Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Maurice Koskas

Forme algébrique des théories de Stone-Gel'fand

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, nº 2 (1967-1968), exp. nº 12, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A3_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, n° 12

26 février 1968

FORME ALGÉBRIQUE DES THÉORIES DE STONE-GEL'FAND

par Maurice KOSKAS

(d'après W. SLOWIKOWSKI et W. ZAWADOWSKI) [4]

1. Introduction.

Les travaux de M. H. STONE [5] sur l'algèbre des fonctions continues d'un compact dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et sur la représentation des algèbres de Boole, sont à l'origine du précédent travail.

Citons quelques résultats obtenus par STONE.

THÉORÈME. - Deux espaces compacts X et Y sont homéomorphes si, et seulement si, les algèbres $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$ sont isomorphes.

THÉORÈME. - Toute algèbre de Boole est isomorphe à l'algèbre des parties ouvertes et fermées d'un compact totalement discontinu.

Disons quelques mots des techniques utilisées pour établir ces théorèmes :

X étant un espace topologique compact, on montre qu'il existe une bijection entre X et l'ensemble des idéaux maximaux d'un certain anneau ($\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$).

On munit ensuite l'ensemble des idéaux maximaux en question d'une certaine topologie le rendant homéomorphe à X . On a le choix entre deux points de vue (aboutissant en fait à la même topologie, ce que l'on exprime en disant que les algèbres $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ sont régulières).

Le premier point de vue, celui de GEL'FAND, est susceptible d'être généralisé aux algèbres de Banach complexes, modulo le fameux théorème de Gel'fand-Mazur. Nous renvoyons par exemple à BOURBAKI [1] et SEMADENI [3].

Le second point de vue, celui de JACOBSON et ZARISKI, peut être étendu aux anneaux commutatifs et donc à la géométrie algébrique.

C'est ce deuxième point de vue, plus algébrique, qui est exposé dans le travail [4] que nous allons décrire.

Notons pour terminer que les algèbres de fonctions continues ont fait l'objet de très nombreux travaux (voir par exemple le livre de GILLMAN et JERISON [2]).

2. Demi-anneaux.

DÉFINITION. - Un demi-anneau est un ensemble A muni de deux lois de composition notées $+$, $.$, associatives, commutatives, avec élément neutre (noté 0 et 1), telles que $.$ soit distributive par rapport à $+$.

Dans tout l'exposé, la notation A désignera une demi-anneau.

Exemples de demi-anneaux.

(a) anneau commutatif unitaire.

(b) treillis avec plus grand et plus petit élément ($\vee$ étant par exemple l'addition, $\wedge$ la multiplication).

(c) E étant un ensemble quelconque, $\mathfrak{F}(E , \underset{\sim}{R}_+)$ ensemble des fonctions de E dans $\underset{\sim}{R}_+$, est un demi-anneau.

(d) T étant un espace topologique, $\mathcal{C}^+(T)$, ensemble des fonctions continues positives définies sur T , est un demi-anneau.

Notations. - Ω désigne l'ensemble des éléments inversibles de A , autrement dit

$$\Omega = \{a \in A : \exists\, b \in A : ab = 1\} .$$

Par exemple, Ω est réduit à un seul élément dans le cas où A est un treillis (exemple (b) donné plus haut).

Une partie $\mathfrak{a}$ de A non vide est dite un idéal si :

(a) $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$,

(b) $\mathfrak{a}A \subseteq \mathfrak{a}$.

On désigne par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des idéaux maximaux de A . Voici quelques exemples d'idéaux maximaux.

Lorsque $A = \mathfrak{F}(E , \underset{\sim}{R}_+)$ ou $A = \mathcal{C}^+(T)$ avec T compact, tout idéal maximal M de A est de la forme $M = \{f \in A : f(t) = 0\}$ où t est un élément fixé de E (ou de T) qui dépend, bien sûr, de M . Lorsque A est un demi-anneau d'ouverts (*) d'un espace T compact, ou plus généralement quasi-compact vérifiant l'axiome T_1 , les ouverts formant une base de la topologie de T , tout idéal maximal M de A est de la forme $M = \{U \in A : U \not\ni t\}$ où t est un élément fixé de T , dépendant de M .

(*) La loi $+$ est la réunion, la loi $.$ est l'intersection.

Quelques résultats sur les idéaux maximaux. - Les résultats suivants sont élémentaires. Nous ne les démontrerons pas.

Tout idéal de A se plonge dans un idéal maximal

$$a \in \Omega \iff \forall M \in \mathfrak{M} , \ a \notin M .$$

$$M \in \mathfrak{M} , \ a \notin M \implies (M + Aa) \cup Aa \cup M = A .$$

$$M \in \mathfrak{M} , \ ab \in M , \ a \notin M \implies b \in M .$$

Définition des demi-anneaux positifs. - A est dit positif si,

$$a \in A \implies 1 + a \in \Omega .$$

Exemples : les exemples (b), (c), (d) de la page 2.

PROPOSITION 1 (un critère de positivité). - A est positif si, et seulement si, on a

$$\forall M \in \mathfrak{M} , \ a + b \in M \implies a \in M .$$

Démonstration. - Supposons A positif, soient $M \in \mathfrak{M}$, $a , b \in A$ tels que $a + b \in M$. Supposons $a \notin M$. Alors, il existe $m \in M$, $z \in A$ tel que $1 = m + zx$. On a $1 + zb = m + z(a + b) \in M$. Mais $1 + zb \in \Omega$, ce qui est absurde.

Réciproquement, supposons la condition vérifiée, montrons que A est positif. Soit $a \in A$, supposons $1 + a \notin \Omega$. Il existe alors $M \in \mathfrak{M}$, tel que $1 + a \in M$, et par suite $1 \in M$, ce qui est absurde.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Si A est positif, alors

(a) $\forall M \in \mathfrak{M}, \ 0 \in M$.

(b) $a \in \Omega \implies A + a \subseteq \Omega$.

Jusqu'à la fin de l'exposé, A sera supposé positif.

Radical. Demi-anneaux sans radicaux.

DÉFINITION. - On pose $\mathcal{R}(A) = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$. A est dit sans radical si $\mathcal{R}(A) = \{0\}$. Notons que dans ce cas, on a $\forall a \in A$, $0a = 0$.

Exemples de demi-anneau sans radical. - $\mathcal{F}(E , \underset{\sim}{R}_+)$, $\mathcal{C}^+(T)$, T étant compact, le treillis des ouverts d'un espace topologique vérifiant T_1 , sont des demi-anneaux sans radical. Il en est de même d'un demi-anneau d'ouverts d'un espace topologique vérifiant T_1 , les ouverts formant une base de la topologie de l'espace.

PROPOSITION 2. - <u>Pour que</u> A <u>soit sans radical, il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée</u> :

$$\forall\, a \in A\,, \neq 0\,,\quad \exists\, b \notin \Omega :\quad a + b \in \Omega\ .$$

<u>Démonstration</u>. - Supposons A sans radical, et soit $a \in A\,, \neq 0$. Il existe $M \in \mathfrak{M}$, ne contenant pas a . Il existe donc aussi $m \in M$, $z \in A$ tel que $1 = m + za$.

On a $a + m \in \Omega$, car autrement il existerait $N \in \mathfrak{M}$ tel que $a + m \in N$, et alors on aurait $a \in N$, $m \in N$, donc $1 \in N$, ce qui est absurde.

Réciproquement, supposons la condition réalisée. Soit $a \in A$, $a \neq 0$. Il existe $b \notin \Omega$ tel que $a + b \in \Omega$. Il existe $M \in \mathfrak{M}$, tel que $b \in M$, et il est clair que l'on ne peut avoir $a \in M$.

C. Q. F. D.

<u>Recouvrements</u>. - Soient $x_1\,, \ldots\,, x_n \in A$. Il est clair que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $x_1 + \ldots + x_n \in \Omega$;

(ii) $\forall\, M \in \mathfrak{M}\,,\ \exists\, x_i : x_i \notin M$.

Cette remarque et les considérations qui suivent justifient la définition suivante :

DÉFINITION. - <u>Une famille</u> $(x_i)_{i\in I}$ <u>d'éléments de</u> A <u>est dite former un</u> recouvrement <u>de</u> A <u>si</u>,

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}\,,\quad \exists\, i \in I :\quad x_i \notin M\ .$$

<u>Exemples de recouvrement</u>. - Supposons tout d'abord que $A = \mathfrak{F}(E\,, \underset{\sim}{R}_+)$ (où $A = C^+(T)$, T étant compact). Une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions appartenant à A forme un recouvrement si, et seulement si,

$$\forall\, t \in E\ \ (\text{ou}\ \ \forall\, t \in T\,),\quad \exists\, i \in I :\quad f_i(t) > 0\ .$$

Supposons maintenant que A soit le treillis des ouverts d'un espace topologique T vérifiant T_1 . Une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'éléments de A forme un recouvrement si, et seulement si, $\bigcup_{i\in I} U_i = T$. On a la même conclusion si A est un demi-anneau d'ouverts d'un espace topologique quasi-compact, vérifiant T_1 , les ouverts formant une base de la topologie.

Ces derniers exemples justifient la terminologie employée ici.

PROPOSITION 3. - Si $(x_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de A, il existe un sous-recouvrement fini.

Démonstration. - Soit I l'ensemble des éléments de A qui sont des sommes d'éléments de la forme $\alpha_i x_i$, $(\alpha_i \in A)$. I n'est pas un idéal (autrement, il existerait $M \in \mathfrak{M}$ contenant I, donc contenant tous les x_i), donc $I = A$. Par suite, 1 s'écrit sous la forme $1 = \sum_{i\in J} \alpha_i x_i$, où J est un ensemble fini d'indices. $(x_i)_{i\in J}$ est aussi un recouvrement de A.

C. Q. F. D.

L'équivalence $\sim$. - Nous définissons sur A une relation d'équivalence, notée $\sim$, de la façon suivante : Quels que soient $a, b \in A$, on a

$$a \sim b \iff \forall M \in \mathfrak{M}, \quad a \in M \iff b \in M .$$

Il est trivial de vérifier les points suivants :

$\sim$ est compatible avec les lois $+$ et $.$ et permet de définir un demi-anneau quotient noté $[A]$.

$$\forall a \in A, \quad a^2 \sim a, \quad a + a \sim a .$$

$[A]$ est un treillis distributif avec plus grand et plus petit élément.

L'application canonique de A sur $[A]$, qui fait correspondre à tout $a \in A$ sa classe notée $[a]$, établit une correspondance biunivoque entre idéaux maximaux de A et idéaux maximaux de $[A]$. On a $[1] = \Omega$, $[0] = \mathcal{R}(A)$.

Exemple de ce passage à quotient. - Si T est un espace compact, et si $A = \mathcal{C}^+(T)$, on vérifie facilement que $[A]$ s'identifie canoniquement à un demi-anneau d'ouverts de T, constituant une base de sa topologie.

PROPOSITION 4. - Les conditions suivantes sont équivalentes, si $a, b \in A$:

(i) $a \sim b$.

(ii) $[a + b + x] = [1] \implies [ab + x] = [1]$.

Démonstration.

(i) $\implies$ (ii). Supposons $a \sim b$ et $a + b + x \sim 1$. Soit $M \in \mathfrak{M}$ contenant $ab + x$. On a $x \in M$, $ab \in M$, donc $x \in M$, $a \in M$, $b \in M$, ce qui est absurde.

(ii) $\implies$ (i). Soit $M \in \mathfrak{M}$ avec $a \in M$, $b \notin M$. Alors $a + b \notin M$. Il existe $m \in M$, $z \in A$ tel que $1 = m + z(a + b)$. On voit que $m + a + b \in \Omega$, donc aussi que $m + ab \in \Omega$, ce qui est absurde.

C. Q. F. D.

DÉFINITION. - A est dit réduit si l'équivalence $\sim$ se réduit à l'égalité.

Exemple : Un demi-anneau d'ouverts d'un espace quasi-compact vérifiant T_1 , les ouverts formant une base de la topologie. Nous verrons plus loin que tout demi-anneau réduit est de ce type.

PROPOSITION 5. - Pour que A soit réduit, il faut et il suffit que A soit un treillis avec plus grand et plus petit élément, et que de plus on ait

$$(z + x + y = 1 \implies z + xy = 1) \implies x = y \quad .$$

Démonstration.

Necessité : Supposons que $z + x + y = 1 \implies z + xy = 1$. La proposition précédente entraîne $x \sim y$, donc $x = y$.

Suffisance : On voit que $\Omega = \{1\}$. Soient alors $x , y \in A$ avec $x \sim y$. Supposons que $z + x + y = 1$. D'après la précédente proposition, on a aussi $z + xy = 1$. Donc $x = y$.

C. Q. F. D.

On montrera aisément à l'aide de la précédente proposition la proposition suivante.

PROPOSITION 6. - Toute algèbre de Boole est un demi-anneau réduit.

3. Topologie de Zariski.

On va munir $\mathfrak{M}$ d'une topologie. Pour tout $x \in A$, on pose

$$\Gamma_x = \{M \in \mathfrak{M} : x \notin M\} \quad .$$

Les résultats suivants sont évidents si $x , y \in A$:

$$\Gamma_{xy} = \Gamma_x \cap \Gamma_y \quad .$$

$$\Gamma_{x+y} = \Gamma_x \cup \Gamma_y \quad .$$

$$\Gamma_x = \mathfrak{M} \iff x \in \Omega \quad .$$

$$\Gamma_x = \emptyset \iff x \in \mathcal{R}(A) \quad .$$

$$\Gamma_x = \Gamma_y \iff x \sim y \quad .$$

PROPOSITION 7. - <u>Les</u> Γ_x $(x \in A)$ <u>constituent une base d'une topologie quasi-compacte sur</u> $\mathfrak{M}$, <u>vérifiant</u> T_1 .

<u>Démonstration</u>. - Soit $M \in \mathfrak{M}$. On a $\mathfrak{M} - \{M\} = \bigcup_{x \in M} \Gamma_x$. $\{M\}$ est fermé. T_1 est donc vérifié.

Par ailleurs, dire que $\mathfrak{M} = \bigcup_{i \in I} \Gamma_{x_i}$ équivaut à dire que $(x_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de A . D'après la proposition 3, on peut en extraire un recouvrement fini $(x_i)_{i \in J}$, et on a $\mathfrak{M} = \bigcup_{i \in J} \Gamma_{x_i}$.

C. Q. F. D.

<u>Exemple</u>. - Soit T un espace quasi-compact vérifiant T_1 , et supposons que A soit un demi-anneau d'ouverts de T , constituant une base de sa topologie.

On sait que tout $M \in \mathfrak{M}$ est de la forme

$$M = \{U \in A : U \not\ni t\} \qquad \text{où} \quad t \in T \ .$$

On définit ainsi une bijection φ de $\mathfrak{M}$ sur T , $M \longmapsto t$. Il est facile de voir que lorsque l'on munit $\mathfrak{M}$ de la topologie définie plus haut, φ est un homéomorphisme.

Revenons à la situation générale. La proposition suivante est évidente.

PROPOSITION 8. - <u>Tout demi-anneau réduit</u> A <u>est isomorphe à un demi-anneau d'ouverts d'un espace quasi-compact vérifiant</u> T_1 , <u>les ouverts formant une base de sa topologie</u>.

<u>Démonstration</u>. - L'espace quasi-compact est $\mathfrak{M}$, l'isomorphisme est l'application $x \in A \longmapsto \Gamma_x$.

Venons en au théorème de Stone [5].

THÉORÈME 9. - <u>Toute algèbre de Boole</u> A <u>est isomorphe à l'algèbre des ouverts-fermés d'un espace compact totalement discontinu</u>.

<u>Démonstration</u>. - A étant réduit, on peut appliquer la précédente proposition. Chaque Γ_x est ouvert mais aussi fermé, car on a $\mathfrak{M} - \Gamma_x = \Gamma_{x'}$, où x' est le complément de x .

On déduit de là aisément que $\mathfrak{M}$ est séparé (donc compact), et est totalement discontinu. Enfin, tout ouvert fermé de $\mathfrak{M}$ est réunion finie de Γ_x $(x \in A)$, d'après BOREL-LEBESGUE, donc est aussi de la forme Γ_x .

C. Q. F. D.

4. Homomorphismes.

DÉFINITION. - A et A' étant deux demi-anneaux, on appelle homomorphisme de A dans A' une application F de A dans A' telle que

$$\forall\ x\ ,\ y \in A\ , \qquad F(x+y) = F(x) + F(y) . F(xy) = F(x)\ F(y)\ ,$$

$$F(x) \in \Omega' \implies x \in \Omega\ .$$

Exemple : l'application canonique de A sur $[A]$.

Le lemme suivant est évident.

LEMME. - Soient A et A' deux demi-anneaux positifs, F un homomorphisme de A sur A' . On a, si $M \in \mathfrak{M}$, $M' \in \mathfrak{M}'$:

$$F(M) \in \mathfrak{M}'\ ; \qquad F^{-1}(M') \in \mathfrak{M}\ ; \qquad F^{-1}(F(M)) = M\ ; \qquad FF^{-1}(M') = M'\ .$$

L'application de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}'$, $M \in \mathfrak{M} \mapsto F(M)$ est une bijection de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}'$ notée f_F .

THÉORÈME 10. - Soient A et A' deux demi-anneaux positifs et F un homomorphisme de A sur A' . L'application f_F est un homéomorphisme de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}'$ (munis des topologies définies dans le précédent paragraphe).

Démonstration. - On a en effet immédiatement, si $x \in A$ et si $x' = F(x)$

$$f_F(\Gamma_x) = \Gamma_{x'}\ .$$

Donnons quelques applications de ce théorème.

(A) Soit T un espace compact, et $A = C^+(T)$. Nous avons vu que $[A]$ s'identifie à un demi-anneau d'ouverts de T , constituant une base de la topologie de T . Soit $\mathfrak{M}'$ l'ensemble des idéaux maximaux de $[A]$, muni de sa topologie. Puisqu'il existe un homomorphisme de A sur $[A]$, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont homéomorphes. Par ailleurs on a vu page 7 que $\mathfrak{M}'$ est homéomorphe à T . Donc $\mathfrak{M}$ est homéomorphe à T .

(B) Soient T et T' deux espaces compacts, $A = C^+(T)$, $A' = C^+(T')$, F un homomorphisme de A' sur A .

Soient $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}$ les ensemble d'idéaux maximaux de A' et de A , munis de leurs topologies habituelles.

On vient de voir que $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{M}'$) est homéomorphe à T (resp. T'). Mais d'après le théorème 10, $\mathfrak{M}$ est homéomorphe à $\mathfrak{M}'$. Donc il existe un homéomorphisme φ de T sur T' . On montre aisément que si F est un isomorphisme conservant les fonctions constantes, on a

$$\forall\ f' \in \mathcal{C}^{+}(T')\ , \qquad F(f') = f' \circ \varphi\ .$$

En particulier, s'il existe un isomorphisme de l'algèbre $\mathcal{C}(T'\ ,\ \underset{\approx}{R})$ sur l'algèbre $\mathcal{C}(T\ ,\ \underset{\approx}{R})$, il induit un isomorphisme conservant les fonctions constantes de $\mathcal{C}^{+}(T')$ sur $\mathcal{C}^{+}(T)$, et donc les conclusions précédentes sont valables.

Même résultat s'il existe un isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{C}(T'\ ,\ \underset{\approx}{C})$ sur $\mathcal{C}(T\ ,\ \underset{\approx}{C})$.

On retrouve des résultats connus de STONE [5].

(C) Soient T et T' des espace quasi-compacts vérifiant T_1 . Soit A (resp. A') un demi-anneau d'ouverts de T (resp. de T') formant une base de sa topologie.

Supposons qu'il existe un homomorphisme F de A sur A' . On voit ici encore, par les mêmes méthodes, qu'il existe un homéomorphisme φ de T sur T' , et on voit facilement que l'on a

$$\forall\ U \in A\ , \qquad F(U) = \varphi(U)\ .$$

En particulier, si les treillis des ouverts de T et T' sont isomorphes, T et T' sont homéomorphes. Ceci est encore un résultat de STONE [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Eléments de mathématiques. Théories spectrales, Chapitres 1 et 2 : Algèbres normées. Groupes localement compacts commutatifs. - Paris, Hermann, 1967 (Actualités scientifiques et industrielles, 1332 ; Bourbaki, 32).

[2] GILLMAN (Leonard) and JERISON (Meyer). - Rings of continuous functions. - Princeton, Toronto, London [etc.], D. Van Nostrand Company, 1960 (The University Series in higher Mathematics).

[3] SEMADENI (Zbigniew). - Spaces of continuous functions on compact sets, Adv. in Math., t. 1, 1965, fasc. 3, p. 320-382.

[4] SLOWIKOWSKI (W.) and ZAWADOWSKI (W.). - A generalisation of maximal ideals method of Stone and Gel'fand, Fund. Math., Warszawa, t. 52, 1955, p. 215-231.

[5] STONE (M. H.). - Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. math. Soc., t. 41, 1937, p. 375-481.