre théories), d'étudier la catégorie des théories algébriques, de définir de manière générale les structures algébriques sur les objets d'une catégorie, etc.

Dans cet exposé, de nature didactique, on passe brièvement en revue les différentes réponses que la théorie des catégories permet de donner à la question : Qu'est-ce qu'une espèce de structures algébrique ? Les résultats essentiels étant déjà publiés, nous nous bornerons à donner une bibliographie commentée sommairement.

Dans [5], une définition "catégorique" des structures algébriques sur un ensemble est donnée. La catégorie des théories algébriques est construite, et l'on montre que le foncteur "sémantique", qui associe à toute théorie algébrique $\underset{\sim}{T}$ la catégorie des $\underset{\sim}{T}$-algèbres, admet un adjoint.

Dans [6], la théorie précédente est étendue au cas d'opérations à un nombre infini de variables.

Dans [2], on étudie le cas d'opérations externes sur des familles d'objets d'une catégorie, et on montre que la catégorie des théories algébriques est elle-même algébrique.

Dans [3], le point de départ de l'axiomatisation des structures algébriques est le "triple" (en construction standard au sens de [4]) associé à la construction de l'algèbre libre sur un ensemble.

On montre alors l'équivalence des théories équationnelles de [6] et des triples sur la catégorie des ensembles.

Signalons pour terminer que la "théorie de la descente" peut s'interpréter dans ce contexte de la manière suivante : Une donnée de descente équivaut à une structure d'algèbre sur un triple, au sens de [3] ; et le problème de la descente consiste à reconnaître quand une telle algèbre est libre (le critère de BECK [1] donne alors une réponse, malheureusement difficile à manier dans certains cas, à cette question).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BECK (Jonathan M.). - Triples, algebras and cohomology, Dissertation Columbia University, 1967 (Thèse non publiée).

[2] BENABOU (Jean). - Structures algébriques dans les catégories, Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle, t. 10, 1968, p. 1-118.

[3] EILENBERG (Samuel) and MOORE (John C.). - Adjoint functors and triples, Illinois J. of Math., t. 9, 1965, p. 381-398.

[4] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

[5] LAWVERE (F. William). - Functorial semantics of algebraic theories, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 50, 1963, p. 869-872.

[6] LINTON (F. E. J.). - Some aspects of equational categories, Proceedings of the conference on categorical algebra [1965. La Jolla], p. 84-94. - Berlin, Springer-Verlag, 1966.