Jacques Grappy

Anneaux quasi-frobéniusiens

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, nº 2 (1967-1968), exp. nº 10, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, nº 10

29 janvier 1968

ANNEAUX QUASI-FROBÉNIUSIENS

par Jacques GRAPPY

1. Rappels sur les anneaux quasi-frobéniusiens.

FROBÉNIUS étudia le premier les algèbres A de dimension finie sur un corps K, telles que les modules A_s et $(A_d)^*$ soient isomorphes (A_s (resp. A_d) désigne A, muni de sa structure de A-module à gauche (resp. à droite)).

Si, pour toute partie X de A, on note $\ell(X)$ (resp. $r(X)$) l'annulateur à gauche (resp. à droite) de X dans A, on montre [14] que cette définition équivaut à :

$$\ell(r(L)) = L , \qquad r(\ell(R)) = R ,$$

$$[r(L) : K] + [L : K] = A : K , \qquad [\ell(R) : K] + [R : K] = [A : K] ,$$

pour tout idéal à gauche (resp. à droite) L (resp. R) de A. De telles algèbres sont appelées frobéniusiennes.

Une algèbre quasi-frobéniusienne sera telle que A_s et $(A_d)^*$ aient les mêmes types de sous-modules indécomposables. On montre [14] que cela équivaut à

$$\ell r(L) = L , \qquad r(\ell(R)) = R .$$

A. Anneaux quasi-frobéniusiens. - Ils furent introduits par NAKAYAMA [14].

DÉFINITION 1.1. - Un anneau A unitaire est quasi-frobéniusien, si :

1° A est artinien ;

2° $r\ell(R) = R$, $\ell R(L) = L$, pour tout idéal à gauche (resp. à droite) L (resp. R) de A.

La condition 2° implique que les treillis des idéaux à gauche et à droite sont anti-isomorphes. On peut donc remplacer le 1° par noethérien à gauche (ou à droite).

De nombreuses caractérisations ont été données.

Considérons les conditions suivantes :

(a) Tout homomorphisme d'un idéal à gauche de A dans A est réalisé par une multiplication à droite ;

(b) $r(I_1 \cap I_2) = r(I_1) + r(I_2)$, pour des idéaux à gauche ;

(c) $r(\ell(R)) = R$, pour tout idéal à droite R .

La condition (x^*) désignera la condition (x) pour les idéaux de type fini.

IKEDA et NAKAYAMA [9] ont prouvé les implications :

$$(a) \Longrightarrow ((b) \text{ et } (c^*)) \Longrightarrow (a^*) .$$

Cela permet de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1 (IKEDA [8] , IKEDA et NAKAYAMA [9] , EILENBERG et NAKAYAMA [4]). - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° A est quasi-frobéniusien ;

2° A est noethérien à gauche, et vérifie (b) et (c) ;

3° A est noethérien à gauche et auto-injectif à gauche ;

4° A est artinien à gauche et auto-injectif à gauche ;

5° A est artinien à droite et auto-injectif à gauche.

FAITH [5] a complété ces caractérisations par :

6° A est noethérien à droite et auto-injectif à gauche.

La définition étant symétrique, on peut bien sûr obtenir d'autres caractérisations en permutant gauche et droite.

Des conditions d'un autre type ont été données :

7° (NORITA et TACHIKAWA [13]). Le dual d'un A-module à gauche (resp. à droite) simple est un A-module à droite (resp. à gauche) simple, et A est artinien.

8° (DIEUDONNÉ [3]). A est noethérien à gauche et à droite, et $M \longrightarrow M^*$ est une "parfaite dualité" pour les A-modules de type fini, c'est-à-dire que $M \longrightarrow M^*$ est un foncteur exact contravariant, et $M \simeq M^{**}$ pour les A-modules à gauche (resp. à droite) de type fini.

Récemment, FAITH [5] a complété par :

9° Tout A-module à gauche projectif est injectif.

Nous nous proposons de présenter une dernière caractérisation, due à FAITH et WALKER [6] :

10° Tout A-module à gauche injectif est projectif.

Dans toute la suite, A sera un anneau unitaire. Pour tout A-module à gauche

M , on notera $E_A(M)$ son enveloppe injective, ou $E(M)$ si aucune confusion n'est à craindre.

B. Exemples d'anneaux quasi-frobéniusiens.

1° L'anneau $\underset{\sim}{Z}/m\underset{\sim}{Z}$, ou plus généralement le quotient d'un anneau principal par un idéal propre. Comme cas particulier, signalons l'algèbre $K[T]$, où K est un corps, et T un opérateur linéaire sur un K-espace vectoriel de dimension finie.

2° L'algèbre $K[G]$ d'un groupe fini est frobéniusienne [2].

3° Si A est quasi-frobéniusien, l'anneau $A[G]$ (G groupe fini) l'est aussi.

4° Un anneau semi-simple.

5° L'anneau des matrices $M_n(A)$ sur un anneau A quasi-frobéniusien.

6° Un anneau commutatif, local, artinien, co-irréductible (c'est-à-dire dont le socle est réduit à un élément).

7° Par contre, une image homomorphe d'un anneau quasi-frobéniusien ne l'est pas nécessairement.

2. Une caractérisation des anneaux noethériens à gauche.

DÉFINITION 2.1. - Soit c un cardinal. On dira qu'un A-module à gauche est de type c , s'il possède un système générateur de cardinal inférieur ou égal à c .

Rappelons les résultats suivants :

PROPRIÉTÉ 2.1. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° A est noethérien à gauche ;

2° Toute somme directe de A-modules à gauche injectifs est un A-module à gauche injectif ([1], [15]) ;

3° Tout A-module à gauche injectif est somme directe d'injectifs indécomposables ([11], [15]).

THÉORÈME 2.1. - A est un anneau noethérien à gauche si, et seulement si, il existe un cardinal c tel que tout A-module à gauche injectif soit somme directe de A-modules à gauche de type c .

Condition nécessaire. - D'après la propriété 2.1, il suffit de montrer qu'il existe un cardinal c tel que, pour tout module injectif indécomposable M , on ait $\operatorname{Card}(M) \leqslant c$. On a $M = E(C)$, où C est un sous-module monogène. Or, les types de A-modules à gauche monogènes forment un ensemble (car $C \simeq A/I$), et il en est donc de même pour les types de A-modules à gauche injectifs indécomposables. Soit $\{M_i\}_{i\in I}$ un ensemble de représentants. Posant $c_i = \mathrm{Card}(M_i)$, il suffit de prendre $c = \sum_{i\in I} c_i$.

Réciproque. - Montrons que, si $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, où les M_i sont des A-modules à gauche injectifs, alors M est injectif. On peut supposer que chaque M_i est de type c d'après l'hypothèse, que $c \geqslant \mathrm{Card}(A)$, et que c et $d = \mathrm{Card}\, I$ sont infinis.

Soit B un ensemble tel que $\mathrm{Card}(B) \geqslant 2^{cd}$. Posons :

$$N_i = \prod_{b\in B} M_{i,b} , \quad \text{où} \quad M_{i,b} \simeq M_i , \qquad P = \prod_{i\in I} N_i \ .$$

P est injectif, donc $P = \bigoplus_{g\in G} Q_g$, où Q_g est de type c . Supposons I bien ordonné, et soit 1 son premier élément. Soit $b_1 \in B$. Tout élément de M_{1,b_1} est contenu dans une somme directe finie de Q_g . Puisque M_{1,b_1} est de type c , on a

$$M_{1,b_1} \subseteq P_1 = \bigoplus_{g\in G_1} Q_g , \qquad \text{avec} \quad \mathrm{Card}(G_1) \leqslant c \ .$$

Montrons, par récurrence transfinie, que, pour tout $\alpha \in I$, il existe des parties G_α de G , deux à deux disjointes, avec $\mathrm{Card}(G_\alpha) \leqslant c$, et que $P_\alpha = \bigoplus_{g\in G_\alpha} Q_g$ contienne un sous-module M'_{α,b_α} isomorphe à M_{α,b_α} .

Pour cela, supposons la propriété vraie pour tout $\gamma < \alpha$. Posons

$$H_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} G_\gamma , \qquad S_\alpha = \bigoplus_{g\in H_\alpha} Q_g = \bigoplus_{\gamma<\alpha} P_\gamma \ .$$

P_γ est de type c , et $\mathrm{Card}\, H_\alpha \leqslant cd$. Donc $\mathrm{Card}\, S_\alpha \leqslant cdc = cd$. Par suite, S_α a au plus 2^{cd} sous-ensembles. Les $M_{\alpha,b} \cap S_\alpha$, $b \in B$, sont des sous-modules de S_α distincts ou nuls. Puisque $\mathrm{Card}\, B > 2^{cd}$, il existe $b_\alpha \in B$ tel que

$$M_{\alpha,b_\alpha} \cap S_\alpha = 0 \ .$$

Soit φ la projection de M_{α,b_α} dans $\bigoplus_{g\notin H_\alpha} Q_g$ parallèlement à S_α . φ est injective, et $M'_{\alpha,b_\alpha} = \varphi(M_{\alpha,b_\alpha})$ est isomorphe à M_{α,b_α} . Un argument semblable à celui utilisé au début montre que

$$M'_{\alpha,b_\alpha} \subseteq P_\alpha = \bigoplus_{g\in G_\alpha} Q_g , \qquad \mathrm{Card}(G_\alpha) \leqslant c , \quad \text{et} \quad G_\alpha \cap G_\gamma = \emptyset , \quad \forall\, \gamma < \alpha \ .$$

Posant $H = \cup G_\alpha$, on a

$$P = (\bigoplus_{\alpha\in I} P_\alpha) \oplus (\bigoplus_{g\in H} Q_g) \quad .$$

M'_{α,b_α}, étant injectif, est facteur direct de P_α, et $\bigoplus_{\alpha\in I} M'_{\alpha,b_\alpha}$ est facteur direct de P, donc injectif puisque P est injectif. Alors $M \simeq \bigoplus_{\alpha\in I} M'_{\alpha,b_\alpha}$ est injectif.

COROLLAIRE 2.1. - A <u>est noethérien à gauche si, et seulement si, il existe un cardinal</u> d <u>tel que tout</u> A-<u>module à gauche injectif soit somme directe des enveloppes injectives de modules de type</u> d .

La condition est nécessaire, par la propriété 2.1.

Réciproquement, soit L un A-module à gauche libre de rang d. Tout injectif est somme directe de $E(L/K)$, K sous-module de L. Les L/K forment un ensemble. Il suffit de prendre $c = \sum_K c_K$, où $c_K = \text{Card } E(L/K)$, et d'appliquer le théorème 2.1.

COROLLAIRE 2.2. - <u>Si tout</u> A-<u>module à gauche injectif est somme directe de modules injectifs indécomposables,</u> A <u>est noethérien à gauche</u>.

En effet, tout injectif indécomposable est enveloppe injective d'un sous-module monogène.

3. Enveloppes injectives de type fini.

LEMME 3.1. - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien à gauche semi-premier. Si</u> $E(A)$ <u>est de type fini,</u> $A = E(A)$, <u>et par suite</u> A <u>est un anneau semi-simple</u>.

D'après le théorème de Goldie [7], il suffit de montrer que A coïncide avec son anneau de fractions à gauche $Q = E(A)$. Q est un A-module à gauche noethérien. Soit b régulier dans A. On a

$$A \subseteq Ab^{-1} \subseteq \dots \subseteq Ab^{-n} \subseteq \dots$$

Il existe n tel que $Ab^{-n} = Ab^{-(n+1)}$. Alors $b^{-(n+1)} = ab^{-n}$, $a \in A$, d'où $b^{-1} \in A$, et $A = Q$.

THÉORÈME 3.1. - <u>Soient</u> A <u>un anneau noethérien à gauche,</u> N <u>son idéal nilpotent maximum</u>. <u>Si</u> $E_A(A/N)$ <u>est de type fini sur</u> A, <u>alors</u> R <u>est artinien à gauche</u>.

Soit $Q = E_{A/N}(A/N)$. Q est aussi un A-module, extension essentielle du A-module A/N, et par suite $Q \subseteq E_A(A/N)$. D'après l'hypothèse, Q est donc un A-module de type fini, donc un (A/N)-module de type fini. Le lemme 3.1 montre que A/N est un anneau semi-simple. A est donc semi-primaire et noethérien à gauche. Il est, par suite, artinien à gauche.

COROLLAIRE 3.1. - Soit A un anneau noethérien à gauche tel que l'enveloppe injective de tout A-module à gauche monogène soit de type fini. Alors A est artinien à gauche.

PROPOSITION 3.1. - Soient a et b deux cardinaux, $a > b$, et C un A-module à gauche de type b tel que $E(C)$ soit contenu dans une somme directe de modules de type $< a$.

(a) Si $a = \aleph_0$, $E(C)$ est de type fini ;

(b) Si $b \geqslant \aleph_0$, $E(C)$ est de type a.

On a $E(C) \subseteq \bigoplus_{i \in I} M_i$, où M_i est de type a. Tout générateur de C est contenu dans une somme directe finie, et par suite

$$C \subseteq M = \bigoplus_{i \in I'} M_i \quad .$$

Si $b < \aleph_0$, alors $c = \mathrm{Card}(I') < \aleph_0$.
Si $b \geqslant \aleph_0$, alors $c = \mathrm{Card}(I') = b$.

Soit φ la projection de $\bigoplus_{i \in I} M_i$ sur M. $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap C = (0)$ implique

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \cap E(C) = (0) \quad ,$$

et $\varphi(E(C))$ est isomorphe à $E(C)$.

Si $a = \aleph_0$, alors $b < \aleph_0$ et $c < \aleph_0$. M est de type fini, donc $\varphi(E(C))$, qui est facteur direct, est de type fini.

Si $b \geqslant \aleph_0$, alors $c = b$, M est de type a, et aussi $\varphi(E(C))$.

COROLLAIRE 3.2. - Soit A un anneau. Tout A-module à gauche projectif, injectif, et indécomposable, est isomorphe à un facteur direct de A.

Soit M un tel module. $M = E(C)$, où C est monogène. M, étant projectif, est contenu dans une somme directe de modules isomorphes à A. D'après la proposition, on a donc $E(C) \subseteq A_1 \oplus \dots \oplus A_n$, $A_i \simeq A$. Soit k le plus petit entier tel que A^k contienne un sous-module N isomorphe à M. $A^k = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$, $A_i \simeq A$. N étant co-irréductible, on ne peut avoir $N \cap A_i \neq (0)$, $\forall\, i$, sinon $N \cap A_i \cap N \cap A_j \neq (0)$. Supposons $N \cap A_k = 0$, alors la projection φ de A^k sur $A_1 \oplus \dots \oplus A_{k-1}$, parallèlement à A_k, injecte N dans A^{k-1}. On a donc $k = 1$.

4. Caractérisation des modules artiniens à gauche.

On utilisera un théorème de Kaplansky [10].

THÉORÈME 4.1. - *Si un A-module à gauche M est somme directe de modules de type dénombrable, alors tout facteur direct de M a la même propriété.*

THÉORÈME 4.2. - *Si tout A-module à gauche est contenu dans une somme directe de modules de type fini, A est artinien à gauche.*

Soit M un A-module à gauche injectif. M est facteur direct d'une somme directe de modules de type fini. D'après le théorème 4.1, M est somme directe de modules de type dénombrable. Le théorème 2.1 prouve que A est noethérien à gauche.

Soit C un module monogène. $E(C)$, étant contenu dans une somme directe de modules de type fini, est de type fini, d'après la proposition 3.1. Le corollaire 3.1 implique que A est artinien à gauche.

COROLLAIRE 4.1. - *Soit A un anneau commutatif. A est artinien si, et seulement si, tout module injectif est somme directe de modules de type fini.*

En effet, tout injectif indécomposable sur A noethérien est de type fini [12].

La réciproque du théorème 4.2 n'est pas vraie, en général [16].

5. Cogénérateurs.

Soit $\mathfrak{M}$ la catégorie des A-modules à gauche.

DÉFINITION 5.1. - *Un A-module à gauche C est un cogénérateur dans $\mathfrak{M}$ si tout A-module à gauche M est isomorphe à un sous-module d'un produit de modules isomorphes à C.*

Cette définition équivaut à :

Pour tout homomorphisme $f \neq 0$, $f : M \dashrightarrow N$, $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{M})$, il existe

$$g : N \dashrightarrow C \quad \text{tel que} \quad g \circ f \neq 0 .$$

C injectif est un cogénérateur, si, et seulement si, il contient un sous-module isomorphe à tout module simple.

DÉFINITION 5.2. - *Un A-module à gauche G est un générateur dans $\mathfrak{M}$ si tout A-module à gauche M est le quotient d'une somme directe de modules isomorphes à G.*

Cette définition équivaut à :

Pour tout $f : M \dashrightarrow N$, $f \neq 0$, il existe $g : G \dashrightarrow M$, $f \circ g \neq 0$.

G projectif est générateur, si tout module simple est un quotient de G.

THÉORÈME 5.1. - Si A_s est un cogénérateur dans $\mathfrak{M}$, et si $A/\mathrm{rad}(A)$ est un anneau semi-simple, alors A est auto-injectif à gauche.

$J = \mathrm{rad}(A)$ est le radical de Jacobson de A.

Soient S un module à gauche simple, et f l'injection $f : S \dashrightarrow E(S)$. A_s étant cogénérateur, il existe $g : E(S) \dashrightarrow A$, $g \circ f \neq 0$. On a $\mathrm{Ker}(g) \cap f(S) = 0$, d'où $\mathrm{Ker}(g) = 0$.

A/J étant semi-simple, il n'y a qu'un nombre fini de types de A-modules à gauche simples. Soit $\{S_1, \ldots, S_n\}$ des représentants de ces types. On peut, d'après ce qui précède, supposer $E(S_i) \subseteq A$, et la somme des $E(S_i)$ est directe.

Soit $G = \bigoplus_{i=1}^{n} E(S_i)$. G est injectif, et projectif. $E(S_i)$ étant indécomposable et facteur direct de A, on a $E(S_i) = Ae_i$, où e_i est un idempotent primitif de A. Alors $E(S_i)/JE(S_i) = Ae_i/Je_i \simeq (A/J)\bar{e}_i$, où $\bar{e}_i$ est la classe de e_i dans A/J. A/J étant semi-simple, $(A/J)\bar{e}_i$ est un (A/J)-module semi-simple.

$$\mathrm{End}((A/J)\bar{e}_i) \simeq \bar{e}_i(A/J)\bar{e}_i \simeq e_i\, Ae_i/e_i\, Je_i .$$

Or, puisque Ae_i est injectif indécomposable, $\mathrm{End}(Ae_i) \simeq e_i\, Ae_i$ est un anneau local, dont le radical est $e_i\, Je_i$. $\mathrm{End}(A/J\,\bar{e}_i)$ est donc un corps, et par suite $(A/J)\bar{e}_i$ est un (A/J)-module simple, donc un A-module simple. De plus, $(A/J)\bar{e}_i \simeq (A/J)\bar{e}_j$ implique $Ae_i \simeq Ae_j$. Tout module simple est isomorphe à un $E(S_i)/JE(S_i)$, et est donc isomorphe à un quotient de G. G est un générateur dans $\mathfrak{M}$. Il existe un épimorphisme $\bigoplus_\alpha G_\alpha \dashrightarrow A_s$, où $G_\alpha \simeq G$. A_s, étant projectif, est isomorphe à un facteur direct de $\bigoplus_\alpha G_\alpha$, et l'on peut supposer cette somme directe finie. Or G est injectif, donc A_s est injectif à gauche.

6. Caractérisation des anneaux quasi-frobéniusiens.

PROPOSITION 6.1. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° Tout A-module à gauche monogène est contenu dans un module projectif ;

2° Tout idéal à gauche de A est l'annulateur à gauche d'une partie finie de A.

Alors tout A-module à gauche monogène est contenu dans un module libre de type fini.

1° implique 2° : - Soit I un idéal à gauche. A/I est un A-module à gauche monogène qui est contenu dans un module projectif, donc dans un module libre L, que l'on peut supposer de rang fini, $L \simeq A^n$. Soient 1 l'élément neutre de A, $\bar{1}$ sa classe dans A/I. $\bar{1} = (x_1, \dots, x_n) \in A^n$. Pour tout $a \in A$,

$$\bar{a} = (ax_1, \dots, ax_n) .$$

Il en résulte que $a \in I$ si, et seulement si, $ax_i = 0$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, et $I = \ell(\{x_1, \dots, x_n\})$.

2° implique 1°. - Tout A-module à gauche monogène est isomorphe à A/I. $I = \ell(\{x_1, \dots, x_n\})$. L'application $\bar{a} \dashrightarrow (ax_1, \dots, ax_n)$ injecte A/I dans A^n.

On démontre de même la proposition suivante :

PROPOSITION 6.2. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° Tout A-module à gauche monogène est contenu dans un produit de modules isomorphes à A_s ;

2° Tout idéal à gauche est un annulateur à gauche.

THÉORÈME 6.1. - Un anneau A est quasi-frobéniusien si, et seulement si, tout A-module à gauche injectif est projectif.

Condition nécessaire. - A étant noethérien, il suffit (propriété 2.1) de montrer que tout injectif indécomposable est projectif. Un tel module M s'écrit $M = E(C)$, où C est monogène. D'après la proposition 6.1, il existe un monomorphisme $C \dashrightarrow A_s^n$ qui s'étend, puisque A_s est injectif, en un monomorphisme $E(C) \dashrightarrow A_s^n$. $E(C)$ est donc projectif.

Réciproque. - La condition implique que tout A-module à gauche est contenu dans un module libre, donc dans une somme directe de A-modules à gauche monogènes. D'après le théorème 4.2, A est artinien à gauche. De plus, A_s est un cogénérateur, et $A/\mathrm{rad}(A)$ est semi-simple. Le théorème 5.1 prouve que A est auto-injectif à gauche, et par suite quasi-frobéniusien.

COROLLAIRE 6.1. - A est quasi-frobéniusien, si, et seulement si, A est artinien à gauche (ou à droite), et A_s est un cogénérateur de $\mathfrak{M}$.

THÉORÈME 6.2. - A est quasi-frobéniusien si, et seulement si, tout A-module à gauche injectif est somme directe de modules monogènes, chacun isomorphe à un idéal à gauche principal et indécomposable de A.

Cela résulte du corollaire 3.2 et du théorème 6.1.

COROLLAIRE 6.2. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° A est quasi-frobéniusien ;

2° Tout A-module est contenu dans un A-module libre.

COROLLAIRE 6.3. - A est quasi-frobéniusien si, et seulement si, A est noethérien à droite, et si A_s est un cogénérateur de $\mathfrak{M}$.

Si A_s est cogénérateur, d'après la proposition 6.2, tout idéal à gauche est un annulateur à gauche. Puisque A est noethérien à droite, il est alors artinien à gauche, et le corollaire 6.1 donne le résultat.

COROLLAIRE 6.4. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° A est quasi frobéniusien ;

2° Tout A-module à gauche (resp. à droite) monogène est contenu dans un module projectif ;

3° Tout idéal à gauche (resp. à droite) de A est l'annulateur à gauche (resp. à droite) d'une partie finie de A.

Les 2° et 3° sont équivalents d'après la proposition 6.1, et le 1° implique le 2° d'après le théorème 6.1.

Le 3° implique le 1°. Il suffit de prouver que A est noethérien. Soit I un idéal à gauche. $Q = r(I)$ est un idéal à droite, et $Q = r(J)$, où J est un idéal à gauche de type fini. Puisque tout idéal à gauche est annulateur à droite, il en résulte $I = J$. A est noethérien à gauche, et aussi à droite par le même argument.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHASE (Stephen U.). - Direct products of modules, Trans. Amer. math. Soc., t. 97, 1960, p. 457-473.

[2] CURTIS (Charles W.) and REINER (Irving). - Representation theory of finite groups and associative algebras. - New York, Interscience Publishers, 1962 (Pure and applied Mathematics, 11).

[3] DIEUDONNÉ (Jean). - Remarks on quasi-frobenius rings, Illinois J. of Math., t. 2, 1958, p. 346-354.

[4] EILENBERG (Samuel) and NAKAYAMA (Tadasi). - On the dimension of modules and algebras, II, Nagoya math. J., t. 9, 1955, p. 1-16.

[5] FAITH (Carl). - Rings with ascending condition on annihilators, Nagoya math. J., t. 27, 1966, p. 179-191.

[6] FAITH (Carl) and WALKER (Elbert A.). - Direct-sum of injective modules, J. of algebra, t. 5, 1967, p. 203-221.

[7] GOLDIE (A. W.). - Semi-prime rings with maximum condition, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 10, 1960, p. 201-220.

[8] IKEDA (Masatosi). - A characterization of quasi-frobenius rings, Osaka math. J., t. 4, 1952, p. 203-209.

[9] IKEDA (Masatosi) and NAKAYAMA (Tadasi). - On some characteristic properties of quasi-frobenius and regular rings, Proc. Amer. math. Soc., t. 5, 1954, p. 15-19.

[10] KAPLANSKY (I.) and COHEN (I. S.). - Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules, Math. Z., t. 54, 1951, p. 97-101.

[11] MATLIS (Eben). - Injective modules over noetherian rings, Pacific J. of Math., t. 8, 1958, p. 511-528.

[12] MORITA (Kiiti). - Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum conditions, Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A, t. 6, 1958, p. 83-142.

[13] MORITA (Kiiti) and TACHIKAWA (Kiroyuki). - Character modules, submodules of a free module, and quasi-frobenius rings, Math. Z., t. 65, 1956, p. 414-428.

[14] NAKAYAMA (Tadasi). - On frobeniusean algebras, Ann. of Math., 2nd series, t. 40, 1939, p. 611-633 ; t. 42, 1941, p. 1-21.

[15] PAPP (Zoltan). - On algebraically closed modules, Publ. Math., Debrecen, t. 6, 1959, p. 311-327.

[16] ROSENBERG (Alex) and ZELINSKY (Daniel). - Annihilators, Portug. Math., t. 20, 1961, p. 53-65.