Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean-Yves Chamard

Modules quasi-projectifs, projectifs et parfaits

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, nº 1 (1967-1968), exp. nº 8, p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_1_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, n° 8
15 janvier 1968

MODULES QUASI-PROJECTIFS, PROJECTIFS ET PARFAITS

par Jean-Yves CHAMARD

Nous nous proposons d'étudier les modules parfaits (modules dans lesquels il existe suffisamment de suppléments), et d'obtenir des propriétés duales de propriétés connues dans le cas des modules injectifs ou quasi-injectifs.

De nombreux résultats de cet exposé proviennent du travail de MIYASHITA [8].

Tables des matières

Pages

Tous les anneaux A considérés sont unitaires, et les modules des A-modules à gauche.

§ 1. Modules parfaits.

Dans ce premier paragraphe, nous rappelons un certain nombre de définitions et de théorèmes qui servent par la suite, provenant essentiellement du travail de BASS [1] ; nous donnons ensuite quelques propriétés des sous-modules superflus et parfaits.

Sous-module superflu d'un module. - Un sous-module S d'un module M est dit superflu dans M si, quel que soit le sous-module propre X de M, $X + S$ est différent de M.

- 0 est superflu dans tout module non nul.

- Si M est un module local (module possédant un plus grand sous-module propre), tout sous-module propre de M est superflu dans M.

PROPOSITION 1.

(i) La somme de deux sous-modules superflus de M est superflue dans M.

(ii) Si le module S est superflu dans M, il est superflu dans toute extension de M.

(iii) Soit φ un homomorphisme de M dans M', et S un sous-module superflu de M ; $\varphi(S)$ est un sous-module superflu de M'.

Démonstration.

(i) est évident.

(ii) Soit M_0 une extension de M, et X un sous-module de M_0 tel que $S + X = M_0$;

$$M = (S + X) \cap M = S + (X \cap M) \quad .$$

S étant superflu dans M, on a $X \cap M = M$, d'où

$$S \subset M \subset X , \qquad \text{ce qui implique } X = M_0 \ .$$

(iii) D'après (ii), il suffit de prouver que $\varphi(S)$ est superflu dans $\varphi(M)$; soit $N = \operatorname{Ker} \varphi$, et $X \subset M$ tel que

$$\varphi(X) + \varphi(S) = \varphi(M) \ ;$$

on a

$$X + N + S = M \quad ,$$

d'où

$$X + N = M \quad ,$$

et donc

$$\varphi(X) = \varphi(M) \quad .$$

Couverture projective d'un module M. — On appelle couverture projective d'un module M un épimorphisme p d'un module projectif P dans M, tel que $\operatorname{Ker} p$ soit superflu dans P.

On vérifie facilement l'unicité d'un tel module P à un isomorphisme près, mais l'existence n'est pas en général assurée.

L'étude des anneaux A tels que tout A-module à gauche admette une couverture projective a été faite par BASS [1], qui a démontré le théorème suivant (exposé par RENAULT dans [11]) :

THÉORÈME 1. - Soient A un anneau unitaire, R son radical de Jacobson ; les conditions suivantes sont équivalentes :

1° Tout A-module à gauche possède une couverture projective.

2° Les idéaux à droite monogènes de A vérifient la condition de chaîne descendante.

3° Les sous-modules de type fini de tout A-module à droite vérifient la condition de chaîne descendante.

4° (a) A ne possède pas une infinité d'idempotents orthogonaux.

(b) Tout A-module à gauche non nul contient un sous-module simple.

5° (a) A/R est un anneau semi-simple.

(b) Pour tout suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de R, il existe un n_0 tel que $a_0\, a_1 \ldots a_{n_0} = 0$ (on dit que R est T-nilpotent à gauche).

Un tel anneau est dit parfait à gauche. Les anneaux artiniens à gauche sont parfaits à gauche d'après 5°.

Au cours de la démonstration du théorème 1, BASS [1] prouve le résultat suivant, que nous utiliserons :

THÉORÈME 2. - P étant un module projectif non nul sur un anneau quelconque, on a :

$$R.P = R(P) \neq P \quad .$$

où $R(P)$ est l'intersection des sous-modules maximaux de P (avec la convention : $R(M) = M$ si M ne possède pas de sous-module maximal).

Supplément dans un module M. - Soit N un sous-module d'un module M ; on appelle supplément relatif de N dans M un sous-module K de M, minimal parmi les sous-modules X de M vérifiant

$$N + X = M$$

Un sous-module K de M est dit supplément dans M s'il est supplément d'un sous-module N de M.

Remarquons qu'un sous-module N de M ne possède pas nécessairement un supplément dans M, et qu'un tel supplément n'est pas nécessairement unique ; un sous-module S de M est superflu dans M si, et seulement si, il admet M pour supplément dans M. Tout facteur direct de M est supplément de tous ses supplémentaires.

LEMME 1. - Soient N et K deux sous-modules de M tels que $M = N + K$; les conditions suivantes sont équivalentes :

1° K est un supplément de N dans M.

2° $N \cap K$ est superflu dans K.

Démonstration.

1° ==> 2° : Soit Y un sous-module de K vérifiant

$$K = Y + (N \cap K) = (Y + N) \cap K \quad .$$

On a $K \subset Y + N$, d'où

$$M = N + Y \quad .$$

La minimalité de K implique que $K = Y$.

2° ==> 1° : Soit Y un sous-module de K vérifiant $M = N + Y$; on a

$$K = (N + Y) \cap K = Y + (N \cap K) = Y \ ,$$

ce qui prouve la minimalité de K.

LEMME 2. - Soient S un sous-module superflu de M, et K un supplément dans M ; $K + S/S$ est alors un supplément dans M/S.

Démonstration. - Soit K un supplément de N dans M ; on a

$$(K + S)/S + (N + S)/S = M/S \quad .$$

Soit $S \subset K_1 \subset K + S$ tel que $K_1/S + (N + S)/S = M/S$, on a

$$K_1 + N + S = M \ ,$$

et

$$K_1 = K_1 \cap (K + S) = (K_1 \cap K) + S \ ,$$

d'où

$$(K_1 \cap K) + N + S = M \ ,$$

et ainsi

$$(K_1 \cap K) + N = M \quad .$$

La minimalité de K prouve que $K_1 \cap K = K$, et donc que $K_1 = K + S$.

A-module à gauche parfait. - On dit qu'un A-module à gauche M est parfait si, quels que soient les sous-modules N_1 et N_2 de M tels que $M = N_1 + N_2$, il existe un supplément de N_1 dans M contenu dans N_2 .

GABRIEL a démontré dans sa thèse [4] que A est parfait à gauche si, et seulement si, tout A-module à gauche est parfait ; nous retrouvons ce résultat au paragraphe 5.

LEMME 3. - Tout supplément dans un module parfait est parfait.

Démonstration. - Soit K un supplément de N dans M , et considérons deux sous-modules X et Y de K tels que $K = X + Y$; on a $M = N + X + Y$.

M étant parfait, il existe un supplément Y_0 de $N + X$ dans M contenu dans Y .

$M = N + X + Y_0$ et $X + Y_0 \subset K$ prouvent que $K = X + Y_0$ (minimalité de K) ; il est en outre évident que Y_0 est minimal parmi les sous-modules Y' de K vérifiant $K = X + Y'$.

THÉORÈME 3. - Tout quotient d'un module parfait est parfait.

Démonstration. - Soit N un sous-module de M , et K un supplément de N dans M ; M/N est isomorphe à $K/N \cap K$. K est parfait d'après le lemme 3, et $N \cap K$ est superflu dans K d'après le lemme 1. Le lemme 2 prouve que les suppléments dans K se transportent bien par passage au quotient par $N \cap K$, ce qui démontre que $K/N \cap K$, et donc M/N , sont parfaits.

PROPOSITION 2. - Soit M un module parfait, S un sous-module superflu de M , et p la surjection canonique de M sur M/S ; l'image par p de tout supplément dans M est un supplément dans M/S , et réciproquement tout supplément dans M/S est l'image par p d'un supplément dans M .

Démonstration. - La première assertion a été démontrée au lemme 2, sans faire d'ailleurs l'hypothèse que M est parfait. Considérons réciproquement un supplément $p(T)$ de N/S dans M/S ; on a

$$T + N + S = M , \qquad \text{d'où} \quad T + N = M \quad .$$

Soit K un supplément de N contenu dans T ; on a

$$p(K) + p(N) = M/S , \qquad \text{d'où} \quad p(K) \subset p(T) \; ;$$

la minimalité de $p(T)$ prouve que $p(K) = p(T)$.

§ 2. Suppléments dans les modules parfaits.

Une étude approfondie de la notion de supplément dans un module parfait nous permet de dualiser dans ce paragraphe certains résultats de LESIEUR et CROISOT [7], FORT [3] et RENAULT [9].

Contraction superflue de N dans M. - Soit N un sous-module de M ; on appelle contraction superflue de N dans M un sous-module N_0 de N tel que N/N_0 soit un sous-module superflu de M/N_0 ; il revient au même de dire que, quel que soit le sous-module X de M contenant N_0, on a :

$$X + N = M \implies X = M \quad .$$

LEMME 4. - Soient $N_0 \subset N_1 \subset N_2$ trois sous-modules d'un module M. N_0 est contraction superflue de N_2 dans M si, et seulement si, N_0 (resp. N_1) est contraction superflue de N_1 (resp. N_2) dans M.

Démonstration. - Evidente.

LEMME 5. - Soit K un supplément de N dans M, et N_0 un sous-module de N ; N_0 est une contraction superflue de N dans M si, et seulement si, $N_0 + K = M$.

Démonstration.

La condition est nécessaire : $M = N + K = N + (N_0 + K)$ implique $N_0 + K = M$.

La condition est suffisante : Soit $N_0 \subset X \neq M$; on a $X \cap K \neq K$, car sinon K serait contenu dans X, et donc $N_0 + K = X = M$. On a donc (minimalité de K) :

$$M \neq N + (X \cap K) \quad .$$

Or

$$N_0 + (K \cap X) = (N_0 + K) \cap X = X$$

d'où

$$N + X \subset N + (K \cap X) \subset N + X$$

soit

$$N + X \neq M$$

PROPOSITION 3. - Soit M un A-module parfait ; les conditions suivantes sont équivalentes :

1° K est un supplément dans M ;

2° K ne possède pas de contraction superflue propre dans M.

Démonstration.

1° ==> 2° : Soit K un supplément d'un sous-module N de M, et T un supplément de K dans M contenu dans N ; il est évident que K est un supplément de T dans M.

Soit K_0 une contraction superflue de K dans M ; le lemme 5 prouve que $K_0 + T = M$; K étant un supplément de T, on a donc $K_0 = K$.

2° ==> 1° : Soient K ne possédant pas de contraction superflue propre dans M, T un supplément de K dans M, et K_0 un supplément de T dans M contenu dans K ; le lemme 5 prouve que $K = K_0$.

COROLLAIRE. - *Soient* K *un supplément dans un module parfait* M, *et* T *un supplément de* K *dans* M ; K *est alors un supplément de* T *dans* M.

Démonstration. - Evidente.

PROPOSITION 4. - *Soient* P *un sous-module d'un module* M, *et* $N_0 \subset N$ *deux sous-modules de* M *contenant* P ; N_0/P *est une contraction superflue de* N/P *dans* M/P *si, et seulement si,* N_0 *est une contraction superflue de* N *dans* M.

Démonstration. - Evidente.

COROLLAIRE. - *Soient* $P \subset K$ *deux sous-modules d'un module parfait* M ; *alors* K/P *est un supplément dans* M/P *dès que* K *est un supplément dans* M.

Il suffit d'appliquer les propositions 3 et 4.

THÉORÈME 4. - *Soient* M *un* A*-module parfait, et* K *un sous-module de* M ; *les assertions suivantes sont équivalentes* :

1° K *est un supplément dans* M.

2° *Pour tout couple* $N_0 \subset N$ *de sous-modules de* M, *tel que* N_0 *soit une contraction superflue de* N *dans* M, $N_0 \cap K$ *est une contraction superflue de* $N \cap K$ *dans* K.

Démonstration.

2° ==> 1° : Il suffit de prendre $N = K$, et d'appliquer la proposition 3.

1° ==> 2° : Soit K un supplément dans M, et supposons qu'il existe un couple $N_0 \subset N$ de sous-modules de M ne vérifiant pas la condition 2 ; il existe donc un sous-module propre X de $N \cap K$, contenant $N_0 \cap K$, tel que

$$X + (N_0 \cap K) = K = (X + N_0) \cap K ,$$

on a alors $K \subset X + N_0$.

Soit L un supplément de K dans M ; d'après le corollaire de la proposition 3, K est un supplément de L dans M , et donc $X + L$ est différent de M . Or

$$N = N \cap (K + L) \subset (N \cap K) + (N \cap L) \subset X + L \; ;$$

donc

$$X + L + N \neq M \quad .$$

Mais, K étant contenu dans $X + N_0$, on a $X + N_0 + L = M$ ce qui contredit l'hypothèse.

COROLLAIRE. - Soient M un A-module parfait, K un supplément dans M , et L un sous-module de M contenant K . L/K est un supplément dans M/K si, et seulement si, L est un supplément dans M .

Démonstration. - Nous savons déjà (corollaire de la proposition 4) que la condition est suffisante ; réciproquement supposons que L/K soit un supplément dans M/K ; soit L_0 une contraction superflue de L dans M .

$L_0 \cap K$ est une contraction superflue de $L \cap K = K$ dans K (théorème 4), ce qui prouve que $L_0 \cap K = K$, c'est-à-dire que K est contenu dans L_0 . La proposition 4 implique que L_0/K est une contraction superflue de L/K dans M/K , et donc que $L = L_0$.

PROPOSITION 5. - Soit M un module parfait ; pour tout sous-module N de M , il existe un supplément K dans M tel que K soit une contraction superflue de N dans M .

Démonstration. - Soit T un supplément de N dans M , et K un supplément de T dans M contenu dans N ; puisque $N + T = M$, le lemme 5 prouve que K est une contraction superflue de N dans M .

PROPOSITION 6. - Soient M un module parfait, K un supplément dans M , et N un sous-module de N contenant K ; il existe alors un supplément dans M contenant K , qui est contraction superflue de N dans M .

Démonstration. - M étant parfait, il en est de même de M/K (théorème 3) ; il existe donc (proposition 5) un supplément L/K dans M/K , contraction superflue de N/K dans M/K . Le théorème 4 et son corollaire prouvent alors le résultat.

PROPOSITION 7. - *Soient* $K \subset N$ *deux sous-modules d'un module parfait* M ; *les propriétés suivantes sont équivalentes* :

1° K *est une contraction superflue minimale de* N *dans* M ;

2° K *est une contraction superflue de* N *dans* M , *et c'est un supplément dans* M ;

3° K *est maximal parmi les suppléments dans* M *contenus dans* N .

Démonstration: - 1° $\iff$ 2° et 2° $\Longrightarrow$ 3° se déduisent facilement de la proposition 3 et du lemme 4. 3° $\Longrightarrow$ 2° résulte des propositions 6 et 5.

Il est intéressant de caractériser les modules parfaits tels que, pour tout sous-module N de M , il existe un unique supplément dans M qui soit contraction superflue de N dans M .

On dualise pour cela certains résultats de [9].

THÉORÈME 5. - *Soit* M *un module parfait ; les propriétés suivantes sont équivalentes* :

1° *La somme de tout ensemble de suppléments dans* M *est un supplément dans* M ;

2° *La somme de deux suppléments dans* M *est un supplément dans* M ;

3° *Pour tout sous-module* N *de* M , *il existe un et un seul supplément dans* M *qui soit contraction superflue de* N *dans* M ;

4° *Pour tout sous-module* N *de* M , *l'intersection de tout ensemble de contractions superflues de* N *dans* M *est une contraction superflue de* N *dans* M .

Démonstration. - 1° $\Longrightarrow$ 2° est évident.

2° $\Longrightarrow$ 3° : Soit $N \subset M$; la proposition 5 implique l'existence d'au moins un supplément convenable ; supposons qu'il en existe deux K_1 et K_2 ; $K_1 + K_2$ étant contenu dans N , le lemme 4 prouve que K_1 et K_2 sont contractions superflues de $K_1 + K_2$ dans M ; puisque par hypothèse $K_1 + K_2$ est un supplément dans M , la proposition 3 montre que

$$K_1 = K_1 + K_2 = K_2 \quad .$$

3° $\Longrightarrow$ 1° : Soit $(K_i)_{i \in I}$ un ensemble de sous-modules suppléments dans M , et soit $N = \bigcap_{i \in I} K_i$; la proposition 6 prouve l'existence pour tout i d'un supplément L_i dans M , contenant K_i , contraction superflue de N dans M . L'hypothèse entraîne que tous les L_i sont égaux, et donc que $N = L_i$ est un supplément dans M .

3° ==> 4° : Soit $(N_i)_{i \in I}$ un ensemble de contractions superflues de N dans M, et pour tout $i \in I$, soit K_i un supplément dans M, contraction superflue de N_i dans M ; le lemme 2 démontre que les K_i sont contractions superflues de N dans M, et donc que $K_i = K_j$ pour tout couple (i, j) ; puisque $K_i \subset \bigcap_{i \in I} N_i$, le lemme 4 prouve la propriété.

4° ==> 3° : Soient K_1 et K_2 deux suppléments dans M, contractions superflues de N dans M ; par hypothèse, $K_1 \cap K_2$ est contraction superflue de N dans M, donc (lemme 4) de K_1 et de K_2 dans M. La proposition 3 implique que

$$K_1 = K_1 \cap K_2 = K_2 \quad .$$

Sous-modules équivalents d'un module M. – On dit que deux sous-modules N et N' de M sont *équivalents* s'ils ont même ensemble de sous-modules suppléments dans M.

LEMME 6. – *Soient* $N \subset N'$ *deux sous-modules d'un module parfait* M ; *les assertions suivantes sont équivalentes* :

1° N *est équivalent à* N' ;

2° N *est une contraction superflue de* N' *dans* M.

Démonstration. – 1° ==> 2° résulte du lemme 5.

2° ==> 1° : Le lemme 5 prouve que tout supplément de N' dans M est un supplément de N dans M ; réciproquement considérons un supplément K de N dans M, et soit K' un sous-module de K tel que $N' + K' = M$; on a $N' + K' + N = M$, d'où $K' + N = M$, c'est-à-dire $K = K'$. K est donc un supplément de N' dans M.

PROPOSITION 8. – *Deux sous-modules* N *et* N' *d'un module parfait* M *sont équivalents si, et seulement si,* N *et* N' *sont contractions superflues de* $N + N'$ *dans* M.

Démonstration.

La condition est nécessaire : Soit X un sous-module de M contenant N tel que $X + N + N' = M = X + N'$; il existe un supplément K de N' dans M contenu dans X ; K étant par hypothèse un supplément de N dans M, on a

$$M = K + N \subset X \,, \qquad \text{d'où } X = M \quad .$$

La condition est suffisante : Si N et N' sont contractions superflues de $N + N'$ dans M, la relation $X + N = M$ est en effet équivalente à $X + N + N' = M$ donc à $X + N' = M$.

THÉORÈME 6. - Soit M un A-module parfait ; les conditions suivantes sont équivalentes :

1° Toute somme de sous-modules suppléments dans M est un supplément dans M ;

2° Si N , N' et P sont des sous-modules de M tels que N contienne P et soit équivalent à N' , alors $N' \cap P$ est équivalent à P .

3° Si N , N' , P et P' sont des sous-modules de M tels que N soit équivalent à N' et P équivalent à P' , alors $N \cap P$ est équivalent à $N' \cap P'$.

Démonstration.

1° ==> 2° : On note $\overline{N}$ l'unique supplément dans M qui est contraction superflue de N dans M . On a $\overline{P} \subset \overline{N}$; $\overline{N} = \overline{N'}$ d'après la proposition 8. On a de plus $\overline{P} = \overline{P} \quad \overline{N'} \subset P \cap N' \subset P$, ce qui prouve que $P \cap N' = (P \cap N') + P$ est une contraction superflue de P dans M , et donc (proposition 8) que P est équivalent à $P \cap N'$.

2° ==> 3° : En remarquant que $N \cap P$ est contenu dans N , on voit que $N \cap P \cap N'$ est équivalent à $N \cap P$; de même, $N' \cap P$ étant contenu dans N' , $N' \cap P \cap N$ est équivalent à $N' \cap P$, et finalement $N \cap P$ est équivalent à $N' \cap P$. On termine la démonstration en permutant N (resp. N') avec P (resp. P').

3° ==> 2° : Trivial.

2° ==> 1° : Soient K_1 et K_2 deux suppléments dans M , contractions superflues d'un sous-module N de M ; K_1 étant contenu dans N et K_2 étant équivalent à N (lemme 5), $K_1 \cap K_2$ est équivalent à K_2 , donc (proposition 8) : $(K_1 \cap K_2) + K_2 = K_2$ est une contraction superflue de K_1 dans M , ce qui prouve (proposition 3) que $K_1 = K_2$, et donc (théorème 5) que la condition 1 est vérifiée.

COROLLAIRE. - Soit M un A-module parfait ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° La somme de toute famille de suppléments dans M est un supplément dans M ;

2° Si N (resp. P) est une contraction superflue de N' (resp. P') dans M , $N \cap P$ est une contraction superflue de $N' \cap P'$ dans M .

Démonstration. - 1° ==> 2° se déduit trivialement du théorème 6 et du lemme 5.

2° ==> 1° : Soient N un sous-module de P , et N' un module équivalent à N ; démontrons que la condition 2 du théorème 5 est vérifiée ; N étant équivalent à N' , $N \cap N'$ est équivalent à N , donc (lemme 5) est une contraction superflue de N dans M .

$N' \cap P = N \cap N' \cap P$ est alors une contraction superflue de $N \cap P = P$ dans M, donc est équivalent à P.

§ 3. Modules quasi-projectifs.

Nous étudions dans ce paragraphe les modules quasi-projectifs, en nous inspirant des travaux de FAITH et UTUMI [2] et de G. RENAULT [9] sur les modules quasi-injectifs.

Définition. - Un module M est dit quasi-projectif si, pour tout sous-module N de M, et tout morphisme f de M dans M/N, il existe un endomorphisme g de M tel que $p \circ g = f$, où p est la surjection canonique de M sur M/N.

THÉORÈME 7. - Soit M un module admettant une couverture projective $P \xrightarrow{p} M \to 0$; et $S = \operatorname{Ker} p$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° M est quasi-projectif ;

2° Pour tout endomorphisme φ de P, $\varphi(S) \subset S$.

Démonstration.

1° $\Longrightarrow$ 2° : Soit $\varphi \in \operatorname{End} P$, et soit $T = S + \varphi(S)$. On note π la surjection canonique de P/S sur P/T, et f l'homomorphisme de P/S dans P/T défini par $f(p(x)) = \pi \circ p(\varphi(x))$.

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[d, "p"] \arrow[ddll, dashed, "\psi"'] & \\
 & & P/S \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"'] & \\
P \arrow[r, "p"] & P/S \arrow[r, "\pi"] & P/T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

P/S étant quasi-projectif, il existe un endomorphisme g de P/S tel que $\pi \circ g = f$; P étant projectif, il existe un endomorphisme ψ de P tel que $p \circ \psi = g \circ p$.

$p \circ \psi(S) = g \circ p(S) = 0$ implique que $\psi(S) \subset \operatorname{Ker} p = S$; de plus, $\pi \circ p \circ \psi = f \circ p = \pi \circ p \circ \varphi$ implique que $(\psi - \varphi)(P) \subseteq \operatorname{Ker}(\pi \circ p) = T$.

Soit x un élément quelconque de P :

$$(\psi - \varphi)(x) = \varphi(s) + s' ,$$

puisque $(\psi - \varphi)(x)$ appartient à T ;

$$(\psi - \varphi)(x + s) = \psi(s) + s' \in S \quad ,$$

$x + s$ appartient donc à $(\psi - \varphi)^{-1}(S)$, ce qui prouve que

$$P = (\psi - \varphi)^{-1}(S) + S = (\psi - \varphi)^{-1}(S) \quad ,$$

puisque S est superflu dans P .

Ainsi $(\psi - \varphi)(S) \subset (\psi - \varphi)(P) \subset S$. Or $\psi(S) \subset S$, ce qui prouve que $\varphi(S) \subset S$.

2° $\Longrightarrow$ 1° : Soient N un sous-module de M , π la projection de M sur M/N et f un homomorphisme de M dans M/N . P étant projectif, il existe un endomorphisme φ de P tel que $\psi \circ p \circ \varphi = f \circ p$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[d, "p"] \arrow[dlll, dashed, "\varphi"'] & \\
 & & & M \arrow[d, "f"] & \\
P \arrow[rr, "p"] & & M \arrow[r, "\pi"] & M/N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On définit alors un endomorphisme g de M en prenant :

$$g(p(x)) = p \circ \varphi(x) \quad ;$$

ce qui a bien un sens, puisque $\varphi(\text{Ker } p) \subset \text{Ker } p$.

Remarque. - Dans la démonstration 2° $\Longrightarrow$ 1°, nous n'utilisons pas le fait que S soit superflu dans P ; on démontre ainsi que tout quotient d'un module quasi-projectif M par un sous-module stable par $\text{End}(M)$ est quasi-projectif.

PROPOSITION 9. - Soit P un module projectif sur un anneau parfait ; tout supplément dans P est facteur direct de P .

Démonstration. - Soit K un supplément dans P ; A étant parfait, P/K admet une couverture projective P_1 , qui est isomorphe à un quotient P/K_1 de P/K (il suffit de considérer le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, dashed, "f"'] & \\
P_1 \arrow[r, "p"] & P/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$p(P_1) = p(\text{Im } f)$ implique $P_1 = \text{Ker } p + \text{Im } f$; $\text{Ker } p$ étant superflu dans P_1 , on en déduit que f est surjectif, et donc admet une rétraction, puisque P_1 est projectif).

$\operatorname{Ker} p$ est alors isomorphe à K/K_1 , qui doit être superflu dans P/K_1 ; ceci prouve que K_1 est une contraction superflue de K dans P . On a alors $K = K_1$, donc P/K est un module projectif, et ainsi K est facteur direct dans P .

Remarque. - Par la suite, nous aurons besoin de ce résultat sous la seule hypothèse : P est un module projectif parfait. Nous donnons une démonstration de la proposition dans ce cas, démonstration plus difficile due à MIYASHITA [8].

THÉORÈME 8. - *Soit* P *un module projectif parfait ; tout supplément dans* P *est facteur direct.*

Démonstration. - Soit K un supplément dans P , et T un supplément de K dans P . On sait que K est un supplément de T dans K , et donc (lemme 1) que $K \cap T$ est superflu dans K .

Soit π la surjection canonique de P sur P/T , et f la restriction de π à K ; P étant projectif, il existe un morphisme g de P dans K tel que $f \circ g = \pi$.

$$f(g(P)) = \pi(P) = P/T = f(K)$$

implique $K = g(P) + \operatorname{Ker} f$;

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "\pi"] & \\
K \arrow[r, "f"] & P/T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Or $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} \pi \cap K = T \cap K$ est superflu dans K ; g est donc surjectif :

$$K = g(P) = g(K) + g(T) \quad .$$

On a $g(T) \subset \operatorname{Ker} f \subset T$, donc $M = K + T = g(K) + T$, et puisque $g(K) \subset K$, la minimalité de K implique

$$g(K) = K \ , \qquad \text{d'où} \quad g(T) \subset g(K) \quad .$$

Soit alors $x = k + t$ $(k \in K \ , \ t \in T)$ un élément de M ; $g(t) \in g(K)$ implique $t = k_1 + t_1$ avec $t_1 \in \operatorname{Ker} g$ et $k_1 \in K$. On a donc $M = K + \operatorname{Ker} g$; mais, $\operatorname{Ker} g \subset T$ implique $\operatorname{Ker} g = T = \operatorname{Ker}(f \circ g)$.

g étant surjectif, on en déduit que $\operatorname{Ker} f = K \cap T = 0$, d'où $P = K \oplus T$.

THÉORÈME 9. - *Soit* M *un module admettant une couverture projective parfaite* $P \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$; *soit* $\mathcal{C}$ *la sous-catégorie pleine de* Mod A *dont les objets sont les* M/N , *avec* $N \subset M$. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

1° M <u>est quasi-projectif</u> ;

2° <u>Les objets projectifs de</u> $\mathcal{C}$ <u>sont les</u> M/K , <u>où</u> K <u>est un supplément dans</u> M .

<u>Démonstration</u>.

1° $\Longrightarrow$ 2° : Soit N un sous-module de M , π la projection canonique de M sur M/N , et soit f un morphisme de M/K dans M/N . K étant un supplément dans M , il existe un supplément K_1 dans P tel que $K = K_1 + S/S$ (proposition 2) ; K_1 est facteur direct de P (théorème 8), donc P/K_1 est un module projectif, $K_1 + S/K_1$ étant superflu dans M/K_1 , P/K_1 est une couverture projective de $M/K \approx P/K_1 + S$. P/K_1 étant projectif, il existe un morphisme φ de P/K_1 dans P rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & P/K_1 \arrow[d, "p_1"] \arrow[dddlll, dashed, "\varphi"'] \\
 & & & M/K \approx P/(K_1 + S) \arrow[d, "f"] \arrow[ddll, dashed, "g"'] \\
 & & & \\
P \arrow[r, "p"] & P/S = M \arrow[rr, "\pi"] & & M/N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Soit ω la surjection canonique de P sur P/K_1 , et $\psi = \varphi \circ \omega$; $\omega(S) \approx K_1 + S/K_1 = \mathrm{Ker}\ p_1$, et $\varpi \circ \omega(S) \subset S$ puisque M est quasi-projectif (théorème 7). On a donc

$$\varpi(\mathrm{Ker}\ p_1) \subset \mathrm{Ker}\ p \quad ,$$

ce qui permet de définir un morphisme g de M/K dans M en prenant

$$g(p_1(x)) = p(\varphi(x)) \quad .$$

On a alors $f \circ p_1 = \pi \circ p \circ \varpi = \pi \circ g \circ p_1$ et, p_1 étant surjectif, $f = \pi \; g$.

2° $\Longrightarrow$ 1° : Il suffit de prendre $K = 0$.

PROPOSITION 10. - <u>Soit</u> M <u>un module quasi-projectif</u> ;

(i) <u>Tout facteur direct de</u> M <u>est quasi-projectif</u>.

(ii) <u>Tout quotient de</u> M <u>par un sous-module de</u> M <u>stable par</u> $\mathrm{End}\ M$ <u>est quasi-projectif</u>.

<u>Démonstration</u>. - (i) est évident. (ii) a été vu au théorème 7.

THÉORÈME 10. - *Soient* M *un module quasi-projectif, et* $\mathfrak{A}$ *l'anneau de ses endomorphismes. Le radical de Jacobson de* $\mathfrak{A}$ *est égal à l'ensemble des endomorphismes* φ *de* M *tels que* $\operatorname{Im}\varphi$ *soit un sous-module superflu de* M .

Démonstration. - Soit $\varphi \in \mathfrak{A}$ tel que $\operatorname{Im}\varphi$ soit superflu dans M , et soit $\psi \in \mathfrak{A}$; $M = \operatorname{Im}(1 - \varphi \circ \psi) + \operatorname{Im}\varphi$ implique $M = \operatorname{Im}(1 - \varphi \circ \psi)$; $1 - \varphi \circ \psi$ est donc inversible à droite (considérer le diagramme ci-dessous)

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[d, "1_M"] \arrow[dl, dashed] \\
M \arrow[r, "1 - \varphi \circ \psi"] & M
\end{tikzcd}$$

ce qui prouve que $\varphi \in \mathcal{R}(\mathfrak{A})$.

Soit $\varphi \in \mathfrak{A}$ tel que $\operatorname{Im}\varphi$ ne soit pas superflu dans M ; il existe un sous-module propre N de M tel que $M = N + \operatorname{Im}\varphi$; soit p la projection canonique de M sur M/N . $p \circ \varphi$ étant un épimorphisme, il existe $\theta \in \mathfrak{A}$ tel que $p = p \circ \varphi \circ \theta$

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "p"] \arrow[dl, dashed, "\theta"'] & \\
P \arrow[r, "p \circ \varphi"] & P/N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On a donc $p[\operatorname{Im}(1 - \varphi \circ \theta)] = 0$, soit

$$\operatorname{Im}(1 - \varphi \circ \theta) \subset N \neq M \quad ,$$

ce qui prouve que $\varphi \notin \mathcal{R}(\mathfrak{A})$.

LEMME 7. - *Soit* M *un* A*-module quelconque*

$$\mathfrak{J}(M) = \{\varphi \in \operatorname{End} M \mid \operatorname{Im}\varphi \text{ superflu dans } M\}$$

est un idéal bilatère de $\operatorname{End} M$.

Démonstration. - Il est évident que c'est un idéal à droite, puisque tout sous-module d'un superflu dans M est superflu dans M ; de plus $\operatorname{Im}(\psi \circ \varphi) = \psi(\operatorname{Im}\varphi)$ est superflu dans M , d'après la proposition 1.

Anneau co-associé à M . - *On appelle anneau co-associé à un module* M *l'anneau quotient* $\operatorname{End} M/\mathfrak{J}(M)$.

PROPOSITION 11. - *Si* P *est une couverture projective d'un module* M . $\mathcal{C}_0(M)$ *est isomorphe à un sous-anneau de* $\mathcal{C}_0(P)$.

Démonstration. - Soient $f \in \mathrm{End}\, M$, et $\varphi \in \mathrm{End}\, P$ tel que $f \circ p = p \circ \varphi$ (un tel φ existe toujours, puisque P est projectif).

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "p"] \arrow[ddl, dashed, "\varphi"'] & \\
& M \arrow[d, "f"] & \\
P \arrow[r, "p"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si φ_1 et φ_2 sont tels que $p \circ \varphi_1 = p \circ \varphi_2$, $\mathrm{Im}(\varphi_1 - \varphi_2) \subseteq \mathrm{Ker}\, p$ est superflu dans P , et donc les images $\overline{\varphi}_1$ et $\overline{\varphi}_2$ de φ_1 et φ_2 dans $\mathcal{C}_0(P)$ sont égales.

Considérons alors l'application Ω de $\mathrm{End}(M)$ dans $\mathcal{C}_0(P)$ défini par

$$\Omega(f) = \overline{\varphi}$$

on vérifie trivialement que Ω est un morphisme d'anneaux ; en outre

$$\begin{aligned}
\Omega(f) = 0 \iff & \varphi(P) \text{ est superflu dans } P \\
\iff & \varphi(P) + S \text{ est superflu dans } P \\
\iff & [\varphi(P) + S]/S \text{ est superflu dans } P/S \\
\iff & p \circ \varphi(P) \text{ est superflu dans } M \\
\iff & \varphi(M) \text{ est superflu dans } M \\
\iff & \varphi \in \mathfrak{J}(M)
\end{aligned}$$

COROLLAIRE. - *Si* M *est un module quasi-projectif admettant une couverture projective* P , $\mathcal{C}_0(M)$ *est isomorphe à* $\mathcal{C}_0(P)$.

Démonstration. - Il suffit de prouver que l'application Ω est surjective, ce qui résulte immédiatement de la quasi-projectivité de M .

THÉORÈME 11. - *L'anneau co-associé à un module quasi-projectif parfait est régulier au sens de von Neumann.*

Démonstration. - On rappelle qu'un anneau $\mathfrak{A}$ est dit régulier au sens de von Neumann si, pour tout élément a de $\mathfrak{A}$, il existe un élément x de $\mathfrak{A}$ vérifiant $a = axa$.

Soit $\overline{\varphi}$ un élément de $\mathcal{C}_0(M)$; on peut supposer $\overline{\varphi} \neq 0$, c'est-à-dire $\mathrm{Im}\, \varphi$ non superflu dans M . Soit K un supplément de $\mathrm{Im}\, \varphi$ dans M , qui est donc différent de M .

Soit p la projection de M sur M/K ; $p \circ \varphi$ étant surjectif, il existe un endomorphisme ψ de M tel que $p \circ \varphi \circ \psi = p$;

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "p"] & \\
M \arrow[r, "p \circ \varphi"] & M/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

on a donc $p[\varphi \circ \psi \circ \varphi - \varphi] = 0$ soit $\mathrm{Im}(\varphi \circ \psi \circ \varphi - \varphi) \subset K \cap \mathrm{Im}\,\varphi$, qui est superflu dans K (lemme 1), donc dans M, ce qui prouve que $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}\cdot\overline{\psi}\cdot\overline{\varphi}$.

§ 4. Somme des sous-modules superflus d'un module.

Dans ce paragraphe, nous mettons en relief (en suivant les travaux de MIYASHITA [8]) le rôle joué par la somme des sous-modules superflus d'un module.

Σ-radical d'un module. - Soit M un A-module ; on appelle Σ-radical de M, et l'on note $\Sigma(M)$, la somme des sous-module superflus de M .

PROPOSITION 12.

(i) Si $N \subset M$, on a $\Sigma(N) \subset \Sigma(M)$;

(ii) Si φ est un morphisme de M dans M', on a $\varphi[\Sigma(M)] \subset \Sigma(M')$;

(iii) Tout sous-module de type fini de $\Sigma(M)$ est superflu dans M .

Démonstration. - (i) et (ii) résultent trivialement de la proposition 1. (iii) est évident.

PROPOSITION 13. - Soit K un supplément dans M ; on a $\Sigma(K) = \Sigma(M) \cap K$.

Démonstration. - Il suffit de prouver que $\Sigma(K)$ contient $\Sigma(M) \cap K$; soient donc S un sous-module superflu de M, et X un sous-module de K vérifiant :

$$X + (S \cap K) = K ;$$

on a $(X + S) \cap K = K$, d'où $K \subset X + S$.

K est par hypothèse un supplément dans M d'un sous-module N de M :

$$M = N + K = X + S + N = X + N \quad .$$

La minimalité de K implique $X = K$, ce qui prouve que $S \cap K$ est superflu dans K, c'est-à-dire que $S \cap K$ appartient à $\Sigma(K)$.

COROLLAIRE. - $\Sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} [\Sigma(M_i)]$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$; $\Sigma(M)$ étant stable par $\operatorname{End} M$ (proposition 1, (iii)), $\Sigma(M) = \bigoplus_{i\in I} (\Sigma(M) \cap M_i)$; M_i étant facteur direct de M, c'est un supplément dans M, et donc (proposition 13) $\Sigma(M) \cap M_i = \Sigma(M_i)$.

PROPOSITION 14. - $\Sigma(M)$ <u>est un sous-module du radical de Jacobson</u> $R(M)$.

<u>Démonstration</u>. - Soit S un sous-module superflu de M, et M_0 un sous-module maximal de M ; $S + M_0$ ne pouvant être égal à M, S est contenu dans M_0 . Tout sous-module superflu de M est donc contenu dans tout sous-module maximal de M . (Rappelons que si M ne possède pas de sous-module maximal, on prend $R(M) = M$, et qu'alors la proposition est triviale.)

THÉORÈME 12. - <u>Soit</u> M <u>un</u> A-<u>module ; les assertions suivantes sont équivalentes</u>:

1° $\Sigma(M) \neq M$;

2° $R(M) \neq M$;

<u>si ces conditions sont réalisées, on a de plus</u> $\Sigma(M) = R(M)$.

<u>Démonstration</u>. - 2° $\Longrightarrow$ 1° résulte trivialement de la proposition 14.

1° $\Longrightarrow$ 2° : Soit M tel que $\Sigma(M) \neq M$, et prouvons que $\Sigma(M) = R(M)$; soit un élément x de M qui n'appartient pas à $\Sigma(M)$: Ax n'étant pas superflu dans M, il existe un sous-module propre N de M tel que $N + Ax = M$.

M/N étant monogène, il possède un sous-module maximal M_0/N ; en outre x n'appartient pas à M_0, ce qui prouve que x n'appartient pas à $R(M)$.

COROLLAIRE 1. - <u>Si</u> P <u>est un</u> A-<u>module projectif, on a</u>

$$R.P = R(P) = \Sigma(P) \neq P \quad .$$

(Ceci résulte du théorème 2.)

COROLLAIRE 2. - <u>Pour tout</u> A-<u>module</u> M, <u>on a</u>

$$\Sigma(M/\Sigma(M)) = 0 \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - La propriété est évidente si $\Sigma(M) = M$, sinon $R(M) = \Sigma(M) \neq 0$. On sait que $R(M/R(M)) = 0 \neq M/R(M)$, ce qui prouve que l'on a

$$\Sigma(M/\Sigma(M)) = \Sigma(M/R(M)) = R(M/R(M)) = 0 \quad .$$

Remarques. - Le théorème précédent invite à l'étude des anneaux A tels que tout A-module M non nul vérifie la condition 2, c'est-à-dire contienne un sous-module maximal ; cette étude à été entreprise par G. RENAULT dans [10], où il caractérise les anneaux commutatifs vérifiant cette propriété : ce sont les anneaux A tels que R soit T-nilpotent et A/R régulier.

Rappelons aussi la conjecture de BASS [1] : dire qu'un anneau A est parfait à gauche équivaut-il à ce que tout A-module à gauche non nul contienne un sous-module maximal, et que A ne possède pas une infinité d'idempotents orthogonaux ?

Ce problème est résolu dans le cas commutatif ([10]), mais il est toujours ouvert dans le cas général (la condition est évidemment nécessaire, comme le prouvent le théorème 1 et la proposition 18).

Signalons enfin qu'un anneau A est tel que, pour tout A-module non nul, $RM \neq M$, si, et seulement si, R est T-nilpotent à gauche.

THÉORÈME 13. - Les propriétés suivantes sont équivalentes pour un A-module M :

1° M est semi-simple ;

2° M est parfait, et $\Sigma(M) = 0$.

Démonstration. - 1° ==> 2° est évident.

2° ==> 1° : Soit N un sous-module de M , et K un supplément de N dans M ; le lemme 1 prouve que $N \cap K \subset \Sigma(K) = \Sigma(M) \cap K = 0$, ce qui implique que N est facteur direct de M .

PROPOSITION 15. - Soit M un A-module quasi-projectif, et $\mathfrak{A} = \mathrm{End}_A(P)$; on a alors

$$\Sigma(\mathfrak{A}_d) = R(\mathfrak{A}) \quad .$$

Démonstration. - Nous savons que $\Sigma(\mathfrak{A}_d) \subset R(\mathfrak{A})$ (proposition 14) ; réciproquement considérons un élément φ de $R(\mathfrak{A})$, et soit $\mathfrak{a}$ un idéal à droite de $\mathfrak{A}$ vérifiant l'égalité $\mathfrak{A} = \varphi\mathfrak{A} + \mathfrak{a}$; il existe des éléments ψ de $\mathfrak{A}$ et θ de $\mathfrak{a}$ tels que

$$1_M = \varphi \circ \psi + \theta \ ;$$

on a donc $M = \varphi(\psi(M)) = \theta(M)$.

De plus, φ appartenant à $R(\mathfrak{A})$, on sait (théorème 10) que $\varphi(M)$ est superflu dans M ; il en est donc de même pour $\varphi(\psi(M))$, ce qui prouve que θ est surjectif.

M étant quasi-projectif, il existe alors un élément ω de $\mathfrak{A}$ tel que $\theta \circ \omega = 1_M$, on a donc $\theta\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, d'où $\mathfrak{a} = \mathfrak{A}$, ce qui prouve que $\varphi\mathfrak{A}$ est superflu dans $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire que φ appartient à $\Sigma(\mathfrak{A}_d)$.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "\omega"'] \arrow[d, "1_M"] & \\ M \arrow[r, "\theta"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 16. - *Si* M *est un* A-*module quasi-projectif tel que* $\Sigma(M)$ *soit superflu dans* M, *l'anneau* $\mathcal{C}_0(M)$ *est isomorphe à l'anneau des endomorphismes de* $M/\Sigma(M)$.

Démonstration. - Soit $\operatorname{End} M \xrightarrow{\omega} \operatorname{End}(M/\Sigma(M))$ défini par $\omega(\varphi)(p(x)) = p(\varphi(x))$, où p est la projection canonique de M sur $M/\Sigma(M)$; ω est bien une application, puisque pour tout φ, $\varphi(\Sigma(M)) \subset \Sigma(M)$ (proposition 12). ω est évidemment un morphisme d'anneaux, qui est surjectif puisque M est quasi-projectif.

En outre, $\varphi \in \operatorname{Ker} \omega$ si, et seulement si, $\varphi(M) \subset \Sigma(M)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\operatorname{Im} \varphi$ est superflu dans M ; on déduit du théorème 10 que $\operatorname{Ker} \omega = \mathfrak{J}(M)$ donc que $\mathcal{C}_0(M) \approx \operatorname{End}(M/\Sigma(M))$.

Remarquons que si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que M est parfait, $M/\Sigma(M)$ est un module semi-simple, et donc $\mathcal{C}_0(M)$ est isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un module semi-simple.

§ 5. Modules projectifs parfaits.

Le travail que nous venons de faire dans les paragraphes précédents nous permet maintenant d'aborder l'étude des modules projectifs parfaits ; nous en donnons deux caractérisations (théorèmes 14 et 16), ainsi que la structure de l'anneau co-associé à un module projectif parfait (théorème 15).

LEMME 8. - *Soient* M *un* A-*module admettant une couverture projective et* f *un épimorphisme d'un module* M' *sur* M ; *il existe alors un sous-module* M'_0 *de* M' *qui est minimal parmi les sous-modules* X *de* M' *vérifiant* $f(X) = M$.

Démonstration. - Soient $P \xrightarrow{p} M \to 0$ une couverture projective de M, et g un morphisme de P dans M' tel que $f \circ g = p$; on a $f \circ g(P) = M$; considérons un sous-module $g(P')$ de $g(P)$ tel que $f \circ g(P') = M$: il vérifie $p(P') = M = p(P)$ d'où $P = P' + \operatorname{Ker} p = P'$ puisque $\operatorname{Ker} p$ est superflu dans P ; $M'_0 = g(P)$ convient donc.

THÉORÈME 14. - Soit P un A-module projectif ; les assertions suivantes sont équivalentes :

1° P est parfait ;

2° Tout quotient de P admet une couverture projective.

Démonstration.

1° $\Longrightarrow$ 2° : Soit N un sous-module de P ; P étant parfait, il existe un supplément K dans P qui est une contraction superflue de N dans P (proposition 5) ; en outre, K est un facteur direct de P (théorème 8), c'est-à-dire que P/K est un A-module projectif. La projection canonique $P/K \xrightarrow{p} P/N \to 0$ est donc une couverture projective de P/N, puisque $\operatorname{Ker} p = N/K$ est superflu dans P/K.

2° $\Longrightarrow$ 1° : Soient N_1 et N_2 deux sous-modules de P tels que $P = N_1 + N_2$; P/N_1 admettant par hypothèse une couverture projective, il existe (lemme 8) un sous-module N_2' de N_2, minimal parmi les sous-modules X de N_2 vérifiant $\pi'(X) = P/N_1$, où π' est la restriction à N_2 de la surjection canonique π de P sur P/N_1.

Or $\pi(X) = \pi'(X) = P/N_1 = \pi(P)$ équivaut à $P = X + \operatorname{Ker} \pi = X + N_1$. N_2' est donc un supplément de N_1 dans P contenu dans N_2.

Remarque 1. - Nous retrouvons ainsi le fait signalé au paragraphe 1 qu'un anneau A est parfait à gauche si, et seulement si, tout A-module à gauche est parfait.

Remarque 2. - Nous savons que l'existence de compléments dans tout A-module M résulte de ce que la catégorie $\underset{\sim}{\text{Mod}}\ A$ vérifie l'axiome A.b.5 [6] [pour tout objet M, pour toute famille filtrante croissante de sous-objets $(X_i)_{i\in I}$ de M, et pour tout sous-objet X de M, on a

$$X \wedge (\bigvee_{i\in I} X_i) = \bigvee_{i\in I} (X \wedge X_i) \quad].$$

Par dualité, si $\underset{\sim}{\text{Mod}}\ A$ vérifie l'axiome dual de A.b.5, A est un anneau parfait à gauche. On peut se demander si cette propriété est caractéristique, c'est-à-dire si les anneaux parfaits à gauche sont ceux tels que $\underset{\sim}{\text{Mod}}\ A$ vérifie A.b.5^* ; en fait il n'en est rien, comme le prouve l'exemple suivant :

On prend pour A un corps commutatif K

$$M = K[[T]]$$

$$X = K[T]$$

$$X_m = \mathfrak{m}^n$$

où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximum de M.

$$\cap X_n = 0 \quad (M \text{ est un anneau local noethérien}),$$

$$X + X_n = M \quad \text{pour tout } n,$$

d'où

$$X + (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) = K[T] \neq K[[T]] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X + X_n) .$$

PROPOSITION 17. - Le Σ-radical de tout module projectif parfait non nul P est un sous-module superflu de P.

Démonstration. - On sait que $\Sigma(P) = R(P) \neq P$ (théorème 2). Supposons que $\Sigma(P)$ ne soit pas superflu dans P, et soit K un supplément dans P, contraction superflue de $\Sigma(P)$ dans P ; K n'est pas nul, et c'est un sous-module projectif de P.

Le théorème 2 implique

$$\Sigma(K) \neq K .$$

La proposition 13 implique

$$\Sigma(K) = \Sigma(P) \cap K = K ,$$

ce qui est contradictoire ; d'où la proposition.

THÉORÈME 15. - L'anneau co-associé à un module projectif parfait est isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un module semi-simple.

Démonstration. - Elle résulte immédiatement des propositions 16 et 17.

Remarque. - Si P est projectif parfait non nul, $\mathrm{End}(P/\Sigma(P))$ étant non nul, il en est de même pour $\mathfrak{A}/R(\mathfrak{A})$, où $\mathfrak{A} = \mathrm{End}\ P$ (proposition 16).

Le théorème 12 prouve alors que

$$\Sigma(\mathfrak{A}_s) = R(A) = \Sigma(\mathfrak{A}_d) ,$$

ce qui améliore la proposition 15 dans ce cas particulier.

PROPOSITION 18. - Soit M un module non nul admettant un couverture projective P.

(i) $\Sigma(M) = RM = R(M) \neq M$;

(ii) Si de plus P est parfait, ce sous-module propre de M est superflu dans M.

Démonstration. - Soit $P \xrightarrow{f} M \to 0$ une couverture projective de M .

(i) On sait que $\operatorname{Ker} f \subset \Sigma(P) = R.P = R(P) \neq P$, on a donc $R.M = R(M) \neq M$; en outre on vérifie sans difficulté que, $\operatorname{Ker} f$ étant superflu dans P , $f(\Sigma(P)) = \Sigma(M)$.

(ii) Si P est parfait, $\Sigma(P)$ est superflu dans P , et donc $f(\Sigma(P)) = \Sigma(M)$ est superflu dans M .

Module Σ-irréductible. - On dit qu'un A-module non nul M est Σ-irréductible si la somme de deux sous-modules propres de M est toujours un sous-module propre de M .

PROPOSITION 19. - Soit M un module non nul admettant une couverture projective ; les assertions suivantes sont équivalentes :

1° M est Σ-irréductible ;

2° M est local (i. e. possède un sous-module maximum) ;

3° Tout sous-module propre de M est superflu dans M .

En outre, si ces conditions sont réalisées, M est un module monogène.

Démonstration. - 1° $\Longrightarrow$ 2° résulte de ce que M admet un sous-module maximal (proposition 18). 2° $\Longrightarrow$ 3° et 3° $\Longrightarrow$ 1° sont évidents, et d'ailleurs vrais sans aucune hypothèse sur M .

Supposons vérifiées les conditions précédentes, et soit x un élément de M qui n'appartient pas à $\Sigma(M)$; $\Sigma(M)$ étant maximal, on a

$$M = \Sigma(M) + Ax \ , \qquad \text{d'où } M = Ax \ ,$$

puisque $\Sigma(M)$ est superflu dans M .

Remarque. - Tout module Σ-irréductible M est évidemment indécomposable en somme directe ; la réciproque est exacte dans le cas où M est un module projectif parfait : soit en effet N un sous-module propre de M ; le théorème 14 prouve l'existence d'une couverture projective de M/N , qui doit être isomorphe à un facteur direct de M , donc isomorphe à M ; N est par conséquent superflu dans M .

THÉORÈME 16. - Soit P un module projectif non nul ; les assertions suivantes sont équivalentes :

1° P est parfait ;

2° (a) $\Sigma(P)$ est un sous-module superflu de P ;

(b) P est somme directe de sous-modules Σ-irréductibles.

Démonstration.

1° ⟹ 2° : (a) a déjà été démontré (proposition 18) ;

(b) $P/R.P$ est un A-module semi-simple (théorème 13) ; $P/R.P = \bigoplus_{i\in I} A\bar{x}_i$; $A\bar{x}_i$ est un quotient de P, donc (théorème 14) admet une couverture projective $P_i \xrightarrow{p_i} A\bar{x}_i \to 0$. Ker p_i est un sous-module maximal de P_i, puisque $A\bar{x}_i$ est simple ; ce doit être également un sous-module superflu de P_i, ce qui prouve que P_i est un module projectif Σ-irréductible (proposition 19).

Soit $Q = \bigoplus_{i\in I} P_i$ et $p = \bigoplus_{i\in I} p_i$, P étant une couverture projective de $P/R.P$, il existe un épimorphisme τ de Q sur P tel que $\pi \circ \tau = p$, où π désigne la surjection canonique de P sur $P/R.P$.

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, dashed, "\tau"'] \arrow[d, "p"] & \\ P \arrow[r, "\pi"] & P/R.P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Démontrons que τ est injectif : soit $x \in Q$, $x \in \bigoplus_{j=1}^{n} P_{i_j} = Q'$; soit $R = \bigoplus_{j=1}^{n} A\bar{x}_{i_j}$. Soit p' (resp. τ') la restriction de p (resp. τ) à Q' .

Ker $p' = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathrm{Ker}\, p_{i_j}$ est un sous-module superflu de Q' (car somme d'un nombre fini de sous-modules superflus de Q'), et de plus $p'(Q') \subset R$.

$Q' \xrightarrow{p'} R \to 0$ est donc une couverture projective de R .

Soit q la projection de $P/R.P$ sur R , dont le noyau est $\bigoplus_{i\neq i_1,\dots,i_n} A\bar{x}_i$; on a $q \circ \pi \circ \tau' = p'$.

$$\begin{tikzcd} Q' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "\tau'"'] & R \\ P \arrow[r, "\pi"] & P/R.P \arrow[u, "q"'] \end{tikzcd}$$

R admettant une couverture projective, le lemme 8 assure l'existence d'un sous-module P_0 de $\tau'(Q')$, minimal parmi les sous-modules X de $\tau'(Q')$ vérifiant

$$q \circ \pi(X) = R$$

c'est-à-dire minimal parmi les sous-modules X de $\tau'(Q')$ vérifiant

$$P = X + \mathrm{Ker}(q \circ \pi) ,$$

car

$$R = p'(Q') = q \circ \pi(\tau'(Q')) \subset q \circ \pi(P) \subset R \ .$$

Puisque $P_0 \subseteq \tau'(Q')$, on a $\tau' \circ \tau'^{-1}(P_0) = P_0$, d'où

$$p'(\tau'^{-1}(P_0)) = q \circ \pi \circ \tau'(\tau'^{-1}(P_0)) = q \circ \pi(P_0) = R \quad .$$

Or, Q' étant une couverture projective de R , ceci implique que $\tau'^{-1}(P_0) = Q'$ d'où $P_0 = \tau'(Q')$.

$P_0 \xrightarrow{q \circ \pi} R \to 0$ est alors une couverture projective de R , ce qui prouve que τ' est un isomorphisme de Q' sur P_0 .

En particulier, $\tau(x) = \tau'(x) \neq 0$; τ est donc injectif, et c'est ainsi un isomorphisme de Q sur P , ce qui démontre que P est somme directe de sous-modules Σ-irréductibles.

2° $\Longrightarrow$ 1° : Soit $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ un module projectif dont le Σ-radical est superflu, les P_i étant Σ-irréductibles.

Soit X un sous-module de P , et montrons que P/X admet une couverture projective ; on note $R.P = N$. $P/N = \sum_{i \in I} (P_i + N)/N$.

$P_i + N/N \approx P_i/N \cap P_i = P_i/R(P_i)$ est un module simple, puisque P_i est Σ-irréductible (l'égalité $R(P) \cap P_i = R(P_i)$ résulte du corollaire 1 du théorème 12, et de la proposition 13).

Il existe donc un sous-ensemble J de I tel que

$$P/N = \bigoplus_{i \in J} (P_i + N)/N$$

(on démontre facilement que $J = I$).

$(X + N)/N$ étant un sous-module du module semi-simple P/N , il existe $H \subset J$ tel que

$$P/N = (X + N)/N \oplus [\bigoplus_{i \in H} (P_i + N)/N] \quad .$$

Soit $P' = \bigoplus_{i \in H} P_i$, p (resp. q) la surjection canonique de P/X (resp. P') sur $P/(X + N)$ (resp. $(P' + N)/N$), et θ l'isomorphisme de $(P' + N)/N$ sur $P(X + N)$. P' étant projectif, il existe un morphisme π de P' dans P/X tel que $p \circ \pi = \theta \circ q$.

$$\begin{tikzcd}
 & P' \arrow[d, "q"] \arrow[dl, dashed, "\pi"'] & \\
 & (P' + N)/N \arrow[d, "\theta"] & \\
P/X \arrow[r, "p"] & P/(X + N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{Ker} p = (X + N)/X$ étant superflu dans P/K (puisque N est superflu dans P), π est surjectif ; $\operatorname{Ker}(\theta \circ q) = \operatorname{Ker} q = P' \cap N$ étant superflu dans P' (proposition 13), $\operatorname{Ker} \pi$ est superflu dans P/X (puisque $p(\operatorname{Ker} \pi)$ l'est dans $p(P/X)$, et que $\operatorname{Ker} p$ est superflu dans P/X). On en déduit que $P' \xrightarrow{\pi} P/X \to 0$ est une couverture projective de P/X, et donc (théorème 14) que P est parfait.

Remarque. - Si A est un anneau parfait à gauche, on démontre beaucoup plus facilement que tout module projectif vérifie la condition 2 : en effet, en reprenant la démonstration 1° $\Longrightarrow$ 2° du théorème précédent, on remarque que

$$\operatorname{Ker} p = \bigoplus_{i\in I} R(P_i) = R(Q)$$

est superflu dans Q (proposition 18), donc que $Q \xrightarrow{p} P/R.P \longrightarrow 0$ est une couverture projective de $P/R.P$, ce qui prouve immédiatement que P est isomorphe à Q.

COROLLAIRE. - Soit P un module projectif, somme directe de modules $(P_i)_{i=1,\dots,n}$. P est parfait si, et seulement si, chacun des P_i est parfait.

Démonstration. - Evidente.

PROPOSITION 20. - Soit P un module projectif ; les assertions suivantes sont équivalentes :

1° P est de type fini et parfait ;

2° P est somme directe d'un nombre fini de modules Σ-irréductibles ;

3° P est de type fini, et $\operatorname{End}_A(P)$ est somme directe d'idéaux à gauche Σ-irréductibles.

Démonstration.

1° $\Longleftrightarrow$ 2° résulte immédiatement du théorème 16 et de la proposition 19. Remarquons alors que si e est un idempotent de $\mathfrak{A} = \operatorname{End}_A(P)$, $\operatorname{End}_A(e(P)) = e\mathfrak{A}e = \operatorname{End}_{\mathfrak{A}}(e\mathfrak{A})$.

2° $\Longleftrightarrow$ 3° s'en déduit aussitôt.

PROPOSITION 21. - L'anneau des endomorphismes d'un module projectif indécomposable P sur un anneau parfait à gauche, est un anneau parfait à gauche.

Démonstration. - P étant monogène (proposition 19), il existe un épimorphisme de A sur P ; P est donc facteur direct de A, c'est-à-dire qu'il existe un idempotent e de A tel que P soit isomorphe à Ae.

$\mathfrak{A} = \operatorname{End}_A(P)$ est alors isomorphe à eAe, et $R(\mathfrak{A})$ à eRe.

$\mathfrak{a}/R(\mathfrak{a})$ est isomorphe à eAe/eRe , qui est isomorphe à $\mathrm{End}_{A/R}(A/\overline{Re})$. Or Ae/Re est un A-module simple (car Re est le sous-module maximum de Ae) ; c'est donc un A/R-module simple, ce qui prouve que $\mathfrak{a}/R(\mathfrak{a})$ est un corps, donc est un anneau semi-simple.

La T-nilpotence à gauche de $R(\mathfrak{a})$ résulte de ce que, R étant un idéal bilatère, $eRe \subset R$, et du fait que R est T-nilpotent à gauche par hypothèse, $\mathfrak{a}$ vérifie donc les conditions (a) et (b) du théorème 1, 5°, ce qui prouve qu'il est parfait à gauche.

Remarque. - Notre étude permet d'obtenir de nombreux résultats concernant les modules projectifs sur les anneaux parfaits (certaines de nos démonstrations se simplifiant d'ailleurs sous cette hypothèse). Il faut signaler que dans ce cas (A parfait), il est une autre méthode plus rapide : il suffit d'associer à la catégorie $\underset{\sim}{\mathrm{Mod}}\ A$ la catégoire spectrale $\mathcal{S}$ [5] dont les objets sont ceux de $\underset{\sim}{\mathrm{Mod}}\ A$, et où $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(M , N) = \varinjlim_{N'}(M , N/N')$, N' décrivant l'ensemble des sous-modules superflus de N . Il est encore équivalent de considérer la catégorie spectrale associée à $(\underset{\sim}{\mathrm{Mod}}\ A)^*$, en remarquant que de nombreux résultats de [5] et de [12] ne nécessitent pas l'hypothèse que la catégorie considérée soit de Grothendieck, mais simplement l'existence de compléments (ce qui est le cas si A est parfait).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS (Hyman). - Finistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 95, 1960, p. 466-488.

[2] FAITH (Carl) and UTUMI (Yuzo). - Quasi-injective modules and their endomorphism rings, Arch. der Math., t. 15, 1964, p. 166-174.

[3] FORT (Jacques). - Contribution à l'étude des éléments tertiaires et isotypiques dans les modules et les $(\mathcal{C})$-algèbres, Bull. Soc. math. France, Mémoire n° 1, 1964, IV + 99 p. (Thèse Sc. math.).

[4] GABRIEL (Pierre). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[5] GABRIEL (Pierre) und OBERST (Ulricht). - Spektralkategorien und reguläre Ringe im Von-Neumannschen Sinn, Math. Z., t. 92, 1966, p. 389-395.

[6] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku math. J., 2nd Series,, t. 9, 1957, p. 119-221.

[7] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.); - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).

[8] MIYASHITA (Yôichi). - Quasi-projective modules, perfect modules, and a theorem for modular lattices, J. of Fac. of Sc., Hokkaido Univ., Series 1, t. 19, 1965/66, p. 86-110.

[9] RENAULT (Guy). - Étude des sous-modules compléments dans un module, Bull. Soc. math. France, Mémoire n° 9, 1967, 79 p. (Thèse Sc. math. Paris-Orsay, 1966).

[10] RENAULT (Guy). - Sur les anneaux A , tels que tout A-module à gauche non nul contient un sous-module maximal, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, 1967, Série A, p. 622-624.

[11] RENAULT (Guy). - Anneaux parfaits, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 21e année, 1967/68, n° 5.

[12] ROSS (J. E.). - Locally distributive spectral categories and strongly regular rings, Reports of the Midwest category seminar, p. 156-181. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1967 (Lecture Notes in Mathematics, 47).