Jean Ruedin

Axiomatique des treillis

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, nº 1 (1967-1968), exp. nº 9, p. 1-39

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_1_A9_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, n° 9

22 janvier 1968

AXIOMATIQUE DES TREILLIS

par Jean RUEDIN

0. Introduction.

Ce travail fait suite à une précédente étude sur les groupoïdes distributifs et l'axiomatique des treillis [2]. Rappelons qu'un groupoïde distributif est un groupoïde $E(T)$ satisfaisant aux axiomes de distributivité à gauche et de distributivité à droite :

(D.G) $$x \mathbin{T} (y \mathbin{T} z) = (x \mathbin{T} y) \mathbin{T} (x \mathbin{T} z)$$

(D.D) $$(x \mathbin{T} y) \mathbin{T} z = (x \mathbin{T} z) \mathbin{T} (y \mathbin{T} z)$$

Nous avons vu que, pour tout élément x d'un tel groupoïde $E(T)$, les éléments $x \mathbin{T} (x \mathbin{T} x)$ et $(x \mathbin{T} x) \mathbin{T} x$ sont égaux à un élément idempotent noté x^3, puis que, pour tous éléments x, y, z de $E(T)$, les éléments $x \mathbin{T} (y \mathbin{T} z)$ et $(x \mathbin{T} y) \mathbin{T} z$ sont des éléments idempotents égaux respectivement à $x^3 \mathbin{T} (y^3 \mathbin{T} z^3)$ et à $(x^3 \mathbin{T} y^3) \mathbin{T} z^3$.

Ces résultats nous ont conduit à une axiomatique des treillis réduite à six postulats indépendants, où les seuls axiomes d'absorption utilisés sont les axiomes d'absorption conditionnelle

(1) $x \vee z = z$ entraîne $z \wedge x = x$ (1') $x \wedge z = z$ entraîne $z \vee x = x$,

plus faibles que les axiomes d'absorption

(0) $(x \vee y) \wedge x = x$ (0') $(x \wedge y) \vee x = x$,

et présentant sur eux l'avantage d'être de forme implicative et de ne porter que sur des "couples exceptionnels" d'éléments du treillis. A côté de (0)(0'), (1)(1'), nous avons introduit les paires ipsoduales d'axiomes suivantes, respectivement de distributivité à gauche, de commutativité, de régularité à droite, d'associativité, d'idempotence, de distributivité à droite, de régularité à gauche :

(2)	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee (x \vee z)$	(2')	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge (x \wedge z)$
(3)	$x \vee y = y \vee x$	(3')	$x \wedge y = y \wedge x$
(4)	$x \vee (y \vee x) = y \vee x$	(4')	$x \wedge (y \wedge x) = y \wedge x$
(5)	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	(5')	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
(6)	$x \vee x = x$	(6')	$x \wedge x = x$
(7)	$(x \vee y) \vee z = (x \vee z) \vee (y \vee z)$	(7')	$(x \wedge y) \wedge z = (x \wedge z) \wedge (y \wedge z)$
(8)	$(x \vee y) \vee x = x \vee y$	(8')	$(x \wedge y) \wedge x = x \wedge y$

et nous avons montré que les ensembles d'axiomes $\{(1)(1')(2)(2')(3)(4')\}$ et $\{(1)(1')(7)(7')(3)(4')\}$ sont tous deux des ensembles d'axiomes indépendants pour les treillis. Il se posait alors la question de savoir discerner parmi tous les ensembles d'axiomes constitués de (1)(1') et de quatre autres axiomes choisis parmi les quatorze axiomes (2) .... (8), (2') ... (8') ceux qui sont des ensembles d'axiomes pour les treillis de ceux qui ne le sont pas. C'est à cette question que nous répondons dans la première partie de notre présente étude, où, à titre d'application, nous montrons également qu'il est possible d'établir une axiomatique des treillis réduite à cinq postulats indépendants sans utiliser d'autres axiomes que (0)(1)...(8) (0')(1')...(8') et où nous cherchons toutes les axiomatiques des treillis, de ce type.

Dans une deuxième partie, nous considérons, de plus, les axiomes

$$(9) \quad x \vee (y \vee z) = (y \vee x) \vee (z \vee x) \qquad (9') \quad x \wedge (y \wedge z) = (y \wedge x) \wedge (z \wedge x)$$

que nous appelons axiomes de pseudo-distributivité à gauche. Nous étudions la structure des groupoïdes pseudo-distributifs à gauche, ce qui nous permet d'établir une axiomatique des treillis réduite à cinq postulats indépendants, où les seuls axiomes d'absorption utilisés sont les axiomes d'absorption conditionnelle (1)(1'). Nous donnons toutes les axiomatiques des treillis, de ce type, n'utilisant pas d'autres axiomes que (1)...(8)(9) (1')...(8')(9').

1. Ensembles d'axiomes pour les treillis constitués de (1)(1') et de quatre axiomes choisis parmi les quatorze axiomes (2)...(8) (2')...(8').

Nous commençons par établir que quarante-quatre ensembles d'axiomes constitués de (1)(1') et de quatre autres axiomes choisis parmi les quatorze axiomes (2)...(8) (2')...(8') sont des ensembles d'axiomes pour les treillis. Nous montrons ensuite, à l'aide d'exemples et d'une classification sous forme de tableaux, que ces quarante-quatre ensembles sont constitués de six axiomes indépendants et que tous les autres ensembles d'axiomes constitués de (1)(1') et de quatre autres axiomes choisis parmi (2)...(8) (2')...(8') ne sont pas des ensembles d'axiomes pour les treillis.

THÉORÈME 1. - Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant aux six axiomes indépendants (1)(1')(7)(7')(4)(8').

Nous utilisons une série de lemmes :

LEMME 1. - Si un système de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfait à (1) et (8'), il satisfait à la condition : $x \vee z = z$ entraîne $x \wedge z = x$.

Soient a et b deux éléments d'un système $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant à (1) et (8') tels que $a \vee b = b$. D'après (1), il vient $b \wedge a = a$. Par suite, la condition (8') entraîne $a \wedge b = (b \wedge a) \wedge b = b \wedge a = a$.

LEMME 2. - Si un système de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfait à (1)(1')(4) et (8'), il satisfait à (6) et (6').

En effet, pour tout élément a d'un système $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant à (1)(1')(4) et (8'), nous obtenons successivement

$$a \vee (a \vee a) = a \vee a \qquad \text{d'après (4)}$$

$$a \wedge (a \vee a) = a \qquad \text{après application du lemme 1}$$

$$a \wedge a = [a \wedge (a \vee a)] \wedge a = a \wedge (a \vee a) = a \qquad \text{d'après (8')},$$

ce qui entraîne $a \vee a = a$ d'après (1').

LEMME 3. - Si un système de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfait à (1)(1')(7)(4) et (8'), il satisfait à l'identité

$$x \vee (x \vee y) = x \vee y .$$

En effet, si a et b sont deux éléments quelconques de $E(\vee , \wedge)$, il vient

$$\begin{aligned} [a \vee (a \vee b)] \vee (a \vee b) &= [a \vee (a \vee b)] \vee [b \vee (a \vee b)] && \text{d'après (4)} \\ &= (a \vee b) \vee (a \vee b) && \text{d'après (7)} \\ &= a \vee b && \text{par utilisation du lemme 2} \end{aligned}$$

$$[a \vee (a \vee b)] \wedge (a \vee b) = a \vee (a \vee b) \qquad \text{par utilisation du lemme 1.}$$

D'autre part, (4) entraîne $(a \vee b) \vee [a \vee (a \vee b)] = a \vee (a \vee b)$, soit, d'après (1),

$$[a \vee (a \vee b)] \wedge [a \vee b] = a \vee b \quad .$$

Ainsi $a \vee (a \vee b) = a \vee b$.

Soit maintenant un système de double composition $E(\vee , \wedge)$ vérifiant les axiomes (1)(1')(7)(7')(4) et (8'), et soient a et b deux éléments de E . Par utilisation du lemme 3 et de (1), il vient $(a \vee b) \wedge a = a$. D'autre part, (4) et (1) entraînent $(a \vee b) \wedge b = b$. Par suite,

$$\begin{aligned} b \wedge a = [(a \vee b) \wedge b] \wedge a &= [(a \vee b) \wedge a] \wedge (b \wedge a) && \text{d'après (7')} \\ &= a \wedge (b \wedge a) \\ &= (a \wedge a) \wedge (b \wedge a) && \text{par utilisation du lemme 2} \\ &= (a \wedge b) \wedge a && \text{d'après (7')} \\ &= a \wedge b && \text{d'après (8') .} \end{aligned}$$

$E(\vee , \wedge)$ vérifie (1)(1')(7)(7')(4) et (3'). D'après [2], théorème 7, $E(\vee , \wedge)$ est un treillis [1].

THÉORÈME 2. - Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant aux six axiomes indépendants (1)(1')(2)(7')(4)(8').

D'après les lemmes 1 et 2 du théorème 1, tout système $E(\vee , \wedge)$ vérifiant (1)(1')(2)(7')(4)(8') vérifie (6)(6') ainsi que l'identité

$$x \vee z = z \quad \text{entraîne} \quad x \wedge z = x \ .$$

Soient a et b deux éléments de E. Il vient

$$\begin{aligned}
a \vee b = (a \vee b) \vee (a \vee b) &= [(a \vee b) \vee a] \vee [(a \vee b) \vee b] && \text{d'après (6) et (2)} \\
&= [(a \vee b) \vee (a \vee a)] \vee [(a \vee b) \vee b] && \text{d'après (6)} \\
&= [a \vee (b \vee a)] \vee [(a \vee b) \vee b] && \text{d'après (2)} \\
&= (b \vee a) \vee [(a \vee b) \vee b] && \text{d'après (4)} \\
&= [(b \vee a) \vee (a \vee b)] \vee [(b \vee a) \vee b] && \text{d'après (2)} \\
&= [(b \vee a) \vee (a \vee b)] \vee [(b \vee a) \vee (b \vee b)] && \text{d'après (6)} \\
&= [(b \vee a) \vee (a \vee b)] \vee [b \vee (a \vee b)] && \text{d'après (2)} \\
&= [(b \vee a) \vee (a \vee b)] \vee (a \vee b) && \text{d'après (4)}
\end{aligned}$$

Par utilisation du lemme 1, il vient

$$[(b \vee a) \vee (a \vee b)] \wedge (a \vee b) = (b \vee a) \vee (a \vee b) \ .$$

Mais les conditions (4) et (1) entraînent

$$[(b \vee a) \vee (a \vee b)] \wedge (a \vee b) = a \vee b \ ,$$

ce qui montre que $(b \vee a) \vee (a \vee b) = a \vee b$ et que $(a \vee b) \vee (b \vee a) = b \vee a$ par interversion des rôles de a et b. Le lemme 1 et l'axiome (1) permettent alors d'écrire

$$(b \vee a) \wedge (a \vee b) = b \vee a \quad \text{et} \quad (b \vee a) \wedge (a \vee b) = a \vee b \ ,$$

ce qui montre finalement que $b \vee a = a \vee b$.

$E(\vee , \wedge)$ vérifie (3). Comme il vérifie (2), il vérifie (7). $E(\vee , \wedge)$ vérifie (1)(1')(7)(7')(4) et (8').

D'après le théorème 1, $E(\vee , \wedge)$ est un treillis.

---

[1] Comme nous l'avons annoncé, l'indépendance des six axiomes constituant chacun des ensembles d'axiomes explicités dans les théorèmes 1,2,⋯,9 sera montrée à l'aide d'exemples et d'une classification sous forme de tableaux situés après la démonstration du théorème 10.

THÉORÈME 3. - <u>Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition</u> $E(\vee , \wedge)$ <u>vérifiant les six axiomes indépendants (1)(1')(7)(7')(3)(5).</u>

Soient $E(\vee , \wedge)$ un système de double composition vérifiant (1)(1')(7)(7')(3)(5), et a et b deux éléments de E. Comme $E(\vee , \wedge)$ vérifie (3) et (7), $E(\vee)$ est un groupoïde distributif et, d'après le résultat ([2], théorème 1) rappelé dans l'introduction, a^3 et b^3 sont deux idempotents de $E(\vee)$, Posons $c = a^3 \vee b^3$. D'après le résultat ([2], corollaire 1, théorème 3) rappelé dans l'introduction, il vient

$$a \vee c = a \vee (a^3 \vee b^3) = a^3 \vee (a^3 \vee b^3)$$

et

$$b \vee c = b \vee (a^3 \vee b^3) = b^3 \vee (a^3 \vee b^3)$$

soit, d'après (5) et (3),

$$a \vee c = (a^3 \vee a^3) \vee b^3 = a^3 \vee b^3 = c$$

et

$$b \vee c = (a^3 \vee b^3) \vee b^3 = a^3 \vee (b^3 \vee b^3) = a^3 \vee b^3 = c \ .$$

La condition (1) entraîne donc $c \wedge a = a$ et $c \wedge b = b$, d'où il vient

$$\begin{aligned} a \wedge (b \wedge a) &= (c \wedge a) \wedge (b \wedge a) = (c \wedge b) \wedge a \qquad \text{d'après } (7') \\ &= b \wedge a \ . \end{aligned}$$

$E(\vee , \wedge)$ vérifie (1)(1')(7)(7')(3) et (4'). D'après le résultat de [2], théorème 7, $E(\vee , \wedge)$ est un treillis.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> $E(\vee)$ <u>un demi-treillis, Il existe au plus un treillis</u> $E(\vee , \wedge)$ <u>admettant</u> $E(\vee)$ <u>comme sup-demi-treillis. L'existence du treillis</u> $E(\vee , \wedge)$ <u>est équivalente à l'existence d'une opération interne</u> $\wedge$ <u>de</u> E, <u>distributive à droite par rapport à elle-même, et telle que</u> $a \wedge b = b$ <u>équivaille à</u> $b \vee a = a$.

Soient $E(\vee , \wedge_1)$ et $E(\vee , \wedge_2)$ deux treillis admettant $E(\vee)$ comme sup-demi-treillis. La relation d'ordre de $E(\vee , \wedge_1)$ est définie par

$$x \leqslant_1 y \iff y \wedge_1 x = x \iff x \vee y = y$$

La relation d'ordre de $E(\vee , \wedge_2)$ est définie par

$$x \leqslant_2 y \iff y \wedge_2 x = x \iff x \vee y = y \ .$$

Les relations d'ordre $\leqslant_1$ et $\leqslant_2$ coïncident. Il en est donc de même, pour les deux treillis $E(\vee , \wedge_1)$ et $E(\vee , \wedge_2)$.

La deuxième partie est une conséquence immédiate du théorème 3.

THÉORÈME 4. - <u>Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition</u> $E(\vee , \wedge)$ <u>vérifiant les six axiomes indépendants (1)(1')(7)(7')(3)(4)</u>.

Soient $E(\vee , \wedge)$ un système de double composition vérifiant (1)(1')(7)(7')(3)(4), et a et b deux éléments de E. Comme $E(\vee)$ vérifie (3) et (7), $E(\vee)$ est un groupoïde distributif, et a^3 et b^3 sont deux idempotents de $E(\vee)$ ([2], théorème 1). Posons $c = a^3 \vee b^3$. Il vient

$$\begin{aligned} a \vee c = a \vee (a^3 \vee b^3) &= a^3 \vee (a^3 \vee b^3) && \text{d'après [2], corollaire 1, théorème 3} \\ &= a^3 \vee (b^3 \vee a^3) && \text{d'après (3)} \\ &= b^3 \vee a^3 && \text{d'après (4)} \\ &= a^3 \vee b^3 = c && \text{d'après (3)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b \vee c = b \vee (a^3 \vee b^3) &= b^3 \vee (a^3 \vee b^3) && \text{d'après [2], corollaire 1, théorème 3} \\ &= a^3 \vee b^3 = c && \text{d'après (4)} . \end{aligned}$$

La condition (1) entraîne donc $c \wedge a = a$ et $c \wedge b = b$, d'où il vient

$$\begin{aligned} a \wedge (b \wedge a) = (c \wedge a) \wedge (b \wedge a) &= (c \wedge b) \wedge a && \text{d'après (7')} \\ &= b \wedge a \end{aligned}$$

$E(\vee , \wedge)$ vérifie (1)(1')(7)(7')(3) et (4'). D'après [2], théorème 7, $E(\vee , \wedge)$ est un treillis.

THÉORÈME 5. - <u>Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition</u> $E(\vee , \wedge)$ <u>vérifiant les six axiomes indépendants (1)(1')(7)(7')(4)(8)</u>.

Ce théorème est une conséquence du théorème 4 et de la proposition suivante :

PROPOSITION. - <u>Il y a identité entre les groupoïdes distributifs d'un côté à la fois réguliers à gauche et réguliers à droite et les groupoïdes distributifs à la fois commutatifs et associatifs pour lesquels chaque partie stable ne possédant qu'un idempotent est un demi-groupe zéro</u>.

Nous utilisons le lemme suivant :

LEMME. - <u>Si</u> $E(T)$ <u>est un groupoïde régulier d'un côté, alors</u> $E^2(T)$ <u>est un groupoïde dont tous les éléments sont idempotents</u>.

Soit $E(T)$ un groupoïde régulier à droite. Pour tout élément z de E^2, il existe deux éléments x et y de E tels que $z = x \mathbin{T} y$. Comme $E(T)$ est régulier à droite, il vient

$$z \mathbin{T} z = (x \mathbin{T} y) \mathbin{T} (x \mathbin{T} y) = (x \mathbin{T} y) \mathbin{T} [y \mathbin{T} (x \mathbin{T} y)] = y \mathbin{T} (x \mathbin{T} y) = x \mathbin{T} y = z$$

E^2 est une partie stable de $E(T)$ et $E^2(T)$ est un groupoïde dont tous les éléments sont idempotents.

Le cas d'un groupoïde régulier à gauche se traite par dualité. Considérons un groupoïde distributif à droite, à la fois régulier à gauche et régulier à droite $E(T)$, et a et b deux éléments de E. Il vient

$$\begin{aligned}
a \mathbin{T} b &= (a \mathbin{T} b) \mathbin{T} a && \text{(régularité à gauche)}\\
&= (a \mathbin{T} a) \mathbin{T} (b \mathbin{T} a) && \text{(distributivité à droite)}\\
&= [a \mathbin{T} (b \mathbin{T} a)] \mathbin{T} [a \mathbin{T} (b \mathbin{T} a)] && \text{(distributivité à droite)}\\
&= (b \mathbin{T} a) \mathbin{T} (b \mathbin{T} a) && \text{(régularité à droite)}\\
&= b \mathbin{T} a && \text{(lemme)}
\end{aligned}$$

$E(T)$ est par suite un groupoïde commutatif et distributif. D'après [2], théorème 5, la partie stable $E^2(T)$ des idempotents de $E(T)$, vérifiant les axiomes de commutativité, d'idempotence, de distributivité à gauche et de régularité à droite est un demi-treillis.

Par suite, pour tous éléments a, b, c de E, le corollaire 1, théorème 3 de [2], nous montre que

$$a \mathbin{T} (b \mathbin{T} c) = a^2 \mathbin{T} (b^2 \mathbin{T} c^2) = (a^2 \mathbin{T} b^2) \mathbin{T} c^2 = (a \mathbin{T} b) \mathbin{T} c$$

$E(T)$ est un demi-groupe. Enfin, d'après le lemme, toute partie stable de $E(T)$, ne possédant qu'un idempotent, est un demi-groupe zéro. Le cas d'un groupoïde distributif à droite se traite par dualité. Cette proposition et le théorème 4 nous montrent également le théorème suivant :

THÉORÈME 6. - <u>Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition $E(\vee, \wedge)$ vérifiant les six axiomes indépendants (1)(1')(2)(4)(8)(7').</u>

THÉORÈME 7. - <u>Les ensembles d'axiomes</u>

$$\begin{aligned}
&\{(1)(1')(2)(3')(4)(7')\}, && \{(1)(1')(2)(3)(4')(7')\}\\
&\{(1)(1')(2)(3)(5)(7')\}, && \{(1)(1')(7)(7')(3)(8)\}\\
&\{(1)(1')(2)(3)(8)(7')\}, && \{(1)(1')(2)(3)(4)(7')\}
\end{aligned}$$

<u>sont des ensembles d'axiomes indépendants pour les treillis.</u>

Il suffit d'utiliser la commutativité pour se ramener aux théorèmes suivants : [2], théorème 6 ; [2], théorème 7 ; théorème 3 ; théorème 4.

THÉORÈME 8. - Les ensembles d'axiomes

$$\{(1)(1')(3)(5)(8)(7')\} \; , \; \{(1)(1')(3)(5)(4)(7')\}$$
$$\{(1)(1')(4)(5)(8)(7')\} \; , \; \{(1)(1')(2)(3)(4')(5')\}$$
$$\{(1)(1')(3)(4')(5')(7)\} \; , \; \{(1)(1')(4)(5)(7')(8')\}$$

sont des ensembles d'axiomes indépendants pour les treillis.

Il suffit d'utiliser le lemme suivant pour se ramener à des théorèmes déjà cités :

LEMME. - Tout demi-groupe régulier d'un côté est distributif du même côté.

THÉORÈME 9. - Les ensembles d'axiomes

$$\{(1)(1')(3)(5)(6)(7')\} \; , \; \{(1)(1')(3)(5)(6')(7')\}$$

sont des ensembles d'axiomes indépendants pour les treillis.

Il suffit de remarquer que l'ensemble des deux axiomes (1')(6') entraîne l'axiome (6), et d'utiliser le corollaire du théorème 3. Afin de montrer l'indépendance des six axiomes constituant chacun des ensembles d'axiomes explicités dans les théorèmes 1, 2, ..., 9 , nous utiliserons les huit systèmes de double composition $E_0(\vee , \wedge)$, $E_1(\vee , \wedge)$, $E_2(\vee , \wedge)$, $E_3(\vee , \wedge)$, $E_4(\vee , \wedge)$, $E_5(\vee , \wedge)$, $E_6(\vee , \wedge)$, $E_7(\vee , \wedge)$, dont les tables d'opérations sont respectivement les suivantes :

$E_0(\vee)$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

$E_1(\vee)$	a	b
a	a	a
b	a	a

$E_2(\vee)$	a	b
a	a	b
b	a	b

$E_3(\vee)$	a	b
a	a	a
b	b	b

$E_0(\wedge)$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	c

$E_1(\wedge)$	a	b
a	a	b
b	b	a

$E_2(\wedge)$	a	b
a	a	b
b	a	b

$E_3(\wedge)$	a	b
a	a	a
b	b	b

$E_4(\vee)$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

$E_5(\vee)$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

$E_6(\vee)$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

$E_4(\wedge)$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

$E_5(\wedge)$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	c	c

$E_6(\wedge)$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

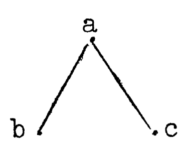
$E_7(\vee)$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	b	b
c	a	a	c	c	c
d	a	b	c	d	d
e	a	b	c	d	e

$E_7(\wedge)$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	b	e	d	e
c	c	e	c	d	e
d	d	d	d	d	e
e	e	e	e	e	e

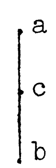
THÉORÈME 10. - Les systèmes de double composition $E_0(\vee , \wedge)$, $E_1(\vee , \wedge)$, $E_2(\vee , \wedge)$, $E_3(\vee , \wedge)$, $E_4(\vee , \wedge)$, $E_5(\vee , \wedge)$, $E_6(\vee , \wedge)$, $E_7(\vee , \wedge)$ sont d'ordre minimal parmi les systèmes qui, sans être des treillis, vérifient respectivement les ensembles de conditions :

(1)(2)(2')(3)(3')(4)(4')(5)(5')(6)(6')(7)(7')(8)(8')
(1)(1')(2)(3)(3')(4)(5)(5')(7)(8)
(1)(1')(2)(2')(4)(4')(5)(5')(6)(6')(7)(7')
(1)(1')(2)(2')(5)(5')(6)(6')(7)(7')(8)(8')
(1)(1')(2)(2')(3)(3')(6)(6')(7)(7')
(1)(1')(2)(2')(3)(4)(5)(5')(6)(6')(7)(8)(8')
(1)(1')(2)(2')(3)(5')(6)(6')(7)(7')(8')
(1)(1')(2)(3)(3')(4)(4')(5)(6)(6')(7)(8)(8') .

Système $E_0(\vee , \wedge)$: $E_0(\vee)$ est le sup-demi-treillis dont le diagramme est



$E_0(\wedge)$ est le inf-demi-treillis dont le diagramme est



$E_0(\vee , \wedge)$ vérifie (1)(2)(2')(3)(3')(4)(4')(5)(5')(6)(6')(7)(7')(8)(8') sans vérifier (1') $[c \wedge b = b$ et $b \vee c = a]$.

Tout système d'ordre 1 ou 2, vérifiant (1)(3)(3')(6), est un treillis.

<u>Système</u> $E_1(\vee , \wedge)$: $E_1(\vee)$ est un demi-groupe zéro d'ordre 2 , $E_1(\wedge)$ est un groupe d'ordre 2 .

$E_1(\vee , \wedge)$ vérifie (1)(1')(2)(3)(3')(4)(5)(5')(7)(8) sans vérifier (6).

<u>Système</u> $E_2(\vee , \wedge)$: $E_2(\vee)$ et $E_2(\wedge)$ coïncident avec le même demi-groupe zéro à droite d'ordre 2 .

$E_2(\vee , \wedge)$ vérifie (1)(1')(2)(2')(4)(4')(5)(5')(6)(6')(7)(7') sans vérifier (3).

<u>Système</u> $E_3(\vee , \wedge)$: $E_3(\vee)$ et $E_3(\wedge)$ coïncident avec le même demi-groupe zéro à gauche d'ordre 2 .

$E_3(\vee , \wedge)$ vérifie (1)(1')(2)(2')(5)(5')(6)(6')(7)(7')(8)(8') sans vérifier (3).

Tout système de double composition d'ordre 1 étant un treillis, $E_1(\vee , \wedge)$, $E_2(\vee , \wedge)$, $E_3(\vee , \wedge)$ sont d'ordre minimal parmi les systèmes, qui sans être des treillis, vérifient respectivement les ensembles de conditions

(1)(1')(2)(3)(3')(4)(5)(5')(7)(8)
(1)(1')(2)(2')(4)(4')(5)(5')(6)(6')(7)(7')
(1)(1')(2)(2')(5)(5')(6)(6')(7)(7')(8)(8') .

<u>Systèmes</u> $E_4(\vee , \wedge)$ <u>et</u> $E_5(\vee , \wedge)$: Ces systèmes ont été étudiés dans [2] sous le nom de $B_4(\vee , \wedge)$ et $B_5(\vee , \wedge)$.

<u>Système</u> $E_6(\vee , \wedge)$: $E_6(\vee)$ est le quasi-groupe distributif identique à $E_4(\vee)$, $E_6(\wedge)$ est un demi-groupe zéro à gauche d'ordre 3 . $E_6(\vee , \wedge)$ vérifie (1)(1') (2)(2')(3)(5')(6)(6')(7)(7')(8') sans vérifier (3'). Tout système de double composition d'ordre 1 ou 2, vérifiant (1)(1')(3)(6), étant un treillis, $E_4(\vee , \wedge)$, $E_5(\vee , \wedge)$, $E_6(\vee , \wedge)$ sont d'ordre minimal parmi les systèmes qui, sans être des treillis, vérifient respectivement les ensembles de conditions

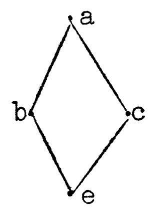
(1)(1')(2)(2')(3)(3')(6)(6')(7)(7')
(1)(1')(2)(2')(3)(4)(5)(5')(6)(6')(7)(8)(8')
(1)(1')(2)(2')(3)(5')(6)(6')(7)(7')(8')

<u>Système</u> $E_7(\vee , \wedge)$: Ce système a été étudié dans [2] sous le nom de $B_7(\wedge , \vee)$. Soit un système $E(\vee , \wedge)$ vérifiant (1)(1') tel que $E(\vee)$ soit un demi-treillis sans que $E(\wedge)$ le soit. Il existe au moins trois éléments distincts b , c , a de E tels que $b \vee c = c \vee b = a$ [sinon $E(\vee)$ est une chaîne et, d'après (1), $E(\vee , \wedge)$ est une chaîne]. Si, de plus, $E(\vee , \wedge)$ vérifie (3') et (4'), on ne peut

avoir $b \wedge c = b$, ni $b \wedge c = c$ [en raison de (1')], ni $b \wedge c = a$ [sinon $c \wedge a = c \wedge (b \wedge c) = b \wedge c = a$, soit, d'après (1'), $a \vee c = c$ en contradiction avec $b \vee c = a$ qui implique $c \vee a = a \vee c = a$].

Ainsi, si un système $E(\vee , \wedge)$ vérifie (1)(1')(2)(3)(3')(4)(4')(5)(6)(6')(7)(8)(8') sans être un treillis, E contient au moins quatre éléments b , c , a , e tels que $b \vee c = a$ et $b \wedge c = e$. Les conditions (3') et (4') entraînent $b \wedge e = e \wedge b = e$, $c \wedge e = e \wedge c = e$.

La condition (1') montre alors que $e \vee b = b \vee e = b$, $e \vee c = c \vee e = c$, d'où il vient $e \vee a = e \vee (b \vee c) = (e \vee b) \vee (e \vee c) = b \vee c = a$. La condition (1) entraîne alors $a \wedge e = e \wedge a = e$. $E(\vee , \wedge)$ admet comme sous-système le treillis dont le diagramme est



Par suite, si un système $E(\vee , \wedge)$ vérifie (1)(1')(2)(3)(3')(4)(4')(5)(6)(6')(7)(8)(8') sans être un treillis, E contient au moins cinq éléments. Le théorème 10 est entièrement démontré.

L'existence du système $E_0(\vee , \wedge)$ prouve que la condition (1') n'est pas entraînée par l'ensemble des conditions (1)(2)(2')(3)(3')(4)(4')(5)(5')(6)(6')(7)(7')(8)(8'). L'existence du système $E_0(\wedge , \vee)$ prouve que la condition (1) n'est pas entraînée par l'ensemble des conditions (1')(2)(2')(3)(3')(4)(4')(5)(5')(6)(6')(7)(7')(8)(8').

Compte tenu de ces deux résultats, pour démontrer l'indépendance des six axiomes constituant chacun des ensembles d'axiomes explicités dans les théorèmes 1, 2, ..., 9, nous avons établi le tableau suivant ([2]) :

([2]) Nous désignons par E_i $(i = 1 , 2 , \ldots , 7)$ le système de double composition $E_i(\vee , \wedge)$.

Indépendance des axiomes	Axiome	est non entraîné par	Exemple
(1)(1')(2)(2')(3)(4')	(2) (2') (3) (4')	(1)(1')(2')(3)(4') (1)(1')(2)(3)(4') (1)(1')(2)(2')(4') (1)(1')(2)(2')(3)	$E_1(\wedge\ ,\ \vee)$ E_7 E_2 E_4
(1)(1')(7)(7')(3)(4')	(7) (7') (3) (4')	(1)(1')(7')(3)(4') (1)(1')(7)(3)(4') (1)(1')(7)(7')(4') (1)(1')(7)(7')(3)	$E_1(\wedge\ ,\ \vee)$ E_7 E_2 E_4
(1)(1')(7)(7')(4)(8')	(7) (7') (4) (8')	(1)(1')(7')(4)(8') (1)(1')(7)(4)(8') (1)(1')(7)(7')(8') (1)(1')(7)(7')(4)	$E_7(\wedge\ ,\ \vee)$ E_5 E_3 E_2
(1)(1')(2)(7')(4)(8')	(2) (7') (4) (8')	(1)(1')(7')(4)(8') (1)(1')(2)(4)(8') (1)(1')(2)(7')(8') (1)(1')(2)(7')(4)	$E_7(\wedge\ ,\ \vee)$ E_5 E_3 E_2
(1)(1')(7)(7')(3)(5)	(7) (7') (3) (5)	(1)(1')(7')(3)(5) (1)(1')(7)(3)(5) (1)(1')(7)(7')(5) (1)(1')(7)(7')(3)	$E_1(\wedge\ ,\ \vee)$ E_1 E_2 E_4
(1)(1')(7)(7')(3)(4)	(7) (7') (3) (4)	(1)(1')(7')(3)(4) (1)(1')(7)(3)(4) (1)(1')(7)(7')(4) (1)(1')(7)(7')(3)	$E_7(\wedge\ ,\ \vee)$ E_1 E_2 E_4

Indépendance des axiomes	Axiome	est non entraîné par	Exemple
(1)(1')(7)(7')(3)(8)	(7)	(1)(1')(7')(3)(8)	$E_7(\wedge , \vee)$
	(7')	(1)(1')(7)(3)(8)	E_1
	(3)	(1)(1')(7)(7')(8)	E_3
	(8)	(1)(1')(7)(7')(3)	E_4
(1)(1')(7)(7')(4)(8)	(7)	(1)(1')(7')(4)(8)	$E_7(\wedge , \vee)$
	(7')	(1)(1')(7)(4)(8)	E_1
	(4)	(1)(1')(7)(7')(8)	E_3
	(8)	(1)(1')(7)(7')(4)	E_2
(1)(1')(2)(3)(8)(7')	(2)	(1)(1')(3)(8)(7')	$E_7(\wedge , \vee)$
	(3)	(1)(1')(2)(8)(7')	E_3
	(8)	(1)(1')(2)(3)(7')	E_4
	(7')	(1)(1')(2)(3)(8)	E_1
(1)(1')(2)(4)(8)(7')	(2)	(1)(1')(4)(8)(7')	$E_7(\wedge , \vee)$
	(4)	(1)(1')(2)(8)(7')	E_3
	(8)	(1)(1')(2)(4)(7')	E_2
	(7')	(1)(1')(2)(4)(8)	E_1
(1)(1')(3)(5)(8)(7')	(3)	(1)(1')(5)(8)(7')	E_3
	(5)	(1)(1')(3)(8)(7')	$E_7(\wedge , \vee)$
	(8)	(1)(1')(3)(5)(7')	$E_1(\wedge , \vee)$
	(7')	(1)(1')(3)(5)(8)	E_1
(1)(1')(4)(5)(8)(7')	(4)	(1)(1')(5)(8)(7')	E_3
	(5)	(1)(1')(4)(8)(7')	$E_7(\wedge , \vee)$
	(8)	(1)(1')(4)(5)(7')	E_2
	(7')	(1)(1')(4)(5)(8)	E_1

Indépendance des axiomes	Axiome	est non entraîné par	Exemple
(1)(1')(2)(3)(4)(7')	(2) (3) (4) (7')	(1)(1')(3)(4)(7') (1)(1')(2)(4)(7') (1)(1')(2)(3)(7') (1)(1')(2)(3)(4)	$E_7(\wedge\ ,\ \vee)$ E_2 E_4 E_1
(1)(1')(2)(3)(5)(7')	(2) (3) (5) (7')	(1)(1')(3)(5)(7') (1)(1')(2)(5)(7') (1)(1')(2)(3)(7') (1)(1')(2)(3)(5)	$E_1(\wedge\ ,\ \vee)$ E_2 E_4 E_1
(1)(1')(3)(4)(5)(7')	(3) (4) (5) (7')	(1)(1')(4)(5)(7') (1)(1')(3)(5)(7') (1)(1')(3)(4)(7') (1)(1')(3)(4)(5)	E_2 $E_1(\wedge\ ,\ \vee)$ $E_7(\wedge\ ,\ \vee)$ E_1
(1)(1')(3)(5)(6)(7')	(3) (5) (6) (7')	(1)(1')(5)(6)(7') (1)(1')(3)(6)(7') (1)(1')(3)(5)(7') (1)(1')(3)(5)(6)	E_2 E_4 $E_1(\wedge\ ,\ \vee)$ E_5
(1)(1')(2)(3')(4)(7')	(2) (3') (4) (7')	(1)(1')(3')(4)(7') (1)(1')(2)(4)(7') (1)(1')(2)(3')(7') (1)(1')(2)(3')(4)	$E_7(\wedge\ ,\ \vee)$ E_2 E_4 E_1

Indépendance des axiomes	Axiome	est non entraîné par	Exemple
(1)(1')(2)(3)(4')(5')	(2)	(1)(1')(3)(4')(5')	$E_1(\wedge , \vee)$
	(3)	(1)(1')(2)(4')(5')	E_2
	(4')	(1)(1')(2)(3)(5')	E_1
	(5')	(1)(1')(2)(3)(4')	E_7
(1)(1')(3)(4')(5')(7)	(3)	(1)(1')(4')(5')(7)	E_2
	(4')	(1)(1')(3)(5')(7)	E_1
	(5')	(1)(1')(3)(4')(7)	E_7
	(7)	(1)(1')(3)(4')(5')	$E_1(\wedge , \vee)$
(1)(1')(2)(3)(4')(7')	(2)	(1)(1')(3)(4')(7')	$E_1(\wedge , \vee)$
	(3)	(1)(1')(2)(4')(7')	E_2
	(4')	(1)(1')(2)(3)(7')	E_4
	(7')	(1)(1')(2)(3)(4')	E_7
(1)(1')(3)(5)(6')(7')	(3)	(1)(1')(5)(6')(7')	E_2
	(5)	(1)(1')(3)(6')(7')	E_4
	(6')	(1)(1')(3)(5)(7')	$E_1(\wedge , \vee)$
	(7')	(1)(1')(3)(5)(6')	E_5
(1)(1')(4)(5)(7')(8')	(4)	(1)(1')(5)(7')(8')	$E_1(\wedge , \vee)$
	(5)	(1)(1')(4)(7')(8')	$E_7(\wedge , \vee)$
	(7')	(1)(1')(4)(5)(8')	E_5
	(8')	(1)(1')(4)(5)(7')	E_2

THÉORÈME 11. - Parmi les mille et un ensembles d'axiomes constitués de (1)(1') et de quatre autres axiomes choisis parmi les quatorze axiomes (2)...(8)(2')...(8'), seuls quarante-quatre d'entre eux sont des ensembles d'axiomes pour les treillis, à savoir les ensembles d'axiomes indépendants explicités dans l'énoncé des théorèmes 1, 2,..., 9 et des théorèmes 6, 7 de [2] et les ensembles ipso-duaux.

Pour démontrer ce théorème, nous avons établi, sous forme de tableaux, la liste de ces mille et un ensembles (3).

En regard de chacun de ces ensembles figure l'exemple montrant que l'ensemble n'est pas un ensemble d'axiomes pour les treillis ou la lettre T indiquant que l'ensemble est un ensemble d'axiomes pour les treillis.

COROLLAIRE. - Il est impossible de caractériser les treillis en tant que systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant seulement à (1)(1') et à trois autres axiomes choisis parmi les quatorze axiomes (2)...(8)(2')...(8').

---

(3) En fait, compte tenu de l'ipso-dualité et de la possibilité de montrer par le même exemple que plusieurs ensembles ne sont pas des ensembles d'axiomes pour les treillis, nous avons réduit le nombre des ensembles effectivement explicités dans les tableaux.

Ensemble (1)(1')(2)(2') et	Exemple ou théorème	Ensemble (1)(1')(3)(3') et	Exemple ou théorème
(3)(3')	E_4	(2)(4')	E_7
(3)(4')	T	(2)(5')	E_1
(3)(5')	E_5	(2)(6')	E_4
(3)(6')	E_4	(2)(7')	E_4
(3)(7')	E_4	(2)(8')	E_7
(3)(8')	E_5	(4)(4')	E_7
(4)(4')	E_2	(4)(5')	E_1
(4)(5')	E_2	(4)(6')	E_7
(4)(6')	E_2	(4)(7')	$E_7(\wedge, \vee)$
(4)(7')	E_2	(4)(8')	E_7
(4)(8')	E_5	(5)(5')	E_1
(5)(5')	E_2	(5)(6')	E_7
(5)(6')	E_2	(5)(7')	$E_1(\wedge, \vee)$
(5)(7')	E_2	(5)(8')	$E_1(\wedge, \vee)$
(5)(8')	E_3	(6)(6')	E_4
(6)(6')	E_2	(6)(7')	E_4
(6)(7')	E_2	(6)(8')	E_7
(6)(8')	E_3	(7)(7')	E_4
(7)(7')	E_2	(7)(8')	E_7
(7)(8')	E_3	(8)(8')	E_7
(8)(8')	E_3		
deux axiomes choisis parmi (3)(4)(5)(6)(7)(8)	E_5	deux axiomes choisis parmi (2)(4)(5)(6)(7)(8)	E_7

Ensemble (1)(1')(4)(4') et	Exemple ou théorème	Ensemble (1)(1')(5)(5') et	Exemple ou théorème
(2)(3')	E_7	(2)(3')	E_1
(2)(5')	E_2	(2)(4')	E_2
(2)(6')	E_2	(2)(6')	E_2
(2)(7')	E_2	(2)(7')	E_2
(2)(8')	E_7	(2)(8')	E_3
(3)(5')	$E_7(\wedge\ ,\ \vee)$	(3)(4')	$E_1(\wedge\ ,\ \vee)$
(3)(6')	E_7	(3)(6')	E_5
(3)(7')	$E_7(\wedge\ ,\ \vee)$	(3)(7')	$E_1(\wedge\ ,\ \vee)$
(3)(8')	E_7	(3)(8')	$E_1(\wedge\ ,\ \vee)$
(5)(5')	E_2	(4)(6')	E_2
(5)(6')	E_2	(4)(7')	E_2
(5)(7')	E_2	(4)(8')	E_5
(5)(8')	E_7	(6)(6')	E_2
(6)(6')	E_2	(6)(7')	E_2
(6)(7')	E_2	(6)(8')	E_3
(6)(8')	E_7	(7)(7')	E_2
(7)(7')	E_2	(7)(8')	E_3
(7)(8')	E_7	(8)(8')	E_3
(8)(8')	E_7		
deux axiomes choisis parmi (2)(3)(5)(6)(7)(8)	E_7	deux axiomes choisis parmi (2)(3)(4)(6)(7)(8)	E_5

Ensemble (1)(1')(6)(6') et	Exemple ou théorème	Ensemble (1)(1')(8)(8') et	Exemple ou théorème
(2)(3')	E_4	(2)(3')	$E_5(\wedge\ ,\ \vee)$
(2)(4')	E_2	(2)(4')	$E_5(\wedge\ ,\ \vee)$
(2)(5')	E_2	(2)(5')	E_3
(2)(7')	E_2	(2)(6')	E_3
(2)(8')	E_3	(2)(7')	E_3
(3)(4')	E_7	(3)(4')	E_7
(3)(5')	E_5	(3)(5')	E_5
(3)(7')	E_4	(3)(6')	E_5
(3)(8')	E_5	(3)(7')	$E_7(\wedge\ ,\ \vee)$
(4)(5')	E_2	(4)(5')	E_5
(4)(7')	E_2	(4)(6')	E_5
(4)(8')	E_5	(4)(7')	$E_7(\wedge\ ,\ \vee)$
(5)(7')	E_2	(5)(6')	E_3
(5)(8')	E_3	(5)(7')	E_3
(7)(7')	E_2	(6)(7')	E_3
(7)(8')	E_3		
(8)(8')	E_3		
deux axiomes choisis parmi (2)(3)(4)(5)(7)(8)	E_5	deux axiomes choisis parmi (2)(3)(4)(5)(6)(7)	E_5

Ensemble (1)(1')(7)(7') et	Exemple ou théorème	Ensemble (1)(1')(7)(7') et	Exemple ou théorème
(2)(3')	E_4	(2)(3)	E_4
(2)(4')	E_2	(2)(4)	E_2
(2)(5')	E_2	(2)(5)	E_2
(2)(6')	E_2	(2)(6)	E_2
(2)(8')	E_3	(2)(8)	E_3
(3)(4')	T	(3)(4)	T
(3)(5')	E_6	(3)(5)	T
(3)(6')	E_4	(3)(6)	E_4
(3)(8')	E_6	(3)(8)	T
(4)(5')	E_2	(4)(5)	E_2
(4)(6')	E_2	(4)(6)	E_2
(4)(8')	T	(4)(8)	T
(5)(6')	E_2	(5)(6)	E_2
(5)(8')	E_3	(5)(8)	E_3
(6)(8')	E_3	(6)(8)	E_3
(8)(8')	E_3		

Ensemble	Exemple ou théorème
(1)(1') et quatre axiomes choisis parmi (2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)	E_5
(1)(1')(2') et trois axiomes choisis parmi (3)(4)(5)(6)(7)(8)	E_5
(1)(1')(3') et trois axiomes choisis parmi (2)(4)(5)(6)(7)(8)	E_7
(1)(1')(4') et trois axiomes choisis parmi (2)(3)(5)(6)(7)(8)	E_7
(1)(1')(5') et trois axiomes choisis parmi (2)(3)(4)(6)(7)(8)	E_5
(1)(1')(6') et trois axiomes choisis parmi (2)(3)(4)(5)(7)(8)	E_5
(1)(1')(8') et trois axiomes choisis parmi (2)(3)(4)(5)(6)(7)	E_5

Ensemble (1)(1')(7') et	Exemple ou théorème	Ensemble (1)(1')(7') et	Exemple ou théorème
(2)(3)(4)	T	(3)(4)(5)	T
(2)(3)(5)	T	(3)(4)(6)	$E_7(\wedge , \vee)$
(2)(3)(6)	E_4	(3)(4)(8)	$E_7(\wedge , \vee)$
(2)(3)(8)	T	(3)(5)(6)	T
(2)(4)(5)	E_2	(3)(5)(8)	T
(2)(4)(6)	E_2	(3)(6)(8)	$E_7(\wedge , \vee)$
(2)(4)(8)	T	(4)(5)(6)	E_2
(2)(5)(6)	E_2	(4)(5)(8)	T
(2)(5)(8)	E_3	(4)(6)(8)	$E_7(\wedge , \vee)$
(2)(6)(8)	E_3	(5)(6)(8)	E_3

Ensemble (1)(1') et	Exemple ou théorème	Ensemble (1)(1') et	Exemple ou théorème
(2)(3')(4)(5')	E_1	(2)(3')(4')(5)	$E_5(\wedge , \vee)$
(2)(3')(4)(6')	E_7	(2)(3')(4')(6)	$E_5(\wedge , \vee)$
(2)(3')(4)(7')	T	(2)(3')(4')(7)	E_7
(2)(3')(4)(8')	E_7	(2)(3')(4')(8)	$E_5(\wedge , \vee)$
(2)(3')(5)(6')	$E_5(\wedge , \vee)$	(2)(3')(5')(6)	$E_5(\wedge , \vee)$
(2)(3')(5)(7')	$E_5(\wedge , \vee)$	(2)(3')(5')(7)	E_1
(2)(3')(5)(8')	$E_5(\wedge , \vee)$	(2)(3')(5')(8)	E_1
(2)(3')(6)(7')	E_4	(2)(3')(6')(7)	E_4
(2)(3')(6)(8')	$E_5(\wedge , \vee)$	(2)(3')(6')(8)	$E_5(\wedge , \vee)$
(2)(3')(7)(8')	E_7	(2)(3')(7')(8)	$E_5(\wedge , \vee)$
(2)(4')(5)(6')	E_2	(2)(4')(5')(6)	E_2
(2)(4')(5)(7')	E_2	(2)(4')(5')(7)	E_2
(2)(4')(5)(8')	$E_5(\wedge , \vee)$	(2)(4')(5')(8)	$E_5(\wedge , \vee)$
(2)(4')(6)(7')	E_2	(2)(4')(6')(7)	E_2
(2)(4')(6)(8')	$E_5(\wedge , \vee)$	(2)(4')(6')(8)	$E_5(\wedge , \vee)$
(2)(4')(7)(8')	E_7	(2)(4')(7')(8)	$E_5(\wedge , \vee)$
(2)(5')(6)(7')	E_2	(2)(5')(6')(7)	E_2
(2)(5')(6)(8')	E_3	(2)(5')(6')(8)	E_3
(2)(5')(7)(8')	E_3	(2)(5')(7')(8)	E_3
(2)(6')(7)(8')	E_3	(2)(6')(7')(8)	E_3
(3)(4')(5)(6')	E_7	(3)(4')(5')(6)	$E_7(\wedge , \vee)$
(3)(4')(5)(7')	$E_1(\wedge , \vee)$	(3)(4')(5')(7)	T
(3)(4')(5)(8')	$E_1(\wedge , \vee)$	(3)(4')(5')(8)	$E_7(\wedge , \vee)$
(3)(4')(6)(7')	$E_7(\wedge , \vee)$	(3)(4')(6')(7)	E_7
(3)(4')(6)(8')	E_7	(3)(4')(6')(8)	E_7
(3)(4')(7)(8')	$E_7(\wedge , \vee)$	(3)(4')(7')(8)	E_7
(3)(5')(6)(7')	E_6	(3)(5')(6')(7)	E_5
(3)(5')(6)(8')	E_5	(3)(5')(6')(8)	E_5
(3)(5')(7)(8')	E_5	(3)(5')(7')(8)	$E_7(\wedge , \vee)$
(3)(6')(7)(8')	E_5	(3)(6')(7')(8)	$E_7(\wedge , \vee)$

Ensemble (1)(1') et	Exemple ou théorème	Ensemble (1)(1') et	Exemple ou théorème
(4)(5')(6)(7')	E_2	(4)(5')(6')(7)	E_2
(4)(5')(6)(8')	E_5	(4)(5')(6')(8)	E_5
(4)(5')(7)(8')	E_5	(4)(5')(7')(8)	$E_7(\wedge , \vee)$
(4)(6')(7)(8')	E_5	(4)(6')(7')(8)	$E_7(\wedge , \vee)$
(5)(6')(7)(8')	E_3	(5)(6')(7')(8)	E_3
(2)(3)(4')(5')	T	(2)(4)(5')(6')	E_2
(2)(3)(4')(6')	E_7	(2)(4)(5')(7')	E_2
(2)(3)(4')(7')	T	(2)(4)(5')(8')	E_5
(2)(3)(4')(8')	E_7	(2)(4)(6')(7')	E_2
(2)(3)(5')(6')	E_5	(2)(4)(6')(8')	E_5
(2)(3)(5')(7')	E_6	(2)(4)(7')(8')	T
(2)(3)(5')(8')	E_5	(2)(5)(6')(7')	E_2
(2)(3)(6')(7')	E_4	(2)(5)(6')(8')	E_3
(2)(3)(6')(8')	E_5	(2)(5)(7')(8')	E_3
(2)(3)(7')(8')	E_6	(2)(6)(7')(8')	E_3
(3)(4)(5')(6')	E_5	(4)(5)(6')(7')	E_2
(3)(4)(5')(7')	$E_7(\wedge , \vee)$	(4)(5)(6')(8')	E_5
(3)(4)(5')(8')	E_5	(4)(5)(7')(8')	T
(3)(4)(6')(7')	$E_7(\wedge , \vee)$	(4)(6)(7')(8')	$E_7(\wedge , \vee)$
(3)(4)(6')(8')	E_5	(5)(6)(7')(8')	E_3
(3)(4)(7')(8')	$E_7(\wedge , \vee)$		
(3)(5)(6')(7')	T		
(3)(5)(6')(8')	E_5		
(3)(5)(7')(8')	$E_1(\wedge , \vee)$		
(3)(6)(7')(8')	E_6		

2. Ensembles d'axiomes pour les treillis constitués de (0)(0') et de trois axiomes choisis parmi les quatorze axiomes (2)...(8) (2')...(8').

W. FELSCHER [1] a démontré que les ensembles d'axiomes {(0)(0')(2)(2')(3)(3')} et {(0)(0')(3)(3')(2)(5')} sont des ensembles d'axiomes pour les treillis. En utilisant certains résultats obtenus au paragraphe 1, nous montrons, en jouant sur la commutativité, qu'il est possible d'améliorer les résultats de W. FELSCHER et d'établir une axiomatique des treillis réduite à cinq postulats indépendants et ceci sans utiliser d'autres axiomes que (0)(1)...(8) (0')(1')...(8').

THÉORÈME 12. - Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant aux cinq axiomes indépendants (0)(1')(3)(7)(7').

Si un système de double composition $E(\vee , \wedge)$ vérifie l'axiome (0): $(x \vee y) \wedge x = x$ et l'axiome (1') : $z \wedge x = x$ entraîne $x \vee z = z$, il vérifie l'axiome :

$$x \vee (x \vee y) = x \vee y \quad .$$

Si, de plus, $E(\vee , \wedge)$ vérifie l'axiome (3), il vérifie l'axiome (4) :

$$x \vee (y \vee x) = y \vee x \quad .$$

Comme l'axiome (0) entraîne l'axiome (1), tout système de double composition $E(\vee , \wedge)$, vérifiant (0)(1')(3)(7)(7'), vérifie (1)(1')(7)(7')(3)(4). D'après le théorème 4, $E(\vee , \wedge)$ est un treillis (4).

En utilisant la commutativité, le théorème 12 donne immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 13. - Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant aux cinq axiomes indépendants (0)(1')(2)(3)(7').

THÉORÈME 14. - Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant aux cinq axiomes indépendants (0)(1')(3)(5)(7').

Dans la démonstration du théorème 12, nous avons vu que, si un système de double composition $E(\vee , \wedge)$ vérifie (0)(1')(3), il vérifie (4). Comme l'axiome (0) entraîne l'axiome (1), tout système de double composition $E(\vee , \wedge)$ vérifiant (0)(1')(3)(5)(7') vérifie (1)(1')(3)(4)(5)(7'). D'après le théorème 8, $E(\vee , \wedge)$ est un treillis.

---

(4) L'étude de l'indépendance des cinq axiomes, constituant chacun des ensembles d'axiomes explicités dans les théorèmes 12, 13, 14, est faite après la démonstration du théorème 14.

Revenons à l'étude des systèmes de double composition $E_0(\vee , \wedge)$, $E_1(\vee , \wedge)$, $E_2(\vee , \wedge)$, $E_3(\vee , \wedge)$, $E_4(\vee , \wedge)$, $E_5(\vee , \wedge)$, $E_6(\vee , \wedge)$, $E_7(\vee , \wedge)$.

$E_0(\vee , \wedge)$ vérifie l'axiome (0)

$$\text{si } x = y , \quad (x \vee y) \wedge x = x \ ;$$

$$\text{si } x \neq y , \quad (x \vee y) \wedge x = a \wedge x = x \ ;$$

$E_0(\vee , \wedge)$ ne vérifie pas (0') : $(c \wedge b) \vee c = b \vee c = a$;

$E_1(\vee , \wedge)$ vérifie l'axiome (0) : $(x \vee y) \wedge x = a \wedge x = x$;

$E_1(\vee , \wedge)$ ne vérifie pas l'axiome (0') : $(b \wedge y) \vee b = a$;

$E_2(\vee , \wedge)$ et $E_3(\vee , \wedge)$ vérifient les axiomes (0) et (0') : $(x \vee y) \wedge x = x$, $(x \wedge y) \vee x = x$;

$E_4(\vee , \wedge)$ ne vérifie ni l'axiome (0), ni l'axiome (0') : $(a \vee b) \wedge a = (a \wedge b) \vee a = b$;

$E_5(\vee , \wedge)$ vérifie les axiomes (0) et (0') :

$$\begin{array}{ll} \text{si } x = y & (x \vee y) \wedge x = x \ ; \\ \text{si } x \neq y & (x \vee y) \wedge x = a \wedge x = x \ ; \\ \text{si } x = a & (x \wedge y) \vee x = y \vee x = x \ ; \\ \text{si } x = b \text{ ou } c & (x \wedge y) \vee x = x \vee x = x \ ; \end{array}$$

$E_6(\vee , \wedge)$ ne vérifie pas l'axiome (0) : $(a \vee b) \wedge a = c \wedge a = c$;

$E_6(\vee , \wedge)$ vérifie l'axiome (0') : $(x \wedge y) \vee x = x \vee x = x$;

$E_7(\vee , \wedge)$ vérifie les axiomes (0) et (0'), en effet, il est immédiat que l'ensemble des trois axiomes (1)(3)(4) entraîne l'axiome (0).

De cette étude résulte l'indépendance des cinq axiomes concernant chacun des théorèmes 12, 13, 14 [il suffit de choisir les exemples $E_0(\wedge , \vee)$, $E_0(\vee , \wedge)$, $E_2(\vee , \wedge)$, $E_7(\wedge , \vee)$, $E_1(\vee , \wedge)$].

Cette étude permet également de donner les résultats suivants :

THÉORÈME 15 [5]. - <u>Parmi les trois cent soixante-quatre ensembles d'axiomes constitués de (0)(0') et de trois autres axiomes choisis parmi les quatorze axiomes (2)...(8) (2')...(8'), seuls six d'entre eux sont des ensembles d'axiomes pour les treillis, à savoir les ensembles d'axiomes indépendants</u> $\{(0)(0')(2)(3)(7')\}$, $\{(0)(0')(3)(5)(7')\}$, $\{(0)(0')(3)(7)(7')\}$ <u>et les ensembles ipso-duaux</u>.

---

[5] Pour démontrer les théorèmes 15 et 16, nous avons établi un tableau du même type que ceux considérés au paragraphe 1.

THÉORÈME 16. - Parmi les trois cent soixante-quatre ensembles d'axiomes constitués de (0)(1') et de trois autres axiomes choisis parmi les quatorze axiomes (2)... (8) (2')...(8'), seuls trois d'entre eux sont des ensembles d'axiomes pour les treillis, à savoir les ensembles d'axiomes indépendants {(0)(1')(2)(3)(7')} , {(0)(1')(3)(5)(7')} , {(0)(1')(3)(7)(7')} .

COROLLAIRE. - Il est impossible de caractériser les treillis en tant que systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant seulement à (0)(0') et à deux autres axiomes choisis parmi les quatorze axiomes (2)...(8) (2')...(8').

Ensemble	Exemple ou théorème
(0)(0') et trois axiomes choisis parmi (2)...(8)	E_5
(0)(0')(2') et deux axiomes choisis parmi (2)...(8)	E_5
(0)(0')(3') et deux axiomes choisis parmi (2)...(8)	E_7
(0)(0')(4') et deux axiomes choisis parmi (2)...(8)	E_7
(0)(0')(5') et deux axiomes choisis parmi (2)...(8)	E_5
(0)(0')(6') et deux axiomes choisis parmi (2)...(8)	E_5
(0)(0')(8') et deux axiomes choisis parmi (2)...(8)	E_5
(0)(0')(7') et deux axiomes choisis parmi (2)(4)(5)(6)(7)	E_2
Ensemble	**Exemple ou théorème**
(0)(0')(7')(3) et un axiome choisi parmi (4)(6)(8)	$E_7(\wedge , \vee)$
(0)(0')(7')(8) et un axiome choisi parmi (2)(5)(6)(7)	E_3
(0)(0')(7')(8)(4)	$E_7(\wedge , \vee)$
(0)(1')(7)(3') et un axiome choisi parmi (2')(7')	$E_6(\wedge , \vee)$
(0)(1')(2)(3)(7')	T
(0)(1')(3)(7)(7')	T
(0)(1')(7)(3')(5')	E_1
(0)(1')(3)(5)(7')	T

3. Groupoïdes pseudo-distributifs à gauche.

Un groupoïde $E(T)$ est dit pseudo-distributif à gauche s'il satisfait à l'identité

$$x \, T \, (y \, T \, z) = (y \, T \, x) \, T \, (z \, T \, x) \quad .$$

Tout groupoïde à la fois distributif à gauche et commutatif est pseudo-distributif à gauche. Il existe des groupoïdes distributifs à gauche qui ne sont pas pseudo-distributifs à gauche, par exemple, le demi-groupe zéro à gauche d'ordre 2 .

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 17. - Tout groupoïde pseudo-distributif à gauche est distributif à gauche.

Nous établirons une série de lemme. Soit $E(T)$ un groupoïde pseudo-distributif à gauche.

LEMME 1 [6]. - Pour tout élément a de E , l'élément $a'^3 = a \, T \, (a \, T \, a)$ est un idempotent de E égal à $(a \, T \, a)^2$.

En effet, pour tout élément a de E ,

$$a \, T \, (a \, T \, a) = (a \, T \, a) \, T \, (a \, T \, a) = [a \, T \, (a \, T \, a)] \, T \, [a \, T \, (a \, T \, a)] \quad .$$

Soit I l'ensemble des idempotents de E . A tout élément e de I , associons la partie S_e de E définie par

$$S_e = \{x \, ; \, x \in E \, , \, x'^3 = e\} \quad .$$

COROLLAIRE. - $(S_e)_{e \in I}$ constitue une partition de E .

En effet, pour tout x de E , x appartient à $S_{x'^3}$, et il est immédiat que $S_e \cap S_f \neq \emptyset$ entraîne $e = f$.

LEMME 2. - Pour tout élément e de I et pour tout élément t de E , $e \, T \, t^2$ est un idempotent de $E(T)$, égal à $t^2 \, T \, e$.

En effet, $(e \, T \, t) \, T \, (e \, T \, t) = t \, T \, (e \, T \, e) = t \, T \, e$ ce qui entraîne

$$e \, T \, t^2 = e \, T \, (t \, T \, t) = (t \, T \, e) \, T \, (t \, T \, e) = (e \, T \, t)^2 \, T \, (e \, T \, t)^2$$

$$= (e \, T \, t)'^3 \qquad \text{par utilisation du lemme 1} \quad .$$

Ce même lemme permet de conclure que $e \, T \, t^2$ est un idempotent de $E(T)$.

([6]) Les notations sont celles introduites dans [2].

Compte tenu de ce résultat,

$$t^2 \ T \ e = t^2 \ T(e \ T \ e) = (e \ T \ t^2) \ T \ (e \ T \ t^2) = e \ T \ t^2 \quad .$$

COROLLAIRE. - <u>L'ensemble</u> I <u>des idempotents d'un groupoïde pseudo-distributif à gauche</u> E(T) <u>a, relativement à la loi</u> T , <u>une structure de grille commutative</u> [2].

En effet, si f est un idempotent de E , $f^2 = f$. Par suite, $e \ T \ f$ est un idempotent de E égal à $f \ T \ e$.

LEMME 3. - <u>Si</u> e <u>et</u> f <u>sont deux idempotents de</u> E(T) , <u>alors</u>

$$S_e \ T \ f \subseteq S_{eTf} \quad .$$

Soit x un élément de E tel que $x'^3 = e$. Il vient

$$(x \ T \ f)'^3 = (x \ T \ f) \ T \ [(x \ T \ f) \ T \ (x \ T \ f)] = (x \ T \ f) \ T \ [f \ T \ x^2]$$

$$= (x \ T \ f) \ T \ (x^2 \ T \ f) \quad \text{par utilisation du lemme 2} \quad .$$

Par suite, $(x \ T \ f)'^3 = f \ T \ (x \ T \ x^2) = f \ T \ e$.

Compte tenu du corollaire du lemme 3, $(x \ T \ f)'^3 = e \ T \ f$, ce qui prouve que

$$S_e \ T \ f \subseteq S_{eTf} \quad .$$

LEMME 4. - <u>Si</u> e <u>et</u> f <u>sont deux idempotents de</u> E(T) , <u>alors</u>

$$S_e \ T \ S_f \subseteq S_{eTf} \quad .$$

Soient x et y deux éléments de E tels que $x'^3 = e$, $y'^3 = f$. Il vient

$$(x \ T \ y)'^3 = (x \ T \ y)^2 \ T \ (x \ T \ y)^2 = (y \ T \ x^2) \ T \ (y \ T \ x^2) = x^2 \ T \ y^2 \quad .$$

Par suite,

$$(x \ T \ y)'^3 = (x \ T \ y)'^3 \ T \ (x \ T \ y)'^3 = (x^2 \ T \ y^2) \ T \ (x^2 \ T \ y^2)$$

$$= y^2 \ T \ (x^2 \ T \ x^2) = y^2 \ T \ e \quad .$$

Comme $(y^2)'^3 = y^2 \ T \ (y^2 \ T \ y^2) = (y^2 \ T \ y^2) \ T \ (y^2 \ T \ y^2) = f \ T \ f = f$, le lemme 3 nous montre que $y^2 \ T \ e = (y^2 \ T \ e)'^3 = f \ T \ e$.

Finalement, $(x \ T \ y)'^3 = f \ T \ e = e \ T \ f$, ce qui prouve que

$$S_e \ T \ S_f \subseteq S_{eTf} \quad .$$

COROLLAIRE. - <u>Tout groupoïde pseudo-distributif à gauche</u> $E(T)$ <u>est une grille commutative de parties stables ne possédant qu'un seul idempotent. La relation binaire</u> R <u>définie dans</u> E <u>par</u> $x \, R \, y \iff x'^3 = y'^3$ <u>est l'intersection de toutes les congruences idempotentes de</u> $E(T)$.

Il est immédiat que $S_e(T)$ est une partie stable de $E(T)$ ne possédant qu'un idempotent. R est la relation d'équivalence associée à la partition $(S_e)_{e \in I}$.

Pour tout élément z de E , la relation $x \, R \, y$ entraîne

$$(x \, T \, z)'^3 = x'^3 \, T \, z'^3 = y'^3 \, T \, z'^3 = (y \, T \, z)'^3 \quad .$$

Enfin, si ρ est une congruence idempotente de $E(T)$ et si $x \, R \, y$, $x \, \rho \, x'^3$, $x'^3 = y'^3$, $y'^3 \, \rho \, y$ entraîne $x \, \rho \, y$.

LEMME 5. - $E'^3 = E \, T \, (E \, T \, E)$ <u>coïncide avec la grille commutative</u> I <u>des idempotents de</u> E .

Soient x et y deux éléments du groupoïde pseudo-distributif à gauche $E(T)$. Comme $[x \, T \, (y \, T \, x)] \, T \, [x \, T \, (y \, T \, x)] = (y \, T \, x) \, T \, (x \, T \, x) = x \, T \, (y \, T \, x)$, l'élément $e = x \, T \, (y \, T \, x)$ est un idempotent de $E(T)$. Pour tout élément z de E , il vient

$$x \, T \, (y \, T \, z) = (y \, T \, x) \, T \, (z \, T \, x) = [z \, T \, (y \, T \, x)] \, T \, [x \, T \, (y \, T \, x)] \, .$$

soit, en posant $z \, T \, (y \, T \, x) = t$,

$$x \, T \, (y \, T \, z) = t \, T \, e \quad .$$

Comme d'après ce qui a été vu au lemme 2, $(t \, T \, e) = (e \, T \, t)^2$, nous obtenons

$$x \, T \, (y \, T \, z) = [[x \, T \, (y \, T \, x)] \, T \, [z \, T \, (y \, T \, x)]]^2 = [(y \, T \, x) \, T \, (x \, T \, z)]^2 \quad .$$

Par suite,

$$(y \, T \, x) \, T \, (x \, T \, z) = [[x \, T \, (y \, T \, x)] \, T \, [(y \, T \, x) \, T \, z]]^2$$

et

$$\begin{aligned} x \, T \, (y \, T \, z) &= [[x \, T \, (y \, T \, x)] \, T \, [(y \, T \, x) \, T \, z]]^2 \, T \, [[x \, T \, (y \, T \, x)] \, T \, [(y \, T \, x) \, T \, z]]^2 \\ &= [[x \, T \, (y \, T \, x)] \, T \, [(y \, T \, x) \, T \, z]]'^3 \quad . \end{aligned}$$

D'après le lemme 1, $x \, T \, (y \, T \, z)$ est un idempotent de E , ce qui prouve que $E'^3 \subseteq I$. Comme $I \subseteq E'^3$, il vient $E'^3 = I$.

COROLLAIRE. - <u>Il y a identité entre les groupoïdes pseudo-distributifs à gauche globalement idempotents et les grilles commutatives</u>.

Si le groupoïde pseudo-distributif à gauche $E(T)$ est globalement idempotent, il vient $I = E \, T \, (E \, T \, E) = E \, T \, E = E$; E est par suite une grille commutative. La réciproque est immédiate.

LEMME 6. - Si e , f , g sont des éléments idempotents d'un groupoïde pseudo-distributif à gauche, alors

$$S_e \mathbin{T} (S_f \mathbin{T} S_g) = \{e \mathbin{T} (f \mathbin{T} g)\} \quad .$$

En effet, $S_e \mathbin{T} (S_f \mathbin{T} S_g) \subseteq S_e \mathbin{T} S_{fTg} \subseteq S_{eT(fTg)}$ d'après le lemme 4, et $S_e \mathbin{T} (S_f \mathbin{T} S_g) \subseteq I$ d'après le lemme 5. Finalement, $S_e \mathbin{T} (S_f \mathbin{T} S_g) = \{e \mathbin{T} (f \mathbin{T} g)\}$.

Montrons, dans une dernière étape, que tout groupoïde pseudo-distributif à gauche est distributif à gauche.

Soient a , b , c trois éléments d'un groupoïde pseudo-distributif à gauche $E(T)$. D'après le lemme 6, nous pouvons écrire

$$a \mathbin{T} (b \mathbin{T} c) = a'^3 \mathbin{T} (b'^3 \mathbin{T} c'^3)$$

et

$$(a \mathbin{T} b) \mathbin{T} (a \mathbin{T} c) = (a \mathbin{T} b)'^3 \mathbin{T} (a'^3 \mathbin{T} c'^3) = (a'^3 \mathbin{T} b'^3) \mathbin{T} (a'^3 \mathbin{T} c'^3) \quad .$$

Comme dans la grille des idempotents de E ,

$$a'^3 \mathbin{T} (b'^3 \mathbin{T} c'^3) = (a'^3 \mathbin{T} b'^3) \mathbin{T} (a'^3 \mathbin{T} c'^3) \quad ,$$

il vient finalement $a \mathbin{T} (b \mathbin{T} c) = (a \mathbin{T} b) \mathbin{T} (a \mathbin{T} c)$, ce qui démontre le théorème 17.

REMARQUE 1. - La pseudo-distributivité à gauche n'entraîne pas la distributivité à droite.

Considérons par exemple le groupoïde $A(T)$ dont la table d'opération est

T	a	b	c
a	b	c	c
b	b	c	c
c	b	c	c

Comme pour tous x , y , z de A

$$x \mathbin{T} (y \mathbin{T} z) = x \mathbin{T} (z \mathbin{T} z) = z \mathbin{T} (z \mathbin{T} z) = c$$

et

$$(y \mathbin{T} x) \mathbin{T} (z \mathbin{T} x) = (y \mathbin{T} x) \mathbin{T} (x \mathbin{T} x) = (x \mathbin{T} x) \mathbin{T} (x \mathbin{T} x) = c \quad ,$$

$A(T)$ est pseudo-distributif à gauche. Pourtant $(a \mathbin{T} a) \mathbin{T} a = b \mathbin{T} a = b$ et $(a \mathbin{T} a) \mathbin{T} (a \mathbin{T} a) = b \mathbin{T} b = c$. $A(T)$ n'est pas distributif à droite.

REMARQUE 2. - Dans un groupoïde pseudo-distributif à gauche, l'ensemble des éléments idempotents est un idéal à gauche, mais non nécessairement un idéal à droite.

Soient x un élément d'un groupoïde pseudo-distributif à gauche $E(T)$, et e un élément idempotent de $E(T)$. Il vient

$$x \mathrm{T} e = x \mathrm{T} (e \mathrm{T} e) = x'^3 \mathrm{T} (e \mathrm{T} e) = x'^3 \mathrm{T} e \quad .$$

Comme d'après le corollaire du lemme 2, $x'^3 \mathrm{T} e$ est un idempotent de $E(T)$, $x \mathrm{T} e$ est un idempotent de $E(T)$.

Dans le groupoïde $A(T)$ ci-dessus, on remarque que $c \mathrm{T} a$ n'est pas un idempotent, bien que c soit un idempotent.

COROLLAIRE 1. - Il y a identité entre les groupoïdes pseudo-distributifs à gauche vérifiant l'existence des quotients d'un côté et les grilles commutatives vérifiant l'existence des quotients.

Ce résultat découle immédiatement du corollaire du lemme 5.

COROLLAIRE 2. - Il y a identité entre les groupoïdes pseudo-distributifs à gauche, vérifiant la règle de simplification d'un côté et les grilles commutatives vérifiant la règle de simplification.

Si $E(T)$ est un groupoïde pseudo-distributif à gauche, vérifiant la règle de simplification à droite, pour tout élément a de E , il vient

$$a \mathrm{T} (a \mathrm{T} a) = (a \mathrm{T} a) \mathrm{T} (a \mathrm{T} a) \ ,$$

soit, par simplification à droite, $a = a \mathrm{T} a$.

Il suffit alors d'appliquer le corollaire du lemme 5. Si $E(T)$ est un groupoïde pseudo-distributif à gauche, vérifiant la règle de simplification à gauche, il vient, pour tous éléments u et v de E ,

$$u \mathrm{T} (v \mathrm{T} u) = u'^3 \mathrm{T} [v'^3 \mathrm{T} u'^3] = u'^3 \mathrm{T} [u'^3 \mathrm{T} v'^3] = u \mathrm{T} (u \mathrm{T} v)$$

soit, par simplification à gauche, $v \mathrm{T} u = u \mathrm{T} v$. $E(T)$ est commutatif. Comme il vérifie la règle de simplification à droite, $E(T)$ est une grille commutative vérifiant la règle de simplification.

Des corollaires 1 et 2 découle immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3. - Il y a identité entre les groupoïdes pseudo-distributifs à gauche vérifiant l'existence des quotients d'un côté et la règle de simplification d'un côté et les quasi-groupes distributifs et commutatifs.

COROLLAIRE 4. - Il y a identité entre les groupoïdes pseudo-distributifs à gauche possédant un élément neutre d'un côté et les demi-treillis à élément neutre.

Ce résultat découle immédiatement du corollaire du lemme 5 et du corollaire du théorème 5 de [2].

4. Utilisation des axiomes de pseudo-distributivité à gauche en axiomatique des treillis.

G. SZÃSZ [3] a remarqué que l'introduction des axiomes de pseudo-distributivité à gauche

(9) $x \vee (y \vee z) = (y \vee x) \vee (z \vee x)$ (9') $x \wedge (y \wedge z) = (y \wedge x) \wedge (z \wedge x)$

permet de montrer que l'ensemble de quatre axiomes A, constitué de (9)(9') et des deux axiomes d'absorption (7) :

(a) $x \wedge (x \vee y) = x$ (a') $x \vee (x \wedge y) = x$,

est un ensemble d'axiomes pour les treillis. Les résultats du chapitre précédent nous indiquent que si, dans A, nous substituons à un des axiomes d'absorption, l'axiome d'absorption conditionnelle qu'il entraîne, nous obtenons un système de quatre axiomes A' qui est encore un système d'axiomes pour les treillis. Nous démontrons plus généralement le théorème suivant :

THÉORÈME 18. - Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition satisfaisant à (9)(9'), à (0) ou à un axiome déduit de (0) par un jeu quelconque de commutativité et à (1') ou à un axiome déduit de (1') par un jeu quelconque de commutativité.

Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME. - Il y a identité entre les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant à (9)(9'), à (1) ou à un axiome déduit de (1) par un jeu quelconque de commutativité, et à (1') ou à un axiome déduit de (1') par un jeu quelconque de commutativité, et les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant à (1)(1') (2)(2')(3)(3')(6)(6')(7)(7').

---

(7) en utilisant le fait que l'ensemble des deux axiomes (a)(a') entraîne les axiomes (6)(6').

Le démonstration de Szãsz ne s'applique pas à l'ensemble (0)(0')(9)(9'). En effet, l'ensemble des deux axiomes (0)(0') n'entraîne ni l'axiome (6), ni l'axiome (6'), même en présence des axiomes (7)(7'), comme le montre le système de double composition dont les tables d'opération sont

$\vee$	a	b
a	b	b
b	a	a

$\wedge$	a	b
a	b	b
b	a	a

Soit un système de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant à (9)(9'), à un des axiomes suivants

(i) $\qquad x \vee z = z$ entraîne $z \wedge x = x$

(j) $\qquad x \vee z = z$ entraîne $x \wedge z = x$

(k) $\qquad z \vee x = z$ entraîne $z \wedge x = x$

(ℓ) $\qquad z \vee x = z$ entraîne $x \wedge z = x$

et à (1') ou à un axiome déduit de (1') par un jeu quelconque de commutativité.

$E(\vee)$ vérifiant (9), pour tout élément a de E , $a \vee (a \vee a)$ est un idempotent de $E(\vee)$ [lemme 1 du théorème 17], que nous désignons par e . D'après le lemme 6 du théorème 17, nous savons que

$$a \vee e = a \vee (e \vee e) = e \vee (e \vee e) = e ,$$

d'où il vient $e \vee (e \vee a) = (e \vee e) \vee (a \vee e) = e \vee e = e$.

1° La condition (i) ou (j) entraîne $e \wedge a = a$ ou $a \wedge e = a$.

2° La condition (k) ou (ℓ) entraîne $e \wedge (e \vee a) = e \vee a$, soit

$$e \wedge [e \wedge (e \vee a)] = e \vee a \ , \quad \text{ou} \quad (e \vee a) \wedge e = e \vee a \ .$$

Par utilisation du lemme 6 du théorème 17 ou de la remarque 2 concernant ce même théorème, $e \vee a$ est un idempotent de $E(\wedge)$.

Puisque $E(\vee , \wedge)$ vérifie (1') ou un axiome déduit de (1') par un jeu quelconque de commutativité, $e \vee a$ est un idempotent de $E(\vee)$, ce qui entraîne

$$e \vee a = (e \vee a) \vee (e \vee a) = a \vee (e \vee e) = a \vee e = e \ .$$

Comme dans le cas 1°, nous obtenons $e \wedge a = a$ ou $a \wedge e = a$.

Quel que soit le cas 1° ou 2°, le groupoïde pseudo-distributif à gauche $E(\wedge)$ est globalement idempotent. D'après le corollaire du lemme 5, $E(\wedge)$ est une grille commutative. D'après (1') ou un axiome déduit de (1') par un jeu quelconque de commutativité et ce même corollaire, $E(\vee)$ est une grille commutative. $E(\vee , \wedge)$ vérifie (1)(1')(2)(2')(3)(3')(6)(6')(7)(7').

Considérons alors un système de double composition $E(\vee , \wedge)$, satisfaisant à (9)(9'), à (0) ou à un axiome déduit de (0) par un jeu quelconque de commutativité, et à (1') ou à un axiome déduit de (1') par un jeu quelconque de commutativité, $E(\vee , \wedge)$ satisfait à (9)(9'), à (1), ou à un axiome déduit de (1) par un jeu quelconque de commutativité : d'après le lemme, $E(\vee , \wedge)$ vérifie (0)(1')(2)(2')(3)(3')(6)(6')(7)(7'). Comme (0) et (1') entraînent $x \vee (x \vee y) = x \vee y$, $E(\vee , \wedge)$ vérifie (4). D'après le théorème 6 de [2], $E(\vee , \wedge)$ est un treillis.

Notons que nous avons démontré au passage le théorème suivant :

THÉORÈME 19 ([8]). - Les ensembles d'axiomes $\{(1)(1')(9)(9')(4)\}$ et $\{(1)(1')(9)(9')(8)\}$ sont des ensembles de cinq axiomes indépendants pour les treillis.

THÉORÈME 20. - Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant aux cinq axiomes indépendants (1)(1')(9)(9')(5).

D'après le lemme du théorème 18, un système de double composition $E(\vee , \wedge)$ vérifiant (1)(1')(9)(9')(5) vérifie (1)(1')(7)(7')(3)(5). D'après le théorème 3, $E(\vee , \wedge)$ est un treillis.

THÉORÈME 21. - Les ensembles d'axiomes $\{(1)(1')(9)(7')(4)\}$ et $\{(1)(1')(9)(7')(8)\}$ sont des ensembles de cinq axiomes indépendants pour les treillis.

Nous utilisons le lemme suivant :

LEMME. - Il y a identité entre les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$, vérifiant (1)(1')(9)(7'), et les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$, vérifiant (1)(1')(2)(3)(6)(6')(7)(7').

Soit un système de double composition $E(\vee , \wedge)$ vérifiant (1)(1')(9)(7'). Pour tout élément a de E, $e = a \vee (a \vee a)$ est un idempotent de $E(\vee)$ [lemme 1 du théorème 17] tel que $a \vee e = e$ [lemme 6 du théorème 17], $e \wedge a = a$ et $e \wedge e = e$. Par suite, $a \wedge a = (e \wedge a) \wedge (e \wedge a) = (e \wedge e) \wedge a = e \wedge a = a$.

$E(\wedge)$ a tous ses éléments idempotents. Il en est de même du groupoïde pseudo-distributif à gauche $E(\vee)$, qui, de ce fait, est une grille commutative. $E(\vee , \wedge)$ vérifie (1)(1')(2)(3)(6)(6')(7)(7') (mais non nécessairement (3'), comme le montre l'exemple du système de double composition $E_6(\vee , \wedge)$ cité au paragraphe 1). La démonstration du théorème 21 résulte alors du théorème 4.

THÉORÈME 22. - Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ vérifiant les cinq axiomes indépendants (1)(1')(9)(7')(5).

D'après le lemme du théorème 21, un système de double composition $E(\vee , \wedge)$, vérifiant (1)(1')(9)(7')(5), vérifie (1)(1')(7)(7')(3)(5). D'après le théorème 3, $E(\vee , \wedge)$ est un treillis.

([8]) L'étude de l'indépendance des cinq axiomes des ensembles d'axiomes explicités dans chacun des théorèmes 19,...., 25 est faite après la démonstration du théorème 25.

THÉORÈME 23. - <u>Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition</u> $E(\vee , \wedge)$ <u>vérifiant les cinq axiomes indépendants (1)(1')(9)(7')(4')</u>.

D'après le lemme du théorème 21, un système de double composition $E(\vee , \wedge)$, vérifiant (1)(1')(9)(7')(4'), vérifie (1)(1')(7)(7')(3)(4'). D'après le théorème 7 de [2], $E(\vee , \wedge)$ est un treillis.

THÉORÈME 24. - <u>Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition</u> $E(\vee , \wedge)$ <u>vérifiant les cinq axiomes (1)(1')(9)(4')(5')</u>.

Ce théorème découle immédiatement du lemme du théorème 8 et du théorème 23.

THÉORÈME 25. - <u>Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition</u> $E(\vee , \wedge)$ <u>vérifiant les cinq axiomes indépendants (1)(1')(9)(2')(4')</u>.

Soient $E(\vee , \wedge)$ un système de double composition vérifiant (1)(1')(9)(2')(4') et x un élément de E. D'après (4'), $x \wedge (x \wedge x) = x \wedge x$, ce qui montre d'après (1') que $(x \wedge x) \vee x = x$. $E(\vee)$ est un groupoïde pseudo-distributif à gauche globalement idempotent, $E(\vee , \wedge)$ vérifie donc (1)(1')(2)(2')(3) et (4'). D'après le théorème 6 de [2], $E(\vee , \wedge)$ est un treillis.

Afin de montrer l'indépendance des cinq axiomes des ensembles d'axiomes explicités dans chacun des théorèmes 19,..., 25, nous utilisons les systèmes de double composition $E_0(\vee , \wedge)$, $E_1(\vee , \wedge)$, $E_4(\vee , \wedge)$, $E_7(\vee , \wedge)$ introduits au paragraphe 1.

$E_0(\vee , \wedge)$ et $E_4(\vee , \wedge)$ vérifient (9) et (9') ; $E_1(\vee , \wedge)$ et $E_7(\vee , \wedge)$ vérifient (9), mais non (9').

L'existence du système $E_0(\wedge , \vee)$ (resp. $E_0(\vee , \wedge)$) prouve que l'axiome (1) (resp. (1')) n'est pas entraîné par les quatre autres axiomes concernant chacun des ensembles d'axiomes explicités dans chacun des théorèmes 19,..., 25.

L'existence du système $E_7(\wedge , \vee)$ prouve que l'axiome (9) n'est pas entraîné par (1)(1')(9')(4)(8)(7')(2')(4'), c'est-à-dire par les quatre autres axiomes concernant chacun des ensembles d'axiomes explicités dans chacun des théorèmes 19, 21, 23, 25.

L'existence du système $E_1(\wedge , \vee)$ prouve que l'axiome (9) n'est pas entraîné par (1)(1')(9')(5)(7')(4')(5'), c'est-à-dire par les quatre autres axiomes concernant chacun des ensembles d'axiomes explicités dans chacun des théorèmes 20, 22, 24.

L'existence du système $E_1(\vee , \wedge)$ prouve que l'axiome (9')(7') ou (4') n'est pas entraîné par (1)(1')(9)(4)(5)(8)(5'), c'est-à-dire par les quatre autres axiomes concernant chacun des ensembles d'axiomes explicités dans chacun des théorèmes 19, 20, 21, 22, 24.

L'existence du système $E_7(\vee , \wedge)$ prouve que l'axiome (7')(5') ou (2') n'est pas entraîné par (1)(1')(9)(4'), c'est-à-dire par les quatre autres axiomes concernant chacun des ensembles d'axiomes explicités dans chacun des théorèmes 23, 24, 25.

L'existence du système $E_4(\vee , \wedge)$ prouve que l'axiome (4)(5)(8) ou (4') n'est pas entraîné par (1)(1')(9)(9')(7')(2'), c'est-à-dire par les quatre autres axiomes concernant chacun des ensembles d'axiomes explicités dans chacun des théorèmes 19, 20, 21, 22, 23, 25.

THÉORÈME 26. - <u>Parmi les cinq cent soixante ensembles d'axiomes constitués de (1)(1') et de trois autres axiomes choisis parmi les seize axiomes (2)...(9) (2')...(9'), seuls dix-huit d'entre eux sont des ensembles d'axiomes pour les treillis, à savoir les ensembles d'axiomes indépendants explicités dans l'énoncé des théorèmes 19,..., 25 et les ensembles ipso-duaux</u>.

Pour démontrer ce théorème nous avons établi un tableau analogue à ceux établis au paragraphe 1. Nous avons également utilisé le corollaire du théorème 11 :

COROLLAIRE. - <u>Il est impossible de caractériser les treillis en tant que systèmes de double composition</u> $E(\vee , \wedge)$ <u>vérifiant seulement (1)(1') et deux autres axiomes choisis parmi les seize axiomes (2)...(9) (2')...(9')</u>.

Ensemble (1)(1')(9) et	Exemple ou théorème	Ensemble (1)(1')(9) et	Exemple ou théorème
(2)(2')	E_4	(2')(3')	E_4
(2)(3')	E_4	(2')(4')	T
(2)(4')	E_7	(2')(5')	E_5
(2)(5')	E_1	(2')(6')	E_4
(2)(6')	E_4	(2')(7')	E_4
(2)(7')	E_4	(2')(8')	E_5
(2)(8')	E_5		
(2)(9')	E_4		

Ensemble (1)(1')(9) et	Exemple ou théorème	Ensemble (1)(1')(9) et	Exemple ou théorème
(3)(2')	E_4	(3')(4')	E_7
(3)(3')	E_4	(3')(5')	E_1
(3)(4')	E_7	(3')(6')	E_4
(3)(5')	E_1	(3')(7')	E_4
(3)(6')	E_4	(3')(8')	E_7
(3)(7')	E_4		
(3)(8')	E_5		
(3)(9')	E_4		
(4)(2')	E_5	(4')(5')	T
(4)(3')	E_1	(4')(6')	E_7
(4)(4')	E_7	(4')(7')	T
(4)(5')	E_1	(4')(8')	E_7
(4)(6')	E_5		
(4)(7')	T		
(4)(8')	E_5		
(4)(9')	T		
(5)(2')	E_5	(5')(6')	E_5
(5)(3')	E_1	(5')(7')	E_6
(5)(4')	E_7	(5')(8')	E_5
(5)(5')	E_1		
(5)(6')	E_5		
(5)(7')	T		
(5)(8')	E_5		
(5)(9')	T		
(6)(2')	E_4	(6')(7')	E_4
(6)(3')	E_4	(6')(8')	E_5
(6)(4')	E_7		
(6)(5')	E_5		
(6)(6')	E_4		
(6)(7')	E_4		
(6)(8')	E_5		
(6)(9')	E_4		

Ensemble (1)(1')(9) et	Exemple ou théorème	Ensemble (1)(1')(9) et	Exemple ou théorème
(7)(2')	E_4	(7')(8')	E_6
(7)(3')	E_4		
(7)(4')	E_7		
(7)(5')	E_1		
(7)(6')	E_4		
(7)(7')	E_4		
(7)(8')	E_5		
(7)(9')	E_4		
(8)(2')	E_5		
(8)(3')	E_1		
(8)(4')	E_7		
(8)(5')	E_1		
(8)(6')	E_5		
(8)(7')	T		
(8)(8')	E_5		
(8)(9')	T		

THÉORÈME 27. - Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant aux quatre axiomes indépendants (0)(1')(9)(7').

Si un système de double composition $E(\vee , \wedge)$ vérifie (0)(1')(9)(7'), il vérifie (1)(1')(2)(3)(6)(6')(7)(7') d'après le lemme du théorème 21. D'autre part l'ensemble des trois axiomes (0)(1')(3) entraîne l'axiome (4). D'après le théorème 21, $E(\vee , \wedge)$ est un treillis.

L'existence des systèmes $E_0(\wedge , \vee)$, $E_0(\vee , \wedge)$, $E_7(\wedge , \vee)$, $E_1(\vee , \wedge)$ montre l'indépendance des quatre axiomes (0)(1')(9)(7') ainsi que celle des quatre axiomes concernant le théorème 18.

THÉORÈME 28. - Parmi les cent vingt ensembles d'axiomes constitués de (0)(0') et de deux autres axiomes choisis parmi les seize axiomes (2)...(9) (2')...(9'), seuls trois d'entre eux sont des ensembles d'axiomes pour les treillis, à savoir les ensembles d'axiomes indépendants {(0)(0')(9)(9')} , {(0)(0')(9)(7')} , {(0)(0')(9')(7)}.

THÉORÈME 29. - Parmi les cent vingt ensembles d'axiomes constitués de (0)(1') et de deux autres axiomes choisis parmi les seize axiomes (2)...(9) (2')...(9'), seuls deux d'entre eux sont des ensembles pour les treillis, à savoir les ensembles d'axiomes indépendants {(0)(1')(9)(9')} , {(0)(1')(9)(7')} .

COROLLAIRE. - Il est impossible de caractériser les treillis en tant que systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant seulement à (0)(0') et à un autre axiome choisi parmi les seize axiomes (2)...(9) (2')...(9').

Les démonstrations des théorèmes 28, 29 et du corollaire reposent sur les résultats des théorèmes 18, 28, 15, 16, du corollaire du théorème 16 ainsi que sur les remarques suivantes :

Le système de double composition $E_5(\vee , \wedge)$ vérifie les axiomes (0)(0')(9)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(2')(5')(6')(8').

Le système de double composition $E_7(\vee , \wedge)$ vérifie les axiomes (0)(0')(9)(3')(4').

Le système de double composition $E_6(\wedge , \vee)$ vérifie les axiomes (0)(1')(9')(7).

BIBLIOGRAPHIE

[1] FELSCHER (Walter). - Ein unsymmetriches Assoziativ-Gesetz in der Verbandstheorie, Arch. der Math., t. 8, 1957, p. 171-174.

[2] RUEDIN (Jean). - Groupoïdes distributifs et axiomatique des treillis, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 20e année, 1966/67, n° 4, 36 p.

[3] SZÃSZ (G.). - On independent systems of axioms for lattices, Publ. Math., Debrecen, t. 10, 1963, p. 108-115.