Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Ladislav Beran

Treillis sous-modulaires

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, nº 2 (1967-1968), exp. nº 13, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, n° 13
18 mars 1968

TREILLIS SOUS-MODULAIRES

par Ladislav BERAN

1. Introduction.

La notion de treillis sous-modulaire est apparue en théorie des treillis pour la première fois dans un article de TAMASCHKE [6]. La définition est inspirée de l'étude des treillis des sous-groupes sous-normaux d'un groupe G ayant des séries de composition de longueurs finies. Nous noterons ce treillis $\operatorname{sn} G$.

Nous utiliserons la notation suivante : On appelle quotient a/b, le couple de deux éléments d'un treillis tels que $a \geqslant b$. Le quotient a/b, $a \neq b$, est dit premier si a couvre b, c'est-à-dire

$$a \geqslant c > b \quad \text{implique} \quad c = a \ ;$$

dans ce cas, nous écrirons $a \succ b$. Nous désignerons l'ensemble de tous les quotients premiers d'un treillis L par K_L. Si $b = a \cap d$ et $c = a \cup d$, les deux quotients a/b, c/d vérifiant cette condition sont dits transposés. S'il existe une suite finie de quotients a_j/b_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, telle que :

1° $a/b = a_0/b_0$ et $c/d = a_m/b_m$,
2° a_j/b_j et a_{j+1}/b_{j+1} soient transposés,

les quotients a/b, c/d sont dits projectifs, et on écrit $a/b \sim c/d$. S'il existe une suite finie de quotients premiers telle que les conditions 1° et 2° soient vérifiées, les quotients premiers a/b, c/d sont dits π-projectifs, et on écrit $a/b \ \pi \ c/d$. Il est clair que la π-projectivité est une relation d'équivalence sur K_L. On désigne par $\overline{a/b}$ la classe $\operatorname{mod} \pi$ déterminée par $a/b \in K_L$, et par K_L/π l'ensemble de toutes ces classes.

1.1. Définition. - Un treillis T est dit sous-modulaire, s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

$$(\underline{S}) \quad (x \cup y \succ y \ \text{ et } \ x \geqslant p \succ q \geqslant x \cap y) \implies p/q \ \pi \ (x \cup y)/y \ ,$$
$$(\overline{S}) \quad (x \succ x \cap y \ \text{ et } \ x \cup y \geqslant p \succ q \geqslant y) \implies p/q \ \pi \ x/(x \cap y) \ .$$

Pour l'application des méthodes de la théorie des treillis à celle des groupes, le résultat suivant de TAMASCHKE [7] est important.

1.2. THÉORÈME. - Le treillis des sous-groupes sous-normaux d'un groupe possédant des suites de composition finies est sous-modulaire.

La réciproque n'est pas vraie.

Afin de faciliter l'énoncé des théorèmes, faisons la convention suivante : Nous désignerons par L (ou L avec des indices), un treillis dans lequel tout segment satisfait aux conditions de chaîne ascendante et de chaîne descendante.

La notion de treillis sous-modulaire est une généralisation immédiate de treillis modulaire et relativement complémenté, au sens du théorème suivant :

1.3. THÉORÈME. - Tout treillis modulaire (resp. relativement complémenté L) est sous-modulaire.

La réciproque de ce théorème est fausse.

1.4. Remarque. - TAMASCHKE a utilisé dans sa définition des treillis sous-modulaires le mot projectif au sens de notre π-projectif, que nous introduisons pour éviter des confusions avec la définition de projectivité au sens de BIRKHOFF.

Les treillis sous-modulaires ont été étudiés aussi par IQBALUNNISA [4]. Notons F l'ensemble de tous les "polynômes" $f(y_0 , y_1 , \ldots , y_n)$ en y_i et $\cup , \cap$.

1.5. Définition. - D'après IQBALUNNISA, un treillis T est dit sous-modulaire, si la condition suivante est vérifiée :

$\forall a , b \in T$, $a \leqslant b$, $\forall f \in F$, $\exists m \geqslant 0$ tel que le segment $K = [c , d]$, déterminé par $f(a , x_1 , \ldots , x_n)$ et $f(b , x_1 , \ldots , x_n)$, soit de la forme

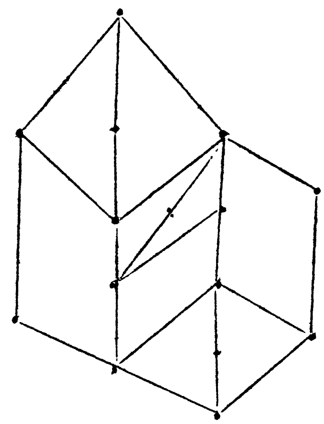
$$c = c_0 \leqslant c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_m = d \quad ,$$

et pour chacun des segments $[c_i , c_{i+1}]$, on ait

$$c_{i+1}/c_i \sim b_i^*/a_i^* , \qquad a \leqslant a_i^* \leqslant b_i^* \leqslant b \quad .$$

On peut montrer que cette définition et celle de TAMASCHKE ne sont pas équivalentes, même pour des treillis ayant un nombre fini d'éléments.

Envisageons par exemple le diagramme suivant :



Il est facile de voir que :

(1) card $K_L/\pi = 2$,

(2) tous les quotients premiers sont projectifs.

Le treillis envisagé satisfait à la définition (1.5), mais ne satisfait pas à la définition (1.1). Remarquons que, par conséquent, le théorème 4 de [4] ne prouve pas l'équivalence des définitions d'IQBALUNNISA (1.5) et de TAMASCHKE (1.1).

Désormais, nous entendons par <u>treillis sous-modulaires</u>, les treillis vérifiant la définition (1.1).

Les résultats suivants seront utilisés ([6], Satz 1, et [6], Satz 5).

1.6. THÉORÈME. - <u>Le treillis</u> L <u>est sous-modulaire si, et seulement si, pour tout ensemble</u> $B \subseteq K_L/\pi$, <u>il existe une congruence</u> $\varkappa_B$ <u>telle que</u>

$$(a > b \quad \text{et} \quad a \equiv b \mod \varkappa_B) \iff \overline{a/b} \in B \quad .$$

1.7. THÉORÈME. - <u>Un treillis sous-modulaire</u> L <u>est distributif si, et seulement si, l'ensemble</u>

$$\underset{\approx}{A} = \{p \in K_L/\pi \mid \exists\ a/b\ ,\ \exists\ c/d\ ,\ \overline{a/b} = \overline{c/d} = p \quad \text{et} \quad b \geqslant c\}$$

<u>est vide</u>.

2. Structure et constructions des treillis sous-modulaires.

En général, les sous-treillis et les images homomorphes d'un treillis sous-modulaire ne sont pas sous-modulaires, mais l'image homomorphe d'un treillis sous-modulaire L est déjà nécessairement un treillis sous-modulaire ([6]). Pour les produits sous-directs, on peut démontrer le théorème suivant :

2.1. THÉORÈME. - <u>Tout produit sous-direct</u> L <u>de treillis sous-modulaires</u> L_λ , $\lambda \in \Lambda$, <u>est un treillis sous-modulaire</u>.

Démonstration. - Soient $\varkappa_\lambda$ les congruences telles que

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \varkappa_\lambda = E \quad \text{et} \quad L/\varkappa_\lambda \cong L_\lambda \ .$$

Supposons que $u \cap v < v$ et $u \cup v \geqslant p > q \geqslant u$, et soit $\varkappa = \varkappa_{\lambda_0}$, $\lambda_0 \in \Lambda$, une des congruences ayant la propriété $p \not\equiv q \mod \varkappa$. Désignons par $\overline{L}$ le treillis $L/\varkappa = L/\varkappa_{\lambda_0}$. Comme le treillis $\overline{L}$ satisfait à la condition $(\overline{S})$ et qu'on a

$$\overline{u} \cap \overline{v} < \overline{v} \quad \text{et} \quad \overline{u} \cup \overline{v} \geqslant \overline{p} > \overline{q} \geqslant \overline{u} \ ,$$

nous obtenons

$$\overline{p}/\overline{q} \ \pi_{\overline{L}} \ \overline{v}/(\overline{u} \cap \overline{v}) \ ,$$

et il existe donc une suite

$$\overline{a}_j/\overline{b}_j \in K_{\overline{L}} \ , \qquad j = 0 \ , 1 \ , \dots , m \ ,$$

telle que :

1° $a_0 = v$, $b_0 = u \cap v$, $\overline{a}_m/\overline{b}_m = \overline{p}/\overline{q}$,
2° $\overline{a}_j/\overline{b}_j$ et $\overline{a}_{j+1}/\overline{b}_{j+1}$ soient transposés.

Démontrons d'abord la proposition suivante :

(2.1.1) Si $\overline{s} < \overline{t}$, $\overline{k} < \overline{\ell}$, $k < \ell$, et

$$\overline{s} \cup \overline{\ell} = \overline{t} \ , \qquad \overline{s} \cap \overline{\ell} = \overline{k} \ ,$$

alors il existe s^*, t^* tels que $\overline{s^*} = \overline{s}$, $\overline{t^*} = \overline{t}$, $s^* < t^*$, et

$$s^* \cup \ell = t^* \ , \qquad s^* \cap \ell = k \ .$$

Preuve de (2.1.1). - On peut supposer que $\overline{s} \| \overline{\ell}$. Posons $s_1 = s \cup k$ et $t^* = s_1 \cup \ell$. On a $s_1 \| \ell$, et pour chaque élément s^* tel que $s_1 \leqslant s^* < t^*$, on voit sans peine que $\overline{s^*} = \overline{s}_1$. Nous avons donc

$$\overline{s^*} = \overline{s}_1 = \overline{s} \cup \overline{k} = \overline{s} \ ,$$

et

$$\overline{t^*} = \overline{s}_1 \cup \overline{\ell} = \overline{s} \cup \overline{\ell} = \overline{t} \ .$$

Enfin on a

$$t^* \geqslant s^* \cup \ell \geqslant s_1 \cup \ell = t^* \ ,$$

d'où $t^* = s^* \cup \ell$. De même, $k = s^* \cap \ell$.

Ce qui démontre la proposition.

En utilisant la proposition (2.1.1) et la proposition duale, on en déduit qu'il existe $a^*_{m-1}/b^*_{m-1} \in K_L$ tel que

$$a^*_{m-1}/b^*_{m-1} \,\pi\, v/(u \cap v)$$

et

$$\overline{a^*_{m-1}}/\overline{b^*_{m-1}} = \bar{a}_{m-1}/\bar{b}_{m-1} \ .$$

Pour achever la démonstration, il suffira d'établir que :

(2.1.2) $a^*_{m-1}/b^*_{m-1} \,\pi\, p/q$.

Or, d'après (2.1.2), on aura

$$v/(u \cap v) \,\pi\, a^*_{m-1}/b^*_{m-1} \,\pi\, p/q \ ,$$

et donc $(\overline{S})$ sera valable dans L . Par dualité, la condition $(\underline{S})$ sera aussi valable.

Tout revient à montrer qu'on a :

(2.1.3) Soit

$$\bar{b} < \bar{a} , \qquad b < a \ ,$$

$$\bar{q} < \bar{p} , \qquad q < p \ ,$$

et les quotients $\bar{a}/\bar{b}$ et $\bar{p}/\bar{q}$ transposés. Alors $a/b \,\pi\, p/q$.

<u>Démonstration de</u> (2.1.3). - Il suffit visiblement de considérer le cas $\bar{p} \cap \bar{b} = \bar{q}$, $\bar{p} \cup \bar{b} = \bar{a}$, et $p \| b$. Choisissons x_1 , x_2 tels que

$$b \cup q \lessdot x_1 < a \cup q \ ,$$

$$q \cap a < x_2 \lessdot p \cap a \ .$$

Il en résulte que

$$\bar{x}_1 = \bar{b} , \qquad \bar{x}_2 = \bar{p} , \qquad \text{et} \qquad x_1 \| x_2 \ ,$$

d'où on voit que les quotients

a/b et $(a \cup q)/x_1$, p/q et $x_2/(q \cap a)$, $x_2/(q \cap a)$ et $(a \cup q)/x_1$,

sont transposés. De là, la relation $a/b \,\pi\, p/q$ découle facilement.

Ce théorème admet des conséquences assez importantes.

2.2. Définition. - Un treillis sous-modulaire est dit parfaitement sous-modulaire, si card $K_L/\pi = 1$.

Il est évident que tous les treillis parfaitement sous-modulaires sont sous-directement indécomposables.

Du théorème (2.1), on peut déduire le théorème suivant :

2.3. THÉORÈME. - La classe des treillis sous-modulaires de longueur finie, coïncide avec la classe des produits sous-directs d'un nombre fini de facteurs parfaitement sous-modulaires et de longueur finie.

De la démonstration du théorème (2.1) résulte la même conclusion pour les treillis satisfaisant à la condition de quotients premiers, c'est-à-dire à la condition

(C_1) $$u \cap v \prec u \quad \text{implique} \quad v \prec u \cup v .$$

Mais on peut démontrer ce résultat plus général :

2.4. THÉORÈME. - Si tout treillis T_λ, $\lambda \in \Lambda$, satisfait à la condition de quotients premiers, tout produit sous-direct de ces treillis satisfait à cette condition.

2.5. COROLLAIRE. - Si tout treillis L_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, est semi-modulaire et de longueur finie, il en est de même de tout produit sous-direct d'un nombre fini de facteurs L_i.

Le corollaire résulte du théorème (2.4) et de [5] (corollaire du théorème 51).

Par un treillis semi-modulaire, nous comprenons un treillis satisfaisant à la condition (cf. [3]) :

(S_1) Les relations $y \cap z < x < z < x \cup y$ impliquent l'existence de t tel que l'on ait

$$y \cap z < t \leqslant y \quad \text{et} \quad x = (x \cup t) \cap z .$$

Démonstration du théorème (2.4). - Soit T le produit sous-direct des treillis T_λ, $T_\lambda \cong T/\varkappa_\lambda$, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \varkappa_\lambda = E$. Soit $u \cap v \prec v$. Nous allons distinguer les deux cas suivants :

Cas I : La congruence $\varkappa_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, est telle que $u \cap v \not\equiv v \mod \varkappa_\lambda$. Il est clair que $u \leqslant x < u \cup v$ entraîne $\bar{u} \leqslant \bar{x} \leqslant \bar{u} \cup \bar{v}$, d'autre part le treillis $T/\varkappa_\lambda$ vérifie la condition de quotients premiers. On a donc $u \equiv x$ ou $x \equiv u \cup v$. Mais $x \equiv u \cup v$ impliquerait

$$u \cap v \leqslant v \cap x \equiv (u \cup v) \cap v = v \quad .$$

On aurait donc $v = v \cap x$ ou $u \cap v = v \cap x$, c'est-à-dire $x \geqslant u \cup v$ ou $u \cap v = v \cap x \equiv v$, contrairement au choix de x , ou contrairement à la relation $\bar{u} \cap \bar{v} < \bar{v}$. Par suite $u \equiv x \mod \varkappa_\lambda$.

<u>Cas</u> II : La congruence $\varkappa_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, est telle que $u \cap v \equiv v \mod \varkappa_\lambda$. Donc $u \equiv u \cup v$, et $u \equiv x \mod \varkappa_\lambda$.

L'examen de ces deux cas prouve que :

$$\forall \lambda \in \Lambda , \quad \forall u \leqslant x < u \cup v , \qquad x \equiv u \mod \varkappa_\lambda \quad .$$

Comme $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \varkappa_\lambda = E$, on a $x = u$. C'est ce qu'affirme le théorème.

Le théorème suivant montre la complication de structure des treillis sous-modulaires déjà dans le cas des treillis parfaitement sous-modulaires :

2.6. THÉORÈME. - <u>Tout treillis</u> T <u>peut être plongé dans un treillis</u> S <u>parfaitement sous-modulaire relativement atomique</u>.

Nous disons qu'un treillis est relativement atomique (au sens de G. SZÁSZ [5], p. 158), s'il vérifie cette condition :

(C) Tout segment $[a , b]$ est atomique.

<u>Démonstration du théorème</u> (2.6). - Prouvons d'abord l'assertion suivante :

(2.6.1) Si $\operatorname{card} M \geqslant 2$, alors le treillis $z(m)$ des partitions de l'ensemble M est tel que $\operatorname{card} K_{z(M)}/\pi = 1$.

Soient z_1 , z_2 deux partitions telles que $z_1 < z_2$. Une des classes de la partition z_2 , disons M_1'' , est la réunion $M_0' \cup M_1'$ de deux classes de la partition z_1 , et toutes les autres classes sont égales. Choisissons $m_0 \in M_0'$ et $m_1 \in M_1'$, et déterminons z_3 comme la partition où toutes les classes ont un seul élément sauf la classe (m_0 , m_1) . Nous utiliserons la notation $z_3 = (m_0 , m_1)$ en omettant les classes ayant un seul élément. Nous désignerons par i (resp. v) l'élément universel (resp. l'élément nul) dans le treillis $z(M)$. Il est clair que :

(a) $z_2/z_1 \ \pi \ z_3/v$.

Soit $v < z_4$ et $v < z_5$, $z_4 = (m , p)$, $z_5 = (m , q)$, $z_6 = (M \setminus m)$. Alors on a :

(b) $i/z_6 \ \pi \ z_4/v$ et $i/z_6 \ \pi \ z_5/v$.

Soit enfin

$$v < z_7 = (a\ ,\ b)\ ,$$

$$v < z_8 = (c\ ,\ d)\ .$$

Notons $z_9 = (a\ ,\ c) > v$. Vu l'assertion (b), il existe z_6^* (resp. z_6^{**}) tel que

$$i/z_6^* \ \pi\ z_7/v \qquad \text{et} \qquad i/z_6^* \ \pi\ z_9/v$$

(resp.

$$i/z_6^{**} \ \pi\ z_8/v \qquad \text{et} \qquad i/z_6^{**} \ \pi\ z_9/v\ ).$$

Donc :

(c) $z_7/v \ \pi\ z_8/v$.

D'après (a), (b), (c), on vérifie facilement que tous les quotients premiers dans $z(M)$ sont π-projectifs. Ce qui démontre (2.6.1).

D'après le théorème de WHITMAN, tout treillis est isomorphiquement plongeable dans le treillis des partitions d'un certain ensemble. D'où le théorème.

3. Principe de π-stabilité dans les treillis sous-modulaires.

Désignons par $\underset{\approx}{A}'$ le complément de l'ensemble $\underset{\approx}{A}$ du théorème (1.7),

$$\underset{\approx}{A}' = K_L/\pi \smallsetminus \underset{\approx}{A}\ ,$$

et considérons, en utilisant le théorème (1.6), deux congruences $\varkappa_{\underset{\approx}{A}}$ et $\varkappa_{\underset{\approx}{A}'}$ telles que

$$(a > b\ ,\quad a \equiv b \mod \varkappa_{\underset{\approx}{A}}) \iff \overline{a/b} \in \underset{\approx}{A}\ ,$$

$$(a > b\ ,\quad a \equiv b \mod \varkappa_{\underset{\approx}{A}'}) \iff \overline{a/b} \in \underset{\approx}{A}'\ .$$

Avec ces définitions, nous sommes capables d'introduire le "reflet" d'un treillis sous-modulaire, la notion fondamentale pour la caractérisation de distributivité, de modularité, et d'autres propriétés des treillis sous-modulaires. Les théorèmes qui suivront après les définitions nécessaires présentent donc une solution du problème que m'a posé Vl. KOŘÍNEK : Caractériser les treillis sn G possédant des propriétés spéciales.

3.1. Définition. - On appelle reflet d'un treillis sous-modulaire L , le treillis $L/\varkappa_{\underset{\approx}{A}'}$, et l'on note $\operatorname{Ref} L$. De même, on appelle coreflet de L , le treillis $L/\varkappa_{\underset{\approx}{A}}$.

On vérifie facilement le lemme suivant :

3.2. LEMME.

$$\mathrm{Ref}(\mathrm{Ref}\ L) \cong \mathrm{Ref}\ L\ , \qquad \mathrm{Ref}(\mathrm{Coref}\ L) \cong \underset{\sim}{1}\ ,$$

$$\mathrm{Coref}(\mathrm{Ref}\ L) \cong \underset{\sim}{1}\ , \qquad \mathrm{Coref}(\mathrm{Coref}\ L) \cong \mathrm{Coref}\ L\ ,$$

$\underset{\sim}{1}$ étant le treillis ayant un seul élément.

3.3. Définition. - Une classe C des treillis est dite π-stable si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée :

$$(L \in C \text{ et } L \text{ est sous-modulaire}) \Longleftrightarrow \mathrm{Ref}\ L \in C\ .$$

Autrement dit : Nous allons voir que la classe des treillis semi-modulaires possédant un élément universel est π-stable. Cela signifie que, pour un treillis sous-modulaire L ayant un élément universel, on peut déjà déduire de la semi-modularité de l'image homomorphe $\mathrm{Ref}\ L$, qu'il en est de même du treillis L.

Rappelons les définitions de deux classes de treillis introduites par IQBALUNNISA [4].

3.4. Définition. - On appelle treillis supermodulaire (supermodular lattice) d'ordre $n \geqslant 3$, un treillis vérifiant pour tous les éléments $x , y_1 , \dots , y_n \in T$ la relation

$$\text{(I)} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} (x \cup y_i) = x \cup \bigcup_{i=1}^{n} \Big(\bigcap_{j=1}^{n} z_{ij}\Big)\ ,$$

$z_{ij} = x \cup y_j$ pour $i = j$, et $z_{ij} = y_j$ pour $i \neq j$.

On appelle treillis légèrement modulaire (slightly modular lattice) d'ordre $n \geqslant 2$, un treillis T vérifiant pour tous les éléments $x , y_1 , \dots , y_n \in T$ l'identité

$$\text{(II)} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} (x \cup y_i) = x \cup \bigcup_{i=1}^{n} \Big(\bigcap_{j=1}^{n} z_{ij}\Big)\ ,$$

$z_{ij} = y_j$ pour $j = i$, et $z_{ij} = x \cup y_j$ pour $i \neq j$.

On peut démontrer le théorème suivant :

3.5. THÉORÈME. - La classe des treillis :

(i) distributifs, est π-stable,

(ii) modulaires, est π-stable,

(iii) semi-modulaires possédant un élément universel, est π-stable,

(iv) supermodulaires, est π-stable,

(v) <u>légèrement modulaires, est</u> π-<u>stable</u>,

(vi) <u>relativement complémentés, n'est pas</u> π-<u>stable</u>.

<u>Démonstration du théorème</u> (3.5).

(i) <u>et</u> (ii) : Pour $a \geqslant b$, on définit

$$\Pi(a\ ,\ b) = \{q \in K_L/\pi \mid \exists\ p \prec q\ ,\quad b \geqslant q \succ p \geqslant a\ ,\quad \overline{q/p} = q\}$$

(cf. [8]). Supposons que, dans un treillis sous-modulaire L , soit vérifiée la relation suivante :

$$g = (a \cup b) \cap (a \cup c) > a \cup (b \cap c) = d\ .$$

On a

$$\begin{aligned}\Pi(g\ ,\ d) \subseteq \Pi(d \cup c\ ,\ d) = \Pi(c\ ,\ c \cap d) &\subseteq \Pi(c\ ,\ b \cap c)\\ &= \Pi(c\ ,\ g \cap c) \cup \Pi(g \cap c\ ,\ b \cap c)\\ &= \Pi(a \cup c\ ,\ g) \cup \Pi((a \cup b) \cap c\ ,\ b \cap c)\\ &\subseteq \Pi(a \cup c\ ,\ g) \cup \Pi(a \cup b\ ,\ b)\\ &= \Pi(a \cup c\ ,\ g) \cup \Pi(a\ ,\ a \cap b)\ .\end{aligned}$$

De la relation $a \leqslant d < g$, on déduit

$$\Pi(g\ ,\ d) \subseteq \underset{\sim}{A}\ ,$$

et pour les images $\tilde{g}$, $\tilde{d}$ des éléments g , d dans le treillis $\tilde{L} = \mathrm{Ref}\ L$, on a donc $\tilde{g} > \tilde{d}$.

En conséquence, le reflet d'un treillis non distributif (resp. non modulaire) n'est pas distributif (resp. modulaire).

La réciproque est évidente.

<u>Remarque</u>. - En utilisant le théorème (1.7), on vérifie sans peine que le reflet d'un treillis sous-modulaire L est le treillis à un élément si, et seulement si, L est distributif.

(iii) :

1° Soit L semi-modulaire et $1 \in L$. Par suite L satisfait à la condition de chaîne ascendante, et d'après [2] est le treillis Ref L semi-modulaire.

2° Soit L un treillis qui n'est pas semi-modulaire. Donc

$$\exists\ x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\quad y \cap z \prec x < z < x \cup y\ ,\qquad \forall\ y \cap z < t \leqslant y\ ,\quad x < z \cap (x \cup t) \leqslant z\ .$$

On a

$$\Pi(x \cup t\ ,\ z \cap (x \cup t)) = \Pi((z \cap (x \cup t)) \cup t\ ,\ z \cap (x \cup t))$$
$$= \Pi(t\ ,\ y \cap z) = \Pi(t\ ,\ t \cap x) = \Pi(x \cup t\ ,\ x)\ ,$$

d'où

$$\Pi(z \cap (x \cup t)\ ,\ x) \subseteq \underset{\approx}{A}\ ,$$

et

$$\underset{\approx}{A} \cap \Pi(t\ ,\ y \cap z) \neq \emptyset\ .$$

De même

$$\Pi(x\ ,\ y \cap z) = \Pi(x \cup t\ ,\ t) = \Pi((x \cup t) \cap z\ ,\ y \cap z)\ ,$$

d'où

$$\Pi(x\ ,\ y \cap z) \cap \underset{\approx}{A} \neq \emptyset\ .$$

Dans le treillis $\tilde{L} = \mathrm{Ref}\ L$, on a donc les relations

$$\tilde{y} \cap \tilde{z} < \tilde{x} < \tilde{z} < \tilde{x} \cup \tilde{y}\ ,$$

et

$$\tilde{x} < \tilde{z} \cap (\tilde{x} \cup \tilde{t}) \lneq \tilde{z}\ .$$

Si le treillis Ref L était semi-modulaire, il existerait un élément $\tilde{t}^* \in \tilde{L}$ tel que

$$\tilde{y} \cap \tilde{z} < \tilde{t}^* \lneq \tilde{y} \qquad \text{et} \qquad \tilde{x} = \tilde{z} \cap (\tilde{x} \cup \tilde{t}^*)\ .$$

Pour $t = y \cap (t^* \cup (y \cap z))$, on aurait donc

$$y \cap z < t \lneq y\ , \qquad \tilde{t} = \tilde{t}^*\ ,$$

et

$$\tilde{z} \cap (\tilde{x} \cup \tilde{t}) = \tilde{z} \cap (\tilde{x} \cup \tilde{t}^*) = \tilde{x}\ ,$$

ce qui est contradictoire avec

$$\tilde{x} < \tilde{z} \cap (\tilde{x} \cup \tilde{t})\ .$$

Le treillis Ref L n'est donc pas semi-modulaire.

(iv) : Soit L un treillis sous-modulaire qui n'est pas supermodulaire. Si L n'est pas modulaire, alors Ref L n'est pas modulaire, et Ref L n'est pas supermodulaire. Supposons L modulaire ; alors il existe x_1 , y_1 , ... , y_n tels que

$$g = \bigcap_{i=1}^{n} (x \cup y_i) > x \cup \bigcup_{i=1}^{n} \Big(\bigcap_{j=1}^{n} z_{ij}\Big) = d\ .$$

Nous allons démontrer la proposition suivante :

(iv.1) Quel que soit $q/p \in K_L$, $y_1 \cap \dots \cap y_{n-2} \cap (x \cup y_{n-1}) \cap y_n \leqslant p \prec q \leqslant y_n$, il existe s, t tels que :

1° $t/s \; \pi \; q/p$,

2° $s \geqslant g$ ou $t \leqslant d$.

En effet, définissons par récurrence

$$r_0 = y_n \; ,$$

$$r_j = r_{j-1} \cap y_j \; , \qquad j = 1 , \dots , n-2 \; ,$$

et

$$r_{n-1} = r_{n-2} \cap (x \cup y_{n-1}) \; .$$

En utilisant la modularité du treillis L, on obtient

$$(x \cup y_j) \cap (y_j \cup r_{j-1}) = y_j \cup [x \cap (y_j \cup r_{j-1})] \; .$$

On a

$$\Pi(r_{j-1} , r_j) = \Pi(y_j \cup r_{j-1} , y_j) = \Pi(y_j \cup r_{j-1} , y_j \cup [x \cap (y_j \cup r_{j-1})]) \cup \Pi(y_j \cup [x \cap (y_j \cup r_{j-1})] , y_j) \; .$$

Comme

$$(y_j \cup r_{j-1})/[y_j \cup [x \cap (y_j \cup r_{j-1})]] \; \pi \; (y_j \cup r_{j-1})/((x \cup y_j) \cap (y_j \cup r_{j-1})) \; \pi \; ((x \cup y_j) \cup (y_j \cup r_{j-1}))/(x \cup y_j) \; ,$$

et qu'on a

$$[y_j \cup [x \cap (y_j \cup r_{j-1})]]/y_j \; \pi \; [x \cap (y_j \cup r_{j-1})]/(y_j \cap x \cap (y_j \cup r_{j-1})) \; ,$$

on voit que

$$\Pi(r_{j-1} , r_j) = \Pi(x \cup y_j \cup r_{j-1} , x \cup y_j) \cup \Pi(x \cap (y_j \cup r_{j-1}) , y_j \cap x) \; .$$

Ceci entraîne aussitôt :

$$\forall \; p \prec q \; , \quad r_j \leqslant p \prec q \leqslant r_{j-1} \; , \qquad \exists \; s \prec t \; ,$$

tels que $t/s \; \pi \; q/p$, et $s \geqslant g$ (le cas où $\bar{t}/s \in \Pi(x \cup y_j \cup r_{j-1} , x \cup y_j)$), ou $t \leqslant d$ (le cas où $\bar{t}/s \in \Pi(x \cap (y_j \cup r_{j-1}) , y_j \cap x)$). On a

$$r_{n-2}/r_{n-1} = r_{n-2}/(r_{n-2} \cap (x \cup y_{n-1})) \; \pi \; (r_{n-2} \cup (x \cup y_{n-1}))/(x \cup y_{n-1}) \; ,$$

et donc

$$\Pi(r_{n-2} , r_{n-1}) = \Pi(r_{n-1} \cup (x \cup y_{n-1}) , x \cup y_{n-1}) \; .$$

Ceci donne, compte tenu de ce que $x \cup y_{n-1} \geqslant g$, la même conclusion pour le quotient r_{n-2}/r_{n-1}. Finalement

$$\Pi(y_n , y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_{n-2} \cap (x \cup y_{n-1}) \cap y_n) = \Pi(r_0 , r_n) = \bigcup_{j=1}^{n-1} \Pi(r_{j-1} , r_j) ,$$

d'où (iv.1).

On voit que

$$\Pi(g , d) \subseteq \Pi(y_n \cup d , d) = \Pi(y_n , y_n \cap d)$$

$$\subseteq \Pi(y_n , y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_{n-2} \cap (x \cup y_{n-1}) \cap y_n) .$$

Vu l'assertion (iv.1), on a

$$\Pi(g , d) \subseteq \underset{\sim}{A} ,$$

par suite

$$\tilde{g} > \tilde{d} ,$$

et le treillis Ref L n'est pas supermodulaire.

(v) : Soit L un treillis sous-modulaire qui n'est pas légèrement modulaire. Donc, il existe $x , y_1 , \dots , y_n$ vérifiant la relation

$$g = \bigcap_{i=1}^{n} (x \cup y_i) > x \cup \bigcup_{i=1}^{n} (\bigcap_{j=1}^{n} z_{ij}) = d .$$

Nous allons démontrer la proposition suivante :

(v.1) Quel que soit $q/p \in K_L$, $(x \cup y_1) \cap (x \cup y_2) \cap \dots \cap (x \cup y_n) \cap y_n \leqslant p < q \leqslant y_n$, il existe s, t tels que

$$t/s \ \pi \ q/p \quad \text{et} \quad s \geqslant g .$$

Posons par récurrence

$$\rho_0 = y_n ,$$

$$\rho_j = \rho_{j-1} \cap (x \cup y_j) , \qquad j = 1 , 2 , \dots , n-1 .$$

On a

$$\rho_{j-1}/\rho_j = \rho_{j-1}/(\rho_{j-1} \cap (x \cup y_j)) \ \pi \ ((x \cup y_j) \cup \rho_{j-1})/(x \cup y_j) ,$$

donc

$$\Pi(\rho_{j-1} , \rho_j) = \Pi(x \cup y_j \cup \rho_{j-1} , x \cup y_j) ,$$

d'où la proposition (v.1).

D'après la proposition (v.1) appliquée aux relations

$$\Pi(g\,,\,d) \subseteq \Pi(y_n \cup p\,,\,p) = \Pi(y_n\,,\,y_n \cap p)$$

$$\subseteq \Pi(y_n\,,\,(x \cup y_1) \cap (x \cup y_2) \cap \dots \cap (x \cup y_{n-1}) \cap y_n)\,,$$

on voit que

$$\Pi(g\,,\,d) \subseteq \underset{\sim}{A}\,.$$

Il en résulte que Ref L n'est pas légèrement modulaire.

C. Q. F. D.

De (3.5), découle immédiatement cette "traduction" en théorie des groupes :

3.6. THÉORÈME. - Soit G un groupe ayant une suite de composition de longueur finie, et soit C une des classes (i)-(v). Pour que sn G soit un treillis de classe C , il faut et il suffit que

$$\text{Ref } G = \text{Ref}(\text{sn } G) \in C\,.$$

Passons au cas général. On a le lemme suivant :

3.7. LEMME. - Si C est une classe primitive de treillis qui n'est pas absolument dégénérée, tout treillis distributif appartient à cette classe.

Pour la démonstration du lemme, il suffit de démontrer l'assertion suivante :

Soit $\mathfrak{D}$ la classe primitive de treillis distributifs. Les relations identiques

(1) $$w_\lambda = w'_\lambda\,, \qquad \lambda \in \Lambda\,,$$

sont des conséquences de la distributivité, ou la classe primitive de treillis distributifs vérifiant les relations (1) est absolument dégénérée.

Preuve. - Notons $\mathfrak{A}$ la classe primitive de treillis distributifs vérifiant les relations (1), et supposons que $\mathfrak{A}$ ne soit pas absolument dégénérée. Désignons par $F_{\mathfrak{A}}$ le treillis libre de la classe $\mathfrak{A}$ avec l'ensemble $\{x_\mu\}_{\mu\in M}$ des générateurs libres. Soit

(2) $$w_{\lambda_0} = w'_{\lambda_0}\,, \qquad \lambda_0 \in \Lambda\,,$$

une des relations identiques.

$F_{\mathfrak{A}}$ étant distributif, il résulte de [1] (p. 60, lemma 3) que la relation (2) est équivalente à une relation de la forme

(3) $$\bigcup_{h=1}^{r}\Big[\bigcap_{k=1}^{n(h)} x_{i(h,k)}\Big] = \bigcup_{h'=1}^{r'}\Big[\bigcap_{k=1}^{n'(h')} x_{i'(h',k)}\Big]\,.$$

On a

(4) $(x_1 \cap x_2 \cap \ldots \cap x_p \geqslant x_{i_1} \cap x_{i_2} \cap \ldots \cap x_{i_q} \;,\; p \geqslant 1 \;,\; q \geqslant 1)$

$$\Longrightarrow (\forall\ 1 \leqslant j \leqslant p \;,\; \exists\, i_k \;,\; x_j = x_{i_k} \;,\; 1 \leqslant k \leqslant q).$$

En effet, supposons que x_1 ne soit pas un des éléments x_{i_k}. Choisissons v , $w \in F_{\mathfrak{A}}$ tels que $v < w$, et posons

$$x_1 = v \;, \qquad x_2 = \ldots = x_p = x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_q} = w \;.$$

Il en résulte

$$x_1 \cap x_2 \cap \ldots \cap x_p = v \geqslant w = x_{i_1} \cap \ldots \cap x_{i_q} > v \;.$$

Cette contradiction montre que l'assertion (4) est vraie.

De même, on a :

(5) Quel que soit h , $h \geqslant 1$, la relation

$$x_1 \cap x_2 \cap \ldots \cap x_p = x_1 \cap x_2 \cap \ldots \cap x_p \cap \{ \bigcup_{\ell=1}^{h} \bigcap_{d=1}^{f(\ell)} x_{i(\ell,d)} \} \;,$$

où

$$\forall\ \ell = 1 , \ldots , h \;,\; \forall\ d = 1 , \ldots , f(\ell) \;, \qquad i(\ell , d) \notin \{1 , 2 , \ldots , p\} \;,$$

n'est pas valable dans $F_{\mathfrak{A}}$.

Enfin nous avons :

(6) L'élément $x_1 \cap x_2 \cap \ldots \cap x_p$ est $\cup$-irréductible.

Sinon, on pourrait l'exprimer sous la forme

$$x_1 \cap x_2 \cap \ldots \cap x_p = \bigcup_{\bar\ell=1}^{\bar h} \bigcap_{\bar d=1}^{\bar f(\bar\ell)} x_{\bar i(\bar\ell,\bar d)} \;,$$

et d'après (4),

$$\forall\ \bar\ell \;,\quad \bigcap_{\bar d=1}^{\bar f(\bar\ell)} x_{\bar i(\bar\ell,\bar d)} = x_1 \cap x_2 \cap \ldots \cap x_p \cap (x_{j_1} \cap x_{j_2} \cap \ldots \cap x_{j_b}) \;,$$

$$b \geqslant 0 \;,\quad j_i = j_i(i , \bar\ell) \;,$$

où

$$\forall\ 1 \leqslant a \leqslant b \;, \qquad j_a \notin \{1 , 2 , \ldots , p\} \;.$$

Mais $F_{\mathfrak{A}}$ étant distributif, on obtiendrait

$$x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_p = x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_p \cap \{ \bigcup_{\ell=1}^{h} \bigcap_{d=1}^{f(\ell)} x_{i(\ell,d)} \} ,$$

où

$$\forall \ \ell = 1 , \dots , h , \quad \forall \ d = 1 , \dots , f(\ell) , \qquad i(\ell , d) \notin \{1 , 2 , \dots , p\} ,$$

en contradiction avec (5).

Comme $F_{\mathfrak{A}}$ est distributif, et que tout élément de la forme $\bigcap_{k=1}^{n(h)} x_{i(h,k)}$ est $\cup$-irréductible, on en déduit, d'après [1] (p. 58, corollary), que, après une éventuelle permutation des indices, (3) est équivalent aux relations

$$r = r' ,$$

et

$$\forall \ h , \quad \exists \ h' , \qquad \bigcap_{k=1}^{n(h)} x_{i(h,k)} = \bigcap_{k=1}^{n'(h')} x_{i'(h,k)} .$$

Ces relations sont équivalentes, d'après (4), aux relations de la forme

$$x_{\varkappa} = x_{\varkappa} , \qquad \varkappa \in K .$$

La distributivité du treillis $F_{\mathfrak{A}}$ entraîne, par conséquent, la relation (2).

Le lemme est démontré.

Ce lemme permet d'établir le théorème généralisant le théorème (3.5) :

3.8. THÉORÈME. - <u>Toute classe primitive de treillis</u> C <u>qui n'est pas absolument dégénérée est</u> π-<u>stable</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit L un treillis sous-modulaire, et Ref L $\in$ C . D'après le lemme (3.2), on a Ref(Coref L) = $\underset{\sim}{1}$, et le reflet du treillis sous-modulaire Coref L est distributif, d'où Coref L est distributif, et le lemme (3.7) montre que Coref L $\in$ C . D'autre part, il est facile de voir que L est le produit sous-direct des treillis Ref L et Coref L , donc L $\in$ C .

La réciproque est évidente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKHOFF (Garreth). - Lattice theory. 3e édition. - Providence, American mathematical Society, 1967 (American mathematical Society. Colloquium Publications, 25).

[2] CROISOT (Robert). - Contribution à l'étude des treillis semi-modulaires de longueur infinie, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 68, 1951, p. 203-265 (Thèse Sc. math. Paris, 1951).

[3] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[4] IQBALUNNISA. - On types of lattices, Fund. Math., Warszawa, t. 59, 1966, p. 97-102.

[5] SZÁSZ (Gabor). - Einführung in die Verbandstheorie. - Budapest, Akadémiai Kiadó, 1962.

[6] TAMASCHKE (Olaf). - Submodulare Verbände, Math. Z., t. 74, 1960, p. 186-190.

[7] TAMASCHKE (Olaf). - Die Kongruenzrelationen im Verband der zugänglichen Subnormalteiler, Math. Z., t. 75, 1961, p. 115-126.

[8] TAMASCHKE (Olaf). - Verbandstheoretische Methoden in der Theorie der subnormalen Untergruppen, Arch. der Math., t. 13, 1962, p. 313-330.