Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jacques Lévy-Bruhl

Images, noyaux, coimages, conoyaux dans les catégories à involution

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, n° 2 (1967-1968), exp. n° 11, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A2_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, n° 11

5 février 1968

IMAGES, NOYAUX, COIMAGES, CONOYAUX DANS LES CATÉGORIES À INVOLUTION

par Jacques LÉVY-BRUHL

1. Image entière.

Une catégorie E est à involution si, pour tout couple d'objets, $\mathrm{Hom}(A , B)$ est un ensemble ordonné, de relation d'ordre $\leqslant$, compatible avec la multiplication, et s'il existe dans E une application $a \to a^o$, vérifiant les axiomes :

(INV-i) $(a^o)^o = a$;

(INV-ii) $(ab)^o = b^o a^o$;

(INV-iii) $a \leqslant b \implies a^o \leqslant b^o$.

La catégorie E est de plus modulaire, si elle vérifie l'axiome

(M_1) $ab \wedge c = a(b \wedge a^o c) \wedge c$.

Un endomorphisme $b = BbB$ de l'objet B est dit entier si $b \leqslant B$, réflexif si $B \leqslant b$, symétrique si $b = b^o$, transitif si $b^2 \leqslant b$, une équivalence s'il a les trois propriétés précédentes.

Soit F la classe des morphismes entiers, symétriques, idempotents de E . Le morphisme $a = BaA$ possède une image entière u , si $va = a$, $v \in F \iff u \leqslant v$.

Soit I une application de E dans F , vérifiant les axiomes :

(IM-i) $I(a) \in F$, $I(a) \leqslant B$ si $a = BaA$;

(IM-ii) $a \leqslant b \implies I(a) \leqslant I(b)$ (isotonie de I) ;

(IM-iii) $I(ab) = I(a\, I(b))$;

(IM-iv) $I(a) \leqslant I(b) \implies a \leqslant bb^o a$.

PROPOSITION V.1.1.

(a) Toute catégorie modulaire vérifie (IM-i) à (IM-iv) en posant

$$I(a) = \mathrm{pr}_2(a) = aa^o \wedge B \qquad (\mathrm{IV}.2.1)(^1)$$

---

(1) Les références renvoient à la numérotation de [1], et les propositions du présent exposé sont précédées du chiffre V .

(b) Un treillis possédant un élément A nul, où le produit coïncide avec $\vee$, vérifie (IM-i) à (IM-iv), en posant

$$I(a) = A \ , \quad \forall\, a \ .$$

S'il n'est pas modulaire, on a un exemple de catégorie non modulaire vérifiant (IM-i) à (IM-iv) (IV.1.2)

PROPOSITION V.1.2. - Dans une catégorie E vérifiant (IM-i) à (IM-iv) :

(a) I est idempotent, $I(I(a)) = I(a)$;

(b) $a \leqslant aa^{o}a$;

(c) $I(a)\, a = a$;

(d) $I(ax) \leqslant I(a)$;

(e) $I(a) \leqslant aa^{o} \wedge B$;

(f) Si $u \in F$, $I(u) = u$;

(g) Si $aa^{o} \wedge B$ est idempotent, $I(a) = aa^{o} \wedge B$;

(h) $u \in F$, $ua = a \implies I(a) \leqslant u$;

(i) $a \in SD \iff I(a) = B$;

(j) $I(a) \leqslant I(b) \iff a \leqslant bb^{o}a$;

(k) $aa^{o} \leqslant bb^{o} \implies I(a) \leqslant I(b)$;

(ℓ) $a \in SG \implies I(y) \leqslant I(a^{o}\, I(ay))$;

(m) $I(a) = i^{o}i$ (i^{o} injection) $\implies$ $ia \in SD$.

<u>Démonstration.</u>

(a) $Ba = a \implies I(Ba) = I(B\, I(a)) = I(I(a))$ (IM-iii) ;

(b) $I(a) \leqslant I(a) \implies a \leqslant aa^{o}a$ (IM-iv) ;

(c) D'après (IM-i), $I(a)\, a \leqslant Ba = a$.

$I(a) \leqslant I(I(a)) \implies a \leqslant I(a)I(a)\, a \implies a \leqslant I(a)\, a$ (IM-iii), (IM-iv), (IM-i) ;

(d) $I(ax) = I(a\, I(x)) \leqslant I(a)$ (IM-iii), (IM-i), (IM-ii) ;

(e) $I(I(a)) \leqslant I(a) \implies I(a) \leqslant aa^{o}I(a) \leqslant aa^{o}$ (IM-iv), (IM-i) et (c) . Or $I(a) \leqslant B$, donc $I(a) \leqslant aa^{o} \wedge B$, s'il existe $aa^{o} \wedge B$;

(f) $I(u)\, u = u$ (c), et $I(u) \leqslant uu^{o}$ (e), donc $I(u) \leqslant u$, mais

$$I(u)\, u \leqslant I(u) \implies u \leqslant I(u) \qquad (c) \ ;$$

(g) $aa^o \wedge B$ est entier et symétrique. S'il est de plus idempotent, on a (f) $I(aa^o \wedge B) = aa^o \wedge B$. Or $I(aa^o \wedge B) \leqslant I(aa^o) \leqslant I(a)$ (**IM-ii**) et (d) , et donc $aa^o \wedge B \leqslant I(a)$. On a l'inclusion duale d'après (e);

(h) $I(a) = I(ua) \leqslant I(u) = u$ (d) et (f) ;

(i) $a \in SD \implies aa^o \wedge B = B$, qui est idempotent, donc $I(a) = B$. Réciproquement $I(a) = B \implies I(a) = I(B)$, et $I(B) \leqslant I(a) \implies B \leqslant aa^oB$ (IM-iv) $\Rightarrow a \in SD$;

(j) $a \leqslant bb^oa \implies I(a) \leqslant I(bb^oa) \leqslant I(b)$ (IM-ii) et (d). La réciproque est (IM-iv);

(k) $aa^o \leqslant bb^o \implies aa^oa \leqslant bb^oa \implies a \leqslant aa^oa \leqslant bb^oa \implies I(a) \leqslant I(b)$ (a) et (j);

(ℓ) $I(a^o\, I(ay)) = I(a^oay)$ (IM-iii). Si $a^oa \geqslant A$, $I(y) \leqslant I(a^oay)$ (IM-ii) ;

(m) $I(i) = i^oi$ (g) $= I(a) \leqslant aa^o$ (e) $\implies iaa^oi^o \geqslant ii^oii^o = A//i \implies ia \in SD$.

<u>Remarque</u>. - D'après **V**.1.2(h), $I(a)$ est image entière de a .

PROPOSITION V.1.3. - Dans une catégorie à involution, où Hom(A , B) est un $\wedge$-demi-treillis et où $aa^o \wedge B$ est idempotent, $\forall\, a$, les axiomes (IM-i) à (IM-iv) sont équivalents à : $I(a) = aa^o \wedge B$ (V.1.2(g)), $I(a)a = a$ (V.1.2(c)) et (IM-iii).

<u>Démonstration</u>. - Supposons vérifiés V.1.2(c), V.1.2(g) et (IM-iii) ; alors $aa^o \wedge B$ est élément de F par hypothèse, donc on a (IM-i).

$a \leqslant b \implies a^o \leqslant b^o \implies aa^o \wedge B \leqslant bb^o \wedge B$ (IM-ii). Supposons $I(a) \leqslant I(b)$, $I(a) \leqslant I(b) \iff aa^o \wedge B \leqslant bb^o \wedge B \implies (aa^o \wedge B)a = a \leqslant (bb^o \wedge B)a \leqslant bb^oa$ (IM-iv). La réciproque résulte de V.1.2.

COROLLAIRE. - Une catégorie à involution, où Hom(A , B) est un $\wedge$-demi-treillis vérifiant (IM-iii) et les conditions $a \leqslant aa^oa$ (V.1.2(b)) , $(aa^o \wedge B)x = aa^ox \wedge x$ vérifie (IM-i) à (IM-iv) avec $I(a) = aa^o \wedge B$.

<u>Démonstration</u>. - On a $(aa^o \wedge B)\, a = aa^oa \wedge a = a$. D'où V.1.2(c) et $aa^o \wedge B$ est idempotent, car

$$(aa^o \wedge B)(aa^o \wedge B) = aa^o(aa^o \wedge B) \wedge aa^o \wedge B = aa^oaa^o \wedge aa^o \wedge aa^o \wedge B = aa^o \wedge B \quad .$$

PROPOSITION V.1.4. - Une catégorie à involution, où Hom(A , B) est un $\wedge$-demi-treillis vérifiant les conditions $a \leqslant aa^oa$ (V.1.2(b)), $I(ax) \leqslant I(a)$ (V.1.2(d)) et $I(a)\mathbf{x} = aa^ox \wedge x$, vérifie les axiomes (IM-i) à (IM-iv) avec $I(a) = aa^o \wedge B$.

<u>Démonstration</u>. - D'après le corollaire précédent, il suffit de prouver que (IM-iii) est conséquence des hypothèses.

$$I(a\ I(b)) = (a(bb^o \wedge A)a^o) \wedge B \leqslant abb^oa^o \wedge B = I(ab) \quad ,$$

et

$$I(ab) = I(a\ I(b)\ b) \leqslant I(a\ I(b)) \qquad (V.2.1(d)) \quad .$$

D'où (IM-iii).

PROPOSITION V.1.5. - Si on admet l'axiome (IM-v) : Tout morphisme entier $u = i^oi$, où i^o est une injection, dans une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-v), $i^oi = I(a)$ si, et seulement si, i^oE est le sous-objet minimum parmi ceux tels que $a = j^oy$, pour un certain facteur y, c'est-à-dire si i^oE est image de a.

<u>Démonstration</u>. - Si j^o est une injection, $j^oja = a \iff a = j^o(ja) = j^oy$ et $i^oE \subseteq j^oE \iff i^o = j^ok^o$, k^o injection (III.3.1) $\iff i^oi \leqslant j^oj$.

2. Noyaux entiers.

Outre les axiomes (IM-i) à (IM-iv), nous supposons que E vérifie l'axiome :

(K-i) Pour tout objet A de E, il existe dans $Hom(A, A)$ un élément minimum $w(A)$.

Remarquons que $w(A) \in F$, car $w(A) \leqslant w^o(A) \implies w^o(A) \leqslant w(A) \implies w(A) = w^o(A)$ et $w(A)^2 \leqslant w(A)\ A = w(A) \implies w(A)^2 = w(A)$.

Nous appellerons <u>noyau entier</u> de $a = BaA$, et noterons $K(a)$ le morphisme $K(a) = I(a^o\ w(B))$, et désignerons par W la classe des morphismes de E, $x = \mathbf{Y\ x\ X}$ définie par $\mathbf{x} = \mathbf{Y\ x\ X} \in W \iff I(x) = w(Y)$.

PROPOSITION V.2.1. - Dans une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-iv) et (K-i) :

(a) $ba^oa \leqslant b \implies a^ow(B)a \leqslant b^ow(C)b \implies K(a) \leqslant K(b)$;

(b) $a \in ID \implies a^ow(B)a = w(A) \implies K(a) = w(A)$;

(c) $a \in W$, $b \in IG \implies ba \in W$;

(d) $a \in W \implies ax \in W$;

(e) $K(ba) = I(a^o\ K(b))$;

(f) $K(a) \leqslant K(ba)$;

(g) $b \in ID \implies K(ba) = K(a)$;

(h) $K(a) \leqslant K(a') \implies K(ac) \leqslant K(a'c)$;

(i) $a \leqslant a' \implies K(ba) \leqslant K(ba')$;

(j) $a \in IG \implies aK(a) \in W$;

(k) $a \in SG$, $K(a) = i^\circ i$, (i° injection), $ay \in W \implies I(y) \leqslant K(a)$ et $y = i^\circ x$ où x est unique.

Démonstration.

(a) Si $b = CbB$, on a $w(B) \leqslant ab^\circ w(C)ba^\circ$ et donc $a^\circ w(B)a \leqslant a^\circ ab^\circ w(C)ba^\circ a \leqslant b^\circ w(C)b$ et (V.1.2(k)) : $I(a^\circ w(B)) \leqslant I(b^\circ w(C))$.

(b) $a^\circ a \leqslant A \implies Aa^\circ a \leqslant A \implies K(a) \leqslant K(A)$. Mais $K(A) \leqslant Aw(A)A = w(A)$, et donc $K(A) = w(A)$, et $K(a) \leqslant w(A) \implies K(a) = w(A)$.

(c) $I(ba) = I(b\ I(a)) = I(b\ w(B)) = K(b^\circ) = w(B)$ (d'après (b)).

(d) $I(ax) \leqslant I(a) = w(B) \implies I(ax) = w(B)$.

(e) $K(ba) = I(a^\circ b^\circ\ w(C)) = I(a^\circ\ I(b^\circ w(C)) = I(a^\circ\ K(b))$.

(f) $w(B) \leqslant K(b) \implies I(a^\circ\ w(B)) \leqslant I(a^\circ\ K(b)) \implies K(a) \leqslant K(ba)$.

(g) Si $b \in ID$, d'après (e) et (b), $K(ba) = I(a^\circ w(A)) = K(a)$.

(h) $K(a) \leqslant K(a') \implies I(c^\circ\ K(a)) \leqslant I(c^\circ\ K(a')) \implies K(ac) \leqslant K(a'c)$.

(i) $a \leqslant a' \implies I(a^\circ\ K(b)) \leqslant I(a'^\circ\ K(b)) \implies K(ba) \leqslant K(ba')$.

(j) $I(a\ K(a)) = I(a\ I(a^\circ\ w(B)) = I(aa^\circ\ w(B)) = K(aa^\circ)$. Si, en particulier, $aa^\circ \in IG$, ou si $a \in IG$, $aK(a) \in W$.

(k) Soit $I(ay) = w(B)$. D'après V.1.2(ℓ), si $a \in SG$, on a

$$I(y) \leqslant I(a^\circ\ I(ay)) = I(a^\circ\ w(B)) = K(a) .$$

Si $K(a) = i^\circ i$, $I(y) = j^\circ j$, où i° et j° sont des injections, $i^\circ i \geqslant j^\circ j$ et $j^\circ = i^\circ m^\circ$, où m° est une injection et $y = j^\circ jy = i^\circ(m^\circ miy) = i^\circ x$, où $x = iy$ est unique.

Nous dirons que le couple (f , g) est quasi-exact à gauche si, et seulement si, $gu \in W \implies \exists\ x$, tel que $u = fx$ (on n'a pas nécessairement $gf \in W$, ni l'unicité de x), et $a \notin W$ sera dit non diviseur de W à gauche si $ax \in W \implies x \in W$.

PROPOSITION V.2.2. - Soit E une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-v) et (K-i), et soit E' la sous-catégorie des applications de E :

(a) La classe $W \cap E'$ est une classe permise dans E' ;

(b) Si $W \cap E'$ est une classe de morphismes nuls dans E' , soit $a' \in E'$, $K(a') = i^\circ i$, on a $i^\circ E' = \mathrm{Ker}\ a'$;

(c) Si $a \in E$, $a \in ID \cap SG$ est non diviseur de W à gauche, et $b \in SD$ est non diviseur de W à droite.

Démonstration.

(a) résulte de V.2.1(c) et V.2.1(d)

(b) On a $a'K(a') \in W$ (V.2.1(j)), et $a'i^{o}i \in W \Longrightarrow a'i^{o} = a'i^{o}ii^{o} \in W$. (V.2.1(d)), $a'y \in W \Longrightarrow y = i^{o}x$. Si W est une classe de morphismes nuls, $i^{o}E' = \operatorname{Ker} a'$ (dans E').

(c) $a \in ID \cap SG$, $ax \in W \Longrightarrow a^{o}ax \in W$ (V.2.1(c)), et comme $a \in SG$, $x \leqslant a^{o}ax \Longrightarrow I(x) \leqslant I(a^{o}ax) \Longrightarrow x \in W$. Si $b \in SD$, $yb \in W \Longrightarrow ybb^{o} \in W$ (V.2.1(d)) et $y \leqslant ybb^{o} \Longrightarrow I(y) \leqslant I(ybb^{o}) \Longrightarrow y \in W$.

PROPOSITION V.2.3 (Lemme des quatre faible) (Axiomes (IM-i) à (IM-iv) et (K-i)). Soit le diagramme (Δ) :

$$(\Delta) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"] & D \arrow[d, "d"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \end{tikzcd}$$

où l'on fait les hypothèses suivantes :

(i) $h' \in IG$;

(ii) d non diviseur de W à gauche

(iii) (g , h) et (f' , g') quasi-exacts à gauche ;

(iv) $h'c = dh$, $f'a = bf$, $cg = g'b$ (diagramme commutatif) ;

(v) $gf \in W$;

(vi) a inversible à droite ;

(vii) b monomorphisme.

Dans ces conditions, c est non diviseur de W à gauche.

Démonstration. -

$cu \in W \Longrightarrow h'cu \in W$ ((i) et V.2.1(c)) $\Longrightarrow dhu \in W$ (iv) $\Longrightarrow hu \in W$ (ii) $\Longrightarrow u = gv$ (iii) $\Longrightarrow cu = cgv \in W \Longrightarrow g'bv \in W$ (iv) $\Longrightarrow bv = f't$ (iii) .

Mais $t = aa't$, où a' est un inverse à droite de a . Donc

$$bv = (f'a)a't \Longrightarrow bv = bfa't \quad (iv) \Longrightarrow v = fa't \quad (vii) .$$

Donc $u = gfa't$ et $gf \in W$ (v) $\Longrightarrow u \in W$ (V.2.1(d)).

PROPOSITION V.2.4 (Lemme 3.3, avec les axiomes (IM-i) à (IM-v) et (K-i)). - Soit le diagramme (Δ') dans une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-v) et (K-i), où l'on fait les hypothèses suivantes :

(i) $z \in IG$;

(ii) c non diviseur de W à gauche ;

(iii) (b, b'), (x, x') quasi-exacts à gauche ;

(iv) $za' = b'y$, $cx' = y'b$, $bx = ya$;

(v) y monomorphisme ;

(vi) $y'y \in W$.

Dans ces conditions, (a, a') est quasi-exact à gauche.

Démonstration.

$a'u \in W \implies za'u \in W$ (V.2.1(c) et (i)) $\implies b'yu \in W$ (iv) $\implies yu = bv$ (iii) $\implies y'bv = y'yu \in W$ ((iii), (vi) et V.2.1(d)) $\implies cx'v \in W$ (iv) $\implies x'v \in W$ (ii) $\implies v = xt$ (iii) $\implies yu = bxt = yat$ (iv) et $u = at$ (v).

(Δ')
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "x"] & A' \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "y"] & A'' \arrow[d, "z"] \\
B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "x'"] & B' \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "y'"] & B'' \arrow[d, "z'"] \\
C \arrow[r, "c"] & C' \arrow[r, "c'"] & C''
\end{tikzcd}$$

3. Coimages réflexives.

Dans une catégorie à involution E, un morphisme BaA admet une coimage réflexive q, s'il existe une équivalence maxima parmi celles qui vérifient $ar = a$, et $ar = a$, r équivalence, $\iff a \leqslant q$.

Cette définition est 3-duale de celle de l'image entière (V.1).

Un morphisme est dit régulier dans E, s'il vérifie $a = aa^{o}a$.

PROPOSITION V.3.1. - Dans une catégorie $\mathbf{E}$ vérifiant (IM-i) à (IM-iv), soit a un morphisme régulier :

(a) $xa \leqslant a \implies xI(a) \leqslant aa^{o}$;

(b) Si $a \in SD$, $xa \leqslant a \iff x \leqslant aa^{o}$;

(c) Si $a \in SG$, a admet pour coimage $a^{o}a$;

(d) Si a est une application, et si $a^\circ a = s^\circ s$ (s surjection), et $I(a) = i^\circ i$ (i° injection), alors ias° est une bijection ;

(e) L'intersection de deux morphismes réguliers est un morphisme régulier.

Démonstration.

(a) $xI(a) \leqslant xaa^\circ$ (V.1.2(e)), et $xa \leqslant a \implies xI(a) \leqslant aa^\circ$. Réciproquement, $xI(a) \leqslant aa^\circ \implies xa = xI(a)a \leqslant aa^\circ a = a$.

(b) $a \in SD \iff I(a) = B$, et (a) devient $xa \leqslant a \iff x \leqslant aa^\circ$.

(c) Si $a \in SG$ est régulier, $a^\circ a$ est une équivalence. Par suite

$$ay \leqslant a \iff y^\circ a^\circ \leqslant a^\circ \iff y^\circ \leqslant a^\circ a \qquad \text{(d'après (b))}$$

et si y est une équivalence, $y \leqslant a^\circ a$. On a d'ailleurs $a(a^\circ a) = a$.

(d) En particulier, une application est régulière et surjective à gauche. Si $a^\circ a = s^\circ s$, et $I(a) = i^\circ i$, on a $as^\circ s = a$, $s^\circ s = a^\circ a$ et $i^\circ ia = a$, $i^\circ i \leqslant aa^\circ$ (V.1.2(c) et V.1.2(e)). On en tire $ias^\circ sa^\circ i^\circ = iaa^\circ i^\circ \leqslant ii^\circ$ ($a \in IG$) et $ias^\circ sa^\circ i^\circ \geqslant ii^\circ$ ($ii^\circ \leqslant aa^\circ$) et $sa^\circ i^\circ ias^\circ = sa^\circ as^\circ = ss^\circ ss^\circ$, ce qui prouve que ias° est une bijection.

(e) Si a et b sont réguliers,

$$(a \wedge b)(a^\circ \wedge b^\circ)(a \wedge b) \leqslant aa^\circ a \wedge bb^\circ b = a \wedge b \text{ .}$$

d'où l'égalité (V.1.2(b)).

COROLLAIRE. - Soit une catégorie à involution E , où $Hom(A , B)$ est un $\vee$-demi-treillis, la multiplication étant distributive par rapport à $\vee$;

(a) Si a est régulier, $a^\circ a \vee A$ est une équivalence et si a possède une coimage q , $a^\circ a \vee A \leqslant q$.

(b) Si a possède une coimage q , a est régulier si, et seulement si, $a^\circ a \leqslant q$.

Démonstration.

(a) Il suffit de prouver que $a^\circ a \vee A$ est idempotent :

$$(a^\circ a \vee A)(a^\circ a \vee A) = a^\circ aa^\circ a \vee a^\circ a \vee a^\circ a \vee A = a^\circ a \vee A \text{ ,}$$

et que $a(a^\circ a \vee A) \leqslant a$. Or $a(a^\circ a \vee A) = aa^\circ a \vee a = a$.

(b) De (a) résulte que $a^\circ a \leqslant a^\circ a \vee A \leqslant q$. Inversement si $a^\circ a \leqslant q$, on a $aa^\circ a \leqslant aq = a$, et par suite $aa^\circ a = a$.

Nous désignons par I' une application de la catégorie à involution E dans la classe des équivalences de E vérifiant les axiomes suivants (3-duaux de (IM-i) à (IM-iv)) :

(COIM-i) $I'(a)$ est une équivalence, $I'(BaA) \geqslant A$;

(COIM-ii) $a \leqslant b \implies I'(a) \leqslant I'(b)$;

(COIM-iii) $I'(ab) = I'(I'(a)\, b)$;

(COIM-iv) $I'(b) \leqslant I'(a) \implies ab^\circ b \leqslant a$, et éventuellement,

(COIM-v) Toute équivalence r est de la forme $r = s^\circ s$ (s surjection).

PROPOSITION V.3.2 (3-duale de V.1.2).

(a) $I'(I'(a)) = I'(a)$;

(b) $aa^\circ a \leqslant a$;

(c) $aI'(a) = a$;

(d) $I'(a) \leqslant I'(xa)$;

(e) $a^\circ a \vee A \leqslant I'(a)$;

(f) Si r est une équivalence, $I'(r) = r$;

(g) Si $a^\circ a \vee A$ est une équivalence, $I'(a) = a^\circ a \vee A$;

(h) Si r est une équivalence $ar = a \implies r \leqslant I'(a)$;

(i) $a \in ID \implies I'(a) = A$;

(j) $I'(a) \leqslant I'(b) \iff ba^\circ a \leqslant b$;

(k) $a^\circ a \leqslant b^\circ b \implies I'(a) \leqslant I'(b)$;

(ℓ) $a \in IG \implies I'(I'(ya)a^\circ) \leqslant I'(y)$;

(m) $I'(a) = s^\circ s \implies as^\circ \in ID$.

PROPOSITION V.3.3. - Soit E une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-iv) :

(a) La classe des morphismes réguliers surjectifs à gauche admet des coimages (réflexives) vérifiant (COIM-i) à (COIM-iv), avec $I'(a) = a^\circ a$.

(b) Si E vérifie de plus (IM-v) et (COIM-v), et si E' est la sous-catégorie des applications de E , soient $a' \in E'$, $I(a') = i^\circ i$, $I'(a') = s^\circ s$, l'objet quotient Es est coimage de a' , on a $a' = i^\circ bs$ où b est une bijection, et si $a' = i'^\circ s'$ (i'° injection, s' surjection), on a nécessairement $i'^\circ E' = \mathrm{Im}(a')$, $Es' = \mathrm{Coim}(a')$, $i'^\circ i' = I(a')$, $s'^\circ s' = I'(a')$.

(c) Si une catégorie vérifie (IM-i) à (IM-iv) et (COIM-i) à (COIM-iv), tout morphisme est régulier.

(d) Si une catégorie vérifie (IM-i) à (IM-iv), (COIM-i) à (COIM-iv) et (K-i), on a $K(I'(a)) = K(a)$.

Démonstration.

(a) Soit SGR la classe des morphismes réguliers et surjectifs à gauche. Posons $I'(a) = a^o a$, coimage réflexive de a (V.3.1(c)). C'est une équivalence (COIM-i) ; $a \in SGR$, $b \in SGR$, $a \leqslant b \implies a^o a \leqslant b^o b$ (COIM-ii) ; $I'(I'(a)\, b) = b^o a^o a a^o a b$ (en supposant ab régulier) $= b^o a^o a b = I'(ab)$ (COIM-iii), et

$$b^o b \leqslant a^o a \implies a b^o b \leqslant a a^o a = a \quad \text{(COIM-iv)} .$$

(b) Es est minimum parmi les objets quotients de la forme Et (t surjection) tel que $a = yt$ (V.1.5)*** . Si $a' \in E'$, $a' = i^o bs$ (V.3.1(d)), et si $a' = i'^o s'$ $I(a') = I(i'^o\, I(s')) = I(i'^o) = i'^o i' = i^o i$ ((IM-iii) et V.1.2(i)). D'où $i^o E = i'^o E$ (III.3.3). Par 3-dualité $Es = Es'$.

(c) résulte de V.1.2(b) et V.3.2(b).

(d) Soit $I'(a) = s^o s$. On a $K(s^o s) = K(s)$, car $s^o \in ID$ (V.2.1(g)). Mais $K(a) = K(a\, I'(a)) = K(a s^o s) = K(s) = K(I'(a))$, car

$$a^o a \leqslant s^o s = I'(a) \implies s a^o a s^o \leqslant s s^o s s^o = A/s \implies a s^o \in ID .$$

PROPOSITION V.3.4. - Une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-iv) et aux conditions :

V.3.4(i) Tout morphisme est régulier ;

V.3.4(ii) $a^o a c \leqslant c \implies a(b \wedge c) = ab \wedge ac$

est une catégorie modulaire.

Démonstration. - $I(ab \wedge c) \leqslant I(ab) \leqslant I(a)$ ((IM-ii) et V.1.2(d)), d'où (IM-iv) $ab \wedge c \leqslant a a^o (ab \wedge c)$, et puisque a est régulier

$$a a^o (ab \wedge c) \leqslant a a^o a b \wedge a a^o c = ab \wedge a a^o c .$$

Posons $a' = a$, $c' = a^o c$, on a

$$a'^o a' c' = a^o a a^o c = a^o c = c' ,$$

et par suite (V.3.4(ii)) :

$$a'(b' \wedge c') = a'b \wedge a'c' \qquad \text{ou} \qquad a(b \wedge a^o c) = ab \wedge a a^o c$$

et par suite $ab \wedge c \leqslant a(b \wedge a^o c)$ et E est modulaire.

Remarque. - Une catégorie modulaire vérifie (IM-i) à (IM-iv), V.1.1(a) et V.3.4(ii) d'après III.7.9. Il y a donc identité entre les catégories modulaires où tout morphisme est régulier, et les catégories vérifiant (IM-i) à (IM-iv), V.3.4(i) et V.3.4(ii).

4. Catégories bimodulaires.

Une catégorie E à involution sera dite bimodulaire si $\mathrm{Hom}(A , B)$ est un treillis d'opérations $\wedge$ et $\vee$, et si la catégorie est modulaire et vérifie l'axiome 2-dual de M_2 (IV.1). On a donc

$$M_2 \quad (ab \wedge c) \leqslant (a \wedge cb^o)b \qquad \text{et} \quad M_2^{***} \quad (a \vee cb^o)b \leqslant ab \vee c \quad .$$

Dans une catégorie bimodulaire, à toute formule déduite des axiomes, on peut adjoindre les formules 1 , 2 ou 3-duales.

PROPOSITION V.4.1. - Si E est une catégorie bimodulaire :

(a) Tout morphisme est régulier ;

(b) E vérifie (IM-i) à (IM-iv), (COIM-i) à (COIM-iv), avec $I(a) = aa^o \wedge B$, $I'(a) = a^oa \vee A$, si $a = BaA$;

(c) Tout morphisme réflexif est une équivalence ;

(d) $aa^o \leqslant b^ob \vee B \implies (b \wedge c)a = ba \wedge ca$;

(d^{***}) $aa^o \geqslant b^ob \wedge B \implies (b \vee c)a = ba \vee ca$;

(e) $a^ox \wedge A \leqslant a^oa \leqslant a^ox \vee A$.

Démonstration.

(a) résulte de IV.2.1(a) et de $(\mathrm{IV.2.1(a)})^{***}$;

(b) résulte de V.1.1 et de $(\mathrm{V.1.1})^{***}$;

(c) résulte de IV.2.1(h) ;

(d) $aa^o \leqslant b^ob \vee B \iff aa^o \vee B \leqslant b^ob \vee B \iff I'(a^o) \leqslant I'(b) \iff baa^o \leqslant b$ d'après (COIM-iv). On conclut d'après IV.1.9.

(e) $a^ox \wedge A \leqslant a^oa \wedge A \leqslant a^oa$ (IV.2.1(b)). La deuxième formule est 2-duale.

Exemple. - Tout treillis modulaire à élément minimum, où l'union $\vee$ coïncide avec le produit, est une catégorie bimodulaire.

PROPOSITION V.4.2. - Toute catégorie à involution vérifiant (IM-i) à (IM-iv), (COIM-i) à (COIM-iv), et aux conditions V.4.1(d) et V.4.1(d^{***}) est bimodulaire.

Démonstration. - $aa^o \leqslant b^o b \vee B \iff b \geqslant baa^o$. Si on a V.4.1(d), E est modulaire, d'après V.3.4, puisque tout morphisme est régulier, donc bimodulaire par dualité si V.4.1(d^{***}) est vérifiée.

5. Conoyaux réflexifs.

Dans une catégorie vérifiant (COIM-i) à (COIM-iv), on peut définir une notion 3-duale de la notion de noyau entier, en supposant vérifié l'axiome :

(COK-i) Pour tout objet A de E , il existe dans $\mathrm{Hom}(A, A)$ un élément maximum $W(A)$ qui est nécessairement une équivalence.

Le conoyau réflexif de $a = BaA$ sera alors l'équivalence dans B , $K'(a)$ définie par $K'(a) = I'(W(A)\ a^o)$.

PROPOSITION V.5.1 (certaines propriétés 3-duales de V.2.1).

(a) $b \leqslant aa^o b \implies bW(B)b^o \leqslant aW(A)a^o \implies K'(b) \leqslant K'(a)$, et si E vérifie (IM-i) à (IM-iv), $I(a) \leqslant I(b) \implies K'(a) \leqslant K'(b)$;

(b) $a \in SD \iff K'(a) = W(B)$;

(c) $K'(ab) = I'(K'(b)\ a^o)$;

(d) $K'(ab) \leqslant K'(a)$;

(e) $b \in SD \implies K'(ab) = K'(a)$;

(f) $K'(b) \leqslant K'(b') \implies K'(ab) \leqslant K'(ab')$;

(g) $a \leqslant a' \implies K'(ab) \leqslant K'(a'b)$.

PROPOSITION V.5.2. - Dans une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-iv), (COIM-i) à (COIM-iv), (K-i) et (COK-i) :

(a) $K'(I(a)) = K'(a)$;

(a^{***}) $K(I'(a)) = K(a)$;

(b) $I(a) = I(a\ W(A))$, $I'(a) = I'(w(B)\ a)$;

(c) Si u est entier symétrique idempotent, $uW(A)u$ est idempotent ;

(c^{***}) Si q est une équivalence, $qw(A)q$ est idempotent ;

(d) Si q est une équivalence $q \leqslant K'(K(q))$ et $I'(a) \leqslant K'(K(a))$;

(d^{***}) Si u est entier, symétrique, idempotent $K(K'(u)) \leqslant u$ et $K(K'(a)) \leqslant I(a)$.

Démonstration. - (a) et (a^{***}) résultent de V.3.3(d) ;

(b) $a \leqslant a(W(A))$ entraîne $I(a) \leqslant I(aW(A))$, l'inclusion 2-duale résulte de V.1.2(d). La deuxième égalité est 3-duale ;

(c) Formons $p = uW(A)uuW(A)u$, alors $u \leqslant A \implies p \leqslant uW(A)u$, et

$$A \leqslant W(A) \implies u^3 W(A)u = uW(A)u \leqslant p ;$$

(d) On a

$$K'K(q) = K'(I(qw(A))) = K'(qw(A)) \qquad \text{(d'après (a))} ,$$

et

$$K'K(q) = I'(W(A)\ w(A)q) \geqslant I'(w(A)q) = I'(q) \qquad \text{(d'après (b))} .$$

Si q est une équivalence $I'(q) = q$ et $q \leqslant K'K(q)$. Si a est un élément quelconque, et $I'(a) = q$, on a $I'(a) \leqslant K'KI'(a) = K'K(a)$ d'après (a).

PROPOSITION V.5.3.

(a) Dans une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-iv), (K-i), (COK-i), (COIM-i) à (COIM-iv), les trois axiomes (K-ii), (K-ii'), (K-ii") sont équivalents :

(K-ii) Si q et r sont deux équivalences, $K(q) \leqslant K(r) \implies q \leqslant r$;

(K-ii') $K(a) \leqslant K(b) \iff I'(a) \leqslant I'(b)$;

(K-ii") $K(a) \leqslant K(b) \iff ba^{\circ}a \leqslant b$.

(b) Il existe des catégories bimodulaires (donc vérifiant (IM-i) à (IM-iv), (COIM-i) à (COIM-iv), (K-i) et (COK-i)) ne vérifiant pas (K-ii).

Démonstration.

(a) (K-ii') $\iff$ (K-ii") (V.3.2(j)) ;

(K-ii) $\implies$ (K-ii') : Supposons (K-ii) et $K(a) \leqslant K(b) \iff K(I'(a)) \leqslant K(I'(b))$ (V.5.2(a^{***}) $\implies I'(a) \leqslant I'(b)$ (K-ii) .

(K-ii') $\implies$ (K-ii) : Si q et r sont deux équivalences dans A ,

$$K(q) \leqslant K(r) \implies I'(q) = q \leqslant I'(r) = r .$$

(b) Supposons que le treillis modulaire de l'exemple V.4.1 possède un élément universel u , son élément nul étant A . On a $I(a) = A = K(a)$, $\forall\ a$. On a $I'(a) = a$ et $K'(a) = u$, $\forall\ a$, et l'axiome (K-ii) n'est pas vérifié.

PROPOSITION V.5.4. - Soit une catégorie à involution vérifiant (IM-i) à (IM-iv), (COIM-i) à (COIM-iv), (K-i), (K-ii), (COK-i), ainsi que les axiomes :

(K-iii) Pour tout morphisme entier u, symétrique, idempotent, il existe une équivalence q telle que $K(q) = u$.

(COK-iii) Pour toute équivalence q, il existe un entier, symétrique, idempotent u, tel que $q = K'(u)$.

(a) $u = K(q) \iff q = K'(u)$ (u entier, symétrique, idempotent, q équivalence) ;

(b) $\forall\, a \in E$, $I(a) = KK'(a)$, $I'(a) = K'K(a)$;

(c) $K'(a) \leqslant K'(b) \iff I(a) \leqslant I(b) \iff a \leqslant bb^o a$ (COK-ii) ;

(d) $W(A) = W(A)w(A)W(A)$ et $w(A) = w(A)W(A)w(A)$; $A = KW(A) = K'w(A)$;

(e) $W(A) = W(A)aW(A)$ et $w(A) = W(A)aw(A)$, $\forall\, a = AaA$;

(f) Le produit désignant la composition des fonctions, on a $I = KK'$, $I' = K'K$, $K'I = K'KK' = K'$, $KI' = KK'K$, $I^2 = I$, $I'^2 = I'$.

<u>Démonstration</u>.

(a) $u = K(q) \implies KK'u \leqslant u$ (V.5.2(d)) $\implies KK'u \leqslant K(q) \implies K'u \leqslant q$ (K-ii). Mais $q \leqslant K'Kq$ (V.5.2(d)) $\implies q \leqslant K'u$. Donc $q = K'u$.

Réciproquement, si $q = K'u$ et $u = Kr$ d'après (K-iii) (r équivalence), on a d'après ce qui précède $r = K'u = q$. Donc $u = Kq$.

(b) D'après (a), $u = KK'u$, $q = K'Kq$. Si $a \in E$ et $q = I'a$, $u = Ia$, on a $Ia = KK'Ia = KK'a$ (V.5.2(a)) et $I'a = K'K(I'a) = K'Ka$ (V.5.2(a^{***})).

(c) $K'a \leqslant K'b \iff K'Ia \leqslant K'Ib$ (V.5.2(a)). Posons $K'Ia = q$, $K'Ib = r$, $Ia = u$, $Ib = v$. On a $u = Kq$, $v = Kr$ d'après (a), et $q \leqslant r \iff Kq \leqslant Kr$ d'après (K-ii), donc $K'a \leqslant K'b \iff Ia \leqslant Ib \iff a \leqslant bb^o a$ (V.1.2(j)).

(d) D'après (K-ii) et (a), il existe $K'A$ tel que $A = KK'A$. Mais si u est entier, symétrique, idempotent, $u \leqslant A \iff K'u = q \leqslant K'A$, et par suite $K'A$ est une équivalence maxima $K'A = W(A)$, et $K(W(A)) = A$.

On a $A = KW(A) = I(W(A)\, w(A)) \leqslant W(A)w(A)W(A)$ (V.1.2(e)), et par suite $W(A)\, A \leqslant W^2(A)w(A)W(a) \implies W(A) \leqslant W(A)w(A)W(A) \implies W(A) = W(A)w(A)W(A)$. Par 3-dualité, on a $A = K'w(A)$, $w(A) = w(A)W(A)w(A)$.

(e) $W(A) = W(A)w(A)W(A)$ et $w(A) \leqslant a \implies W(A) \leqslant W(A)aW(A) \implies W(A)aW(A) = W(A)$.

(f) résulte de V.5.4(b), V.5.2(a), V.1.2(c) et V.3.2(a).

Remarque. - On peut comparer avec les résultats correspondants sur les catégories exactes.

6. Immersion dans une catégorie modulaire.

Soit E' une catégorie vérifiant les conditions suivantes :

(i) E' a des limites projectives finies ;

(ii) Tout morphisme $a \in E'$ peut s'écrire sous la forme $a = me$, où m est un monomorphisme, e un épimorphisme, où $mE' = \mathrm{Im}(a)$ et $E'e = \mathrm{Coim}(a)$ sont déterminés de manière unique ;

(iii) Si $f_1 \overline{\wedge} f_2 = f_1 \ell_1 = f_2 \ell_2$ est un produit fibré, et si f_1 est un épimorphisme, ℓ_2 est un épimorphisme ;

(iv) E' est balancée.

Remarque. - La catégorie des ensembles, des groupes, une catégorie abélienne vérifient (i), (ii), (iii), (iv).

On appelle relation de E' tout sous-objet d'un produit direct $A \times B$. Si $r = (A \times B)mE'$, où m est un monomorphisme, et si p et p' sont les projections de $A \times B$ dans A et dans B, et si $pm = u$, $p'm = v$, $m = \binom{u}{v}$, nous poserons

$$r^o = \binom{v}{u}E' \quad ,$$

et r^o est sous-objet de $B \times A$. On a

(INV-i) $(r^o)^o = r$;

(INV-iii) $r \subseteq s \implies r^o \subseteq s^o$ (III.1).

Si $r = (A \times B)mE'$, $s = (B \times C)nE'$, nous poserons par définition :

$$(1) \qquad sr = (nE')(mE') = \mathrm{Im}(q(A \times n) \overline{\wedge} (m \times C))E' \quad ,$$

où q est la projection de $A \times B \times C$ dans $A \times C$, et où

$$A \times n = (A \times B \times C)(A \times n)(A \times Y) \quad , \qquad m \times C = (A \times B \times C)(m \times C)(X \times C)$$

sont les monomorphismes produits directs. Le produit sr défini par (1) est sous-objet de $A \times C$, donc une relation de E'.

PROPOSITION V.6.1. - Soit E' vérifiant (i), (ii), (iii), (iv) :

(a) Si r est un sous-objet de $A \times B$ et s un sous-objet de $B \times C$, on a

$$(2) \quad \binom{x}{y} \in sr \iff \exists\, e \text{ épimorphisme, et } z \text{ tels que } \binom{xe}{z} \in r \text{ et } \binom{z}{ye} \in s \ .$$

avec $x = AxX$, $y = CyX$, $z = BzX$, $e = XeX'$.

(b) Les relations de E' forment une catégorie modulaire E de produit défini par (1). Les objets de E sont de la forme $\binom{A}{A}E'$ où A est un objet de E' ; $r = \binom{a}{b} E' \in E$ est injectif à gauche, si, et seulement si, a est un monomorphisme, et surjectif à gauche si, et seulement si, a est un épimorphisme.

(c) Il existe un foncteur f bijectif (pleinement fidèle) de E' sur la sous-catégorie E'' des applications de E , défini par

$$f(a) = \binom{A}{a}E' \qquad (\ A \text{ source de } a\ ) .$$

Démonstration.

(a) Soit $sr = wE'$ défini par (1), et soit $\binom{x}{y} \in sr$. Alors, il existe z tel que $\binom{x}{y} = wz$, et si $r = mE'$, $s = nE'$, on a par définition $w = \mathrm{Im}(qw')$, avec $w' = (m \times C) \overline{\wedge} (A \times n)$. Donc $qw' = we'$, où $e' = \mathrm{Coim}(qw')$ est un épimorphisme (ii). Soit le produit fibré $z \overline{\wedge} e' = e'z = ze$, de z et e' . D'après (iii), e est un épimorphisme. Si, sous forme matricielle $m = (A \times B)\binom{a}{b}$, $n = (B \times C)\binom{c}{d}$, $w'z' = (A \times B \times C)\begin{pmatrix}a'\\ b'\\ c'\end{pmatrix}X'$, on a $w'z'E' \subseteq w'E' \subseteq (m \times C)E'$ et $\binom{a'}{b'}E' \subseteq \binom{a}{b}E' = r$, et de même $\binom{b'}{c'}E' \subseteq \binom{c}{d}E' = s$ .Mais

$$\binom{a'}{c'} = qw'z' = we'z' = wze = \binom{x}{y}e \implies a' = xe \ , \quad c' = ye \ ,$$

et il existe $z = b'$ tel que $\binom{xe}{z} \in r$ et $\binom{z}{ye} \in s$.

Réciproquement, supposons $\binom{xe}{z} \in r$, $\binom{z}{ye} \in s$. Alors $\begin{pmatrix}xe\\ z\\ ye\end{pmatrix}E' \in (m \times C)E'$, et de même $\begin{pmatrix}xe\\ z\\ ye\end{pmatrix}E' \subseteq (A \times n)E'$. Donc $\begin{pmatrix}xe\\ z\\ ye\end{pmatrix}E' \subseteq w'E'$, et par suite il existe z' , $\begin{pmatrix}xe\\ z\\ ye\end{pmatrix} = w'z'$, et $\binom{xe}{ye} = qw'z' = we'z' \implies \binom{xe}{ye}E' = \binom{x}{y}eE' \subseteq wE' = sr \Rightarrow \binom{x}{y} \in sr$.

On peut faire le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "z'"] \arrow[d, "e"] & {} \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "e'"] & A \times B \times C \arrow[d, "q"] \\
X \arrow[r, "z"'] & {} \arrow[r, "w"'] & A \times C
\end{tikzcd}$$

(b) En vertu de (a), le raisonnement est analogue à celui fait pour les relations binaires. On utilise que les épimorphismes forment une partie stable de E' , et que $\binom{xe}{ye} \in r \iff \binom{x}{y} \in r$; si e , e' , e'' sont des épimorphismes :

(α) Associativité : $\binom{x}{y} \in t(sr) \iff \exists\ e\ ,\ z\ ,\ \binom{xe}{z} \in sr$ et $\binom{z}{ye} \in t$

$\Longleftrightarrow \exists\, e\,,\, z\,,\, e'\,,\, z'\,,\ \binom{xee'}{z'} \in r$ et $\binom{z'}{ze'} \in s$, et $\binom{ze'}{yee'} \in t \Longrightarrow \binom{z'}{yee'} \in ts$ et $\binom{xee'}{z'} \in r \Longrightarrow \binom{x}{y} \in (ts)r \Longrightarrow t(sr) \subseteq (ts)r$. De même $(ts)r \subseteq t(sr)$.

(β) Elément neutre : Si $r = (A \times B)mE'$, $\binom{x}{y} \in r\binom{A}{A}E' \Longleftrightarrow \exists\, e\,,\, z\,,$ $\binom{xe}{z} = \binom{Au}{Au}$ et $\binom{z}{ye} \in r \Longrightarrow z = Au = xe \Longrightarrow \binom{xe}{ye} \in r \Longrightarrow r \subseteq r\binom{A}{A}E'$.

Inversement, $\binom{x}{y} \in r \Longrightarrow x = av$, $y = bv$, et il existe $z = av$, $\binom{x}{z} = \binom{av}{av} \in \binom{A}{A}E'$ et $\binom{z}{y} = \binom{av}{bv} = \binom{a}{b}v \in r$, et $r \subseteq r\binom{A}{A}E'$. De même, on prouve $\binom{B}{B}E'r = r$.

(γ) Compatibilité de la relation d'ordre : Supposons $r \subseteq r'$, et soit $\binom{x}{y} \subseteq sr$. Alors, il existe z et e , $\binom{xe}{z} \in r$, donc $\binom{xe}{z} \in r'$ et $\binom{z}{ye} \in s$; donc $sr \subseteq sr'$.

(δ) Axiome (INV-ii) : $\binom{x}{y} \in (sr)^\circ \Longleftrightarrow \binom{y}{x} \in sr \Longleftrightarrow \exists\, z\,,\, e\,,\ \binom{ye}{z} \in r$ et $\binom{z}{xe} \in s \Longleftrightarrow \binom{xe}{z} \in s^\circ$ et $\binom{z}{ye} \in r^\circ \Longleftrightarrow \binom{x}{y} \in r^\circ s^\circ$.

(ε) Modularité : $\binom{x}{y} \in sr \wedge t \Longrightarrow \exists\, e\,,\, z\,,\ \binom{xe}{z} \in r$ et $\binom{z}{ye} \in s$ $\Longrightarrow \binom{xe}{ye} \in t$ et $\binom{ye}{z} \in s^\circ \Longrightarrow \binom{xe}{z} \in s^\circ t \wedge r \Longrightarrow \binom{x}{y} \in s(r \wedge s^\circ t)$.

(θ) Si $r = \binom{a}{b}E'$, $\binom{a}{b}$ est un monomorphisme. $\binom{x}{y} \in rr^\circ \Longrightarrow \exists\, z\,,\, e$ tels que $xe = bu$, $z = au = av$, $ye = bv$; $r \in IG \Longleftrightarrow x = y \Longleftrightarrow xe = ye$. Donc $r \in IG \Longleftrightarrow (au = av \Longrightarrow bu = bv) \Longleftrightarrow (au = av \Longrightarrow \binom{a}{b}u = \binom{a}{b}v)$ $\Longleftrightarrow (au = av \Longrightarrow u = v$, car $\binom{a}{b}$ est un monomorphisme). Donc $r \in IG$ si, et seulement si, a est un monomorphisme.

(φ) $r \in SD \Longleftrightarrow \binom{A}{A}E' \subseteq rr^\circ \Longleftrightarrow e = bu = bv$, $z = au = av$. Si b est un épimorphisme, il suffit de prendre $u = v$ neutres, $b = e$, $z = a$ et $r \in SD$. Si $r \in SD$, $e = bu$, e épimorphisme $\Longrightarrow b$ épimorphisme. Donc $r \in SD$ est équivalent à b épimorphisme.

(c) Comme $\binom{A}{a}$ est un monomorphisme, $f(a) = \binom{A}{a}E'$ est une relation, et comme A est un monomorphisme et un épimorphisme, d'après (b), $f(a)$ est une application de E . Montrons que f est un foncteur :

$f(A) = \binom{A}{A}E'$ est neutre dans E . Si $f(a) = \binom{A}{a}E'$, $f(b) = \binom{B}{b}E'$. On a $\binom{x}{y} \in f(b)f(a) \Longleftrightarrow \exists\, e$ et z , $xe = Au$, $z = au$, $z = Bv$, $ye = bv$ $\Longleftrightarrow xe = u$, $ye = bau \Longleftrightarrow \binom{xe}{ye} = \binom{u}{bau} = \binom{A}{ba}u \Longleftrightarrow \binom{x}{y} \in \binom{A}{ba}E' = f(ba)$.

$f(a) = f(b) \Longleftrightarrow \binom{A}{a}E' = \binom{A}{b}E' \Longrightarrow \binom{A}{a}A = \binom{A}{b}u \Longrightarrow u = A \Longrightarrow a = b$. Donc f est injectif, et si $\binom{a}{b}E'$ est une application de E , a est un épimorphisme et un monomorphisme, donc un isomorphisme (iv) et par suite

$$\binom{a}{b}E' = \binom{aa^{-1}}{bb^{-1}}E' = \binom{C}{ba^{-1}}E'$$

où C est la source de ba^{-1} et $\binom{a}{b}E' = f(ab^{-1})$, et donc f est surjectif.

PROPOSITION V.6.2. - Soit E' une catégorie vérifiant (i), (ii), (iii), (iv) de V.6.1, E la catégorie modulaire de ses relations et $r = \binom{a}{b}E' \in E$:

(a) On a $I(r) = \binom{\mathrm{Im}\ b}{\mathrm{Im}\ b}E'$

(b) E vérifie l'axiome (COK-i), avec $W(\binom{A}{A}E') = \binom{p}{p'}E'$, où p et p' sont les projections de $A \times A$ dans A.

(c) Si E' a un objet nul 0, E vérifie (K-i), avec $w(\binom{A}{A}E') = \binom{0(A\ ,\ 0)}{0(A\ ,\ 0)}E'$ et si E' admet des noyaux, $K(r) = \binom{a\ \mathrm{Ker}\ b}{a\ \mathrm{Ker}\ b}E'$.

(d) On suppose que $\mathrm{Hom}(A\ ,\ B)$ dans E' soit muni d'une structure de groupe additif, non nécessairement commutatif, le produit étant distributif à gauche par rapport à l'addition (en particulier E' peut être additive) : on a $\binom{x}{y} \in r$ et $\binom{x'}{y'} \in r \implies \binom{x - x'}{y - y'} \in r$.

(e) On suppose que E' est une catégorie abélienne :

(α) E est bimodulaire ;

(β) $I'(r) = \binom{a\ \mathrm{Ker}\ b}{0}E' \vee \binom{A}{A}E'$;

(γ) $K'(r) = \binom{\mathrm{Im}\ b}{0}E' \vee \binom{B}{B}E'$;

(δ) E vérifie les axiomes (K-ii), (K-iii).

<u>Démonstration</u>.

(a) $\binom{x}{y} \in rr^{o} \wedge \binom{B}{B}E' \implies \exists\ e\ ,\ xe = bu\ ,\ ye = bv$ (V.6.1(b-ε)) et $bu = bv$. Donc $\binom{xe}{ye} \in \binom{b}{b}E' \implies \binom{x}{y} \in \binom{\mathrm{Im}\ b}{\mathrm{Im}\ b}E'$ (ii).

Réciproquement, $\binom{\mathrm{Im}\ b}{\mathrm{Im}\ b} \in \binom{B}{B}E'$, et il existe $e' = \mathrm{Coim}(b)$, tel que $(\mathrm{Im}\ b)e' = b$, $\binom{b}{a} \in r^{o}$, et $\binom{a}{b} \in r$. Donc $\binom{\mathrm{Im}\ b}{\mathrm{Im}\ b} \in rr^{o}$.

(b) Si m est un monomorphisme de but $A \times A$, $m = \binom{x}{y} \implies x = pm\ ,\ y = p'm$ et $m = \binom{p}{p'}m \implies m \in \binom{p}{p'}E'$, et $\binom{p}{p'}$ est un monomorphisme en vertu de la définition du produit direct, et on vérifie immédiatement que $\binom{p}{p'}E'$ est une équivalence dans $A \times A$.

(c) $\binom{0(A\ ,\ 0)}{0(A\ ,\ 0)}$ est un monomorphisme de but $A \times A$, car $0(A\ ,\ 0)u$ n'existe que si u est un morphisme nul, et $\binom{0(A\ ,\ 0)}{0(A\ ,\ 0)} = \binom{AxX}{AyX}(0(X\ ,\ 0))\ \forall \binom{x}{y}$, montre que $\binom{0(A\ ,\ 0)}{0(A\ ,\ 0)}E' = w$ est minimum parmi les sous-objets de $A \times A$. On vérifie que c'est un morphisme entier, symétrique, idempotent (K-i). Supposons que E' admette des noyaux, $\binom{x}{y} \in r^{o}w \implies \exists\ e$ et $z\ ,\ xe = 0\ ,\ z = 0\ ,\ z = bu$,

$ye = au$. Donc $u = (\mathrm{Ker}\ b)v$. Mais $a\ \mathrm{Ker}\ b$ est un monomorphisme, car $(a\ \mathrm{Ker}\ b)t = (a\ \mathrm{Ker}\ b)t' \implies \binom{a}{b}(\mathrm{Ker}\ b)t = \binom{a}{b}(\mathrm{Ker}\ b)t' \implies t = t'$, car $\binom{a}{b}\mathrm{Ker}\ b$ est un monomorphisme, et par suite $r^o w \subseteq \binom{0}{a\ \mathrm{Ker}\ b}E'$, et inversement $\binom{0}{b\ \mathrm{Ker}\ b} \in w$ et $\binom{b\ \mathrm{Ker}\ b}{a\ \mathrm{Ker}\ b} \in r^o \implies \binom{0}{a\ \mathrm{Ker}\ b} \in r^o w$. Donc $r^o w = \binom{0}{a\ \mathrm{Ker}\ b}E'$ et par suite, (a), $K(r) = I(r^o w) = \binom{a\ \mathrm{Ker}\ b}{a\ \mathrm{Ker}\ b}E'$.

(d) $\binom{x}{y} \in r \implies x = at$, $y = bt$; $\binom{x'}{y'} \in r \implies x' = at'$, $y' = bt'$. Donc

$$x - x' = a(t - t') , \quad y - y' = b(t - t) \implies \binom{x - x'}{y - y'} = \binom{a}{b}(t - t') \in r .$$

(e) Soient $(r , s , t) \in E^3$, avec $r = \binom{a}{b}E'$, $s = \binom{c}{d}E'$, $t = \binom{f}{g}E'$. Le treillis des sous-objets de $A \times B$ est modulaire.

(α) Supposons $\binom{x}{y} \in (r \vee ts^o)s$. D'après V.6.1, il existe e , e' , z tels que $xe = cu$, $z = du$, $ze' = au' + h$, $yee' = bu' + k$, avec $\binom{h}{k} \in ts^o$. Donc il existe e'' et z' tels que $he'' = du''$, $z' = cu'' = fu'''$, $ke'' = gu'''$. Mais $ze'e'' = au'e'' + du'' = due'e'' \implies ze'e'' - du'' = d(ue'e'' - u'') = au'e''$ (1) .

On a aussi $c(ue'e'' - u'') = cue'e'' - fu''' = xee'e'' - fu'''$ et $yee'e'' - gu''' = bu'e''$. Donc $\binom{xee'e'' - fu'''}{yee'e'' - gu'''} \in rs$, car il existe $z'' = d(ue'e'' - u'') = au'e''$, tel que $\binom{xee'e'' - fu'''}{z''} \in s$ et $\binom{z''}{yee'e'' - gu'''} \in r$. Donc $\binom{xee'e''}{yee'e''} \in rs \vee t$.

(β) $\binom{x}{y} \in I'(r) = r^o r \vee \binom{A}{A}E' \implies \exists\ e , e'$ tels que $\binom{xe}{ye} = \binom{x'}{y'} + \binom{h}{h}$, avec $x'e' = au$, $z = bu = bu'$, $y'e' = au'$. Donc

$$\binom{x'e'}{y'e'} = \binom{au - au'}{au' - au'} + \binom{au'}{au'} = \binom{a(u - u')}{0} + \binom{k}{k} .$$

Mais $b(u - u') = 0 \implies (u - u') = (\mathrm{Ker}\ b)v$, et $\binom{x}{y} \in \binom{a\ \mathrm{Ker}\ b}{0}E' \vee \binom{A}{A}E'$.

Réciproquement, $z = b\ \mathrm{Ker}\ b = b.0 = 0$, $\binom{b.0}{a.0} \in r^o$ et $\binom{a\ \mathrm{Ker}\ b}{b\ \mathrm{Ker}\ b} \in r$ entraînent $\binom{a\ \mathrm{Ker}\ b}{0} \in r^o r$, et $\binom{a\ \mathrm{Ker}\ b}{0}E' \vee \binom{A}{A}E' \subseteq I'(r)$.

(γ) $\binom{x}{y} \in Wr^o \iff \exists\ e , z$ tels que $xe = bu$, $z = au = pv$, $ye = p'v$. D'après la définition du produit direct $z = pv$, $ye = p'v$ est réalisé $\forall\ (z , y)$. Donc y est arbitraire et $\binom{x}{y} \in \binom{(\mathrm{Im}\ b)p}{p'}E'$.

Réciproquement, $\binom{(\mathrm{Im}\ b)p}{p'} \in Wr^o$ car $\mathrm{Coim}\ b$: $p = x$ est un épimorphisme, et $\mathrm{Coim}\ b = px$, $\binom{(\mathrm{Im}\ b)px}{a} \in r^o$, et $\binom{a}{p'x} = \binom{p}{p'}y \in W$. Donc $Wr^o = \binom{(\mathrm{Im}\ b)p}{p'}E'$ et, (a), $K'(r) = I'(Wr^o) = \binom{(\mathrm{Im}\ b)p\ \mathrm{Ker}\ p'}{0}E' \vee \binom{B}{B}E' = \binom{\mathrm{Im}\ b}{0} \vee \binom{B}{B}E'$.

(δ) On déduit de (β) et (γ) si $s = \binom{c}{d}E' \in E$:

$$K(r) \subseteq K(s) \iff \begin{pmatrix} a\ \mathrm{Ker}\ b \\ a\ \mathrm{Ker}\ b \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} c\ \mathrm{Ker}\ d \\ c\ \mathrm{Ker}\ d \end{pmatrix} E' \iff a\ \mathrm{Ker}\ b \in (c\ \mathrm{Ker}\ d)E' \quad .$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a\ \mathrm{Ker}\ b \\ 0 \end{pmatrix}E' \vee \binom{A}{A}E' = I'(r) \subseteq \begin{pmatrix} c\ \mathrm{Ker}\ d \\ 0 \end{pmatrix}E' \vee \binom{A}{A}E' = I'(s) \Longrightarrow sr^{o}r \subseteq s$$

$\Longrightarrow K(r) \subseteq K(s)$ ce qui établit (K-ii") (V.2.1(a), V.3.2(j) et V.5.3).

On a $KK'(r) = K(\begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ b \\ 0 \end{pmatrix}E' \vee \binom{A}{A}E')$. Tout élément de $K'(r)$ se présente sous la forme $\begin{pmatrix} (\mathrm{Im}\ b)x + y \\ y \end{pmatrix}$, et comme x et y sont arbitraires, on peut poser $\binom{x}{y} = \binom{p}{p'}z$, et le monomorphisme qui engendre $K'(r)$ est $\begin{pmatrix} (\mathrm{Im}\ b)p + p' \\ p' \end{pmatrix}$ et par suite, on a

$$KK'(r) = \begin{pmatrix} ((\mathrm{Im}\ b)p + p')\ \mathrm{Ker}\ p' \\ ((\mathrm{Im}\ b)p + p')\ \mathrm{Ker}\ p' \end{pmatrix}E' = \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ b \\ \mathrm{Im}\ b \end{pmatrix}E' = I(r) \quad .$$

Si r est entier, symétrique, idempotent, $I(r) = r$, et $r = K(K'(r)) = K(I'K'(r))$, où $I'K'(r)$ est une équivalence (V.5.2(a^{***})), ce qui vérifie l'axiome (K-iii).

Remarques. - On peut vérifier que $K'(r)$ et $I'(r)$ sont des équivalences. Si m est un monomorphisme, $r = \binom{m}{0}E' \vee \binom{A}{A}E'$ est bien symétrique, car $\binom{x}{y} \in r \Longrightarrow xe = mh + k$, $ye = k \iff xe = xe$, $ye = -mh + xe$, et $\binom{ye}{xe} = \binom{m}{0}(-h) + \binom{A}{A}xe \in r$, ce qui prouve que r est bien symétrique (cf. V.4.1(c)).

On peut montrer que les axiomes (IM-i) à (IM-iv), (K-i) et (K-ii") sont suffisants pour définir de manière satisfaisante une homologie. L'axiome (K-ii") qui n'est pas vérifié dans la catégorie E des relations binaires, par exemple, est admis d'emblée par PUPPE [4], et MAC-LANE [3] part, de même, de l'hypothèse que tous les morphismes de E sont réguliers, ce qui restreint également le champ d'application de la théorie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LÉVY-BRUHL (Jacques). - Demi-groupes et catégories à involution, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 19e année, 1965/66, n° 9, 48 p.

[2] LÉVY-BRUHL (Jacques). - Sur les notions d'image, noyau, coimage, conoyau, C. R. Acad. Sc. Paris, série A, t. 262, 1966, p. 1381-1384.

[3] MACLANE (Saunders). - An algebra of additive relations, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 47, 1961, p. 1043-1051.

[4] PUPPE (Dieter). - Korrespondenzen in abelschen Kategorien, Math. Annalen, t. 148, 1962, p. 1-30.