Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Pierre Lefebvre

Demi-groupes et anneaux de fractions

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, nº 1 (1967-1968), exp. nº 7, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_1_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, n° 7

8 janvier 1968

DEMI-GROUPES ET ANNEAUX DE FRACTIONS

par Pierre LEFEBVRE

I. Introduction

Cet exposé est le résumé d'une partie d'un cours de 3e cycle fait par l'auteur à la Faculté des Sciences de Lyon (à paraître aux Publications du Département de Mathématiques de cette Faculté). Les démonstrations, consistant en général en vérifications de routine, et étant assez longues, ne figurent pas dans ce résumé, où l'on a surtout voulu donner une idée de l'enchaînement logique des propositions, et mettre en évidence d'une façon précise les rapports qui peuvent exister entre demi-groupes et anneaux de fractions.

L'étude des anneaux de fractions est classique, au moins dans le cas commutatif. Dans le cas non commutatif, on en trouvera les éléments dans un cours de L. LESIEUR [7]. C'est en étudiant ce cours qu'il m'a paru intéressant de faire une étude autonome des demi-groupes de fractions, étude généralisant l'immersion d'un demi-groupe dans un demi-groupe de fractions faite par P. DUBREIL dans [3].

La définition d'un anneau de fractions se fait en général comme solution d'un problème universel (voir plus loin, problème 2'), ou encore d'un problème élémentaire, dont l'énoncé diffère sensiblement quand on passe du cas "régulier" au cas "non régulier".

Dans le premier cas, on étudie le problème I : A étant un anneau, à élément-unité, S une partie de A dont tous les éléments sont réguliers, trouver les couples (B , φ) où B est un anneau à élément unité et φ un homomorphisme de A dans B tels que :

(α) Pour tout $s \in S$, $\varphi(s)^{-1}$ existe dans B ;
(β) Tout élément ξ de B s'écrit $\xi = \varphi(a)\, \varphi(s)^{-1}$, où $a \in A$ et $s \in S$ (fractions à droite) ;
(γ) φ est une injection.

Dans le second, on étudie le problème II, dont l'énoncé s'obtient en supprimant dans l'énoncé du problème I la condition de régularité pour les éléments de S, et en remplaçant la condition (γ) par :

(γ') Ker $\varphi = I$, idéal bilatère engendré dans A par les $x \in A$ tels qu'il existe s , $s' \in S$ vérifiant $sxs' = 0$.

En examinant ces énoncés, on peut remarquer que :

(a) Un certain nombre de conditions portent uniquement sur le demi-groupe multiplicatif de l'anneau ;

(b) On impose, par les conditions (γ) ou (γ'), le noyau de φ d'une façon qui paraît quelque peu arbitraire ;

(c) La condition (γ') n'est pas utilisable pour les demi-groupes sans zéro.

On peut donc se demander s'il ne serait pas intéressant de :

(a) Poser et résoudre le problème de la définition et de la construction d'un demi-groupe de fractions sous sa forme la plus générale possible ;

(b) Déduire des résultats obtenus celles des anneaux de fractions, en les appliquant au demi-groupe multiplicatif de l'anneau ;

(c) Etudier les propriétés des demi-groupes de fractions, d'abord par analogie avec les anneaux, puis, comme cela apparaît vite nécessaire, par des méthodes autonomes.

Une partie de ce programme a été réalisée, et les résultats en sont exposés ici. Mais on doit pouvoir aller beaucoup plus loin (cf. ci-dessous, chap. III, § 4, et [2], [4] et [6]).

II. Problèmes

Soient D un demi-groupe, non nécessairement avec élément-unité, et S un sous-demi-groupe de D . On considère les problèmes suivants :

PROBLÈME 1 : Déterminer les couples (Δ , φ) , où Δ est un demi-groupe avec élément-unité et $\varphi : D \to \Delta$ un homomorphisme tels que :

(α) Pour tout $s \in S$, $\varphi(s)^{-1}$ existe dans Δ ;

(β) Tout élément ξ de Δ s'écrit $\xi = \varphi(a)\,\varphi(s)^{-1}$, où $a \in D$ et $s \in S$ (fractions à droite) ;

(γ'') Si $\mathcal{R}_{\varphi}$ est l'équivalence d'homomorphisme associée à φ et (Δ' , φ') un couple vérifiant les conditions précédentes, à l'exception de (β), alors on a $\mathcal{R}_{\varphi} \subseteq \mathcal{R}_{\varphi'}$.

Remarques.

(a) On ne suppose pas Δ commutatif.

(b) La condition (γ'') remplace, dans le cas général, la condition (γ') du problème I pour les anneaux. On verra qu'elle est plus faible ; elle exprime, sous une forme un peu singulière, mais assez maniable, que $\varphi(D)$, isomorphe à $D/\mathcal{R}_\varphi$ d'après le théorème d'homomorphisme pour les demi-groupes, est "le plus grand possible".

(c) On peut d'ailleurs la remplacer par une condition plus classique, qui apparaît dans le problème suivant :

PROBLÈME 2 : Déterminer les couples (Δ , φ) , où Δ est un demi-groupe avec élément-unité et $\varphi : D \to \Delta$ un homomorphisme tels que :

(α) Pour tout $s \in S$, $\varphi(s)^{-1}$ existe dans Δ ;
(δ) Quel que soit le couple (Δ' , φ') vérifiant les conditions précédentes, il existe un homomorphisme unique $\sigma : \Delta \to \Delta'$ tel que $\varphi' = \sigma \circ \varphi$.

Remarques. – On peut prévoir, en comparant la forme de ces deux problèmes, qu'ils ne sont pas équivalents dans le cas non commutatif, car l'énoncé du second est "symétrique", alors que celui du premier est latéralisé (fractions à droite ou fractions à gauche). On note également que le problème 2 se présente immédiatement sous la forme de problème universel ([1]).

Cas des anneaux : Si A est un anneau, non nécessairement avec élément-unité, et S une partie multiplicativement stable de A , on considère les problèmes suivants:

PROBLÈME 1' : Déterminer les couples (B , φ) , où B est un anneau avec élément-unité et $\varphi : A \to B$ un homomorphisme (d'anneaux) tels qu'on ait les conditions (α), (β) et (γ'') analogues à celles du problème 1.

PROBLÈME 2' : Déterminer les couples (B , φ) , où B est un anneau avec élément-unité et $\varphi : A \to B$ un homomorphisme (d'anneaux) tels qu'on ait les conditions (α) et (δ) analogues à celles du problème 2.

III. Cas commutatif

On démontre d'abord aisément que Δ est commutatif.

1. Cas régulier.

Si tous les éléments de S sont réguliers dans D , le résultat est classique. Il existe une solution canonique au problème 1 : (D_S , i) , où $D_S = D \times S/R$,

R étant l'équivalence définie sur $D \times S$ par $(a, s) R (a', s')$ si, et seulement si, $as' = sa'$. Si l'on représente par a/s la classe de (a, s) modulo R, et si l'on pose, pour $a \in D$ et $s \in S$, $i(a) = as/s$, on définit un homomorphisme injectif de D dans D_S.

2. Cas général.

2.1. THÉORÈME 1. - Il existe une solution canonique (D_S, h) au problème 1.

Cette solution s'obtient en prenant le quotient $\overline{D} = D/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est l'équivalence définie dans D par la condition : $x \mathcal{R} y$, si, et seulement s'il existe $s \in S$ tel que $sx = sy$. Si θ est l'homomorphisme canonique de D sur $\overline{D}$, les éléments de $\overline{S} = \theta(S)$ forment un sous-demi-groupe d'éléments réguliers dans $\overline{D}$. On prend alors pour D_S le demi-groupe des fractions de $\overline{D}$ sur $\overline{S}$: $D_S = \overline{D}_{\overline{S}}$. Si i est l'injection canonique de $\overline{D}$ dans $\overline{D}_{\overline{S}}$, $h = i \circ \theta$ est un homomorphisme de D dans D_S, et le couple (D_S, h) est une solution du problème 1.

2.2. THÉORÈME 2. - Si (Δ, φ) est une solution du problème 1, alors $\mathcal{R}_\varphi = \mathcal{R}$.

2.3. COROLLAIRE. - φ est injectif si, et seulement si, tous les éléments de S sont réguliers dans D.

Ce corollaire met en évidence l'origine de la condition (γ).

2.4. THÉORÈME 3. - Les problèmes 1 et 2 sont équivalents.

2.5. COROLLAIRE. - Si (Δ, φ) et (Δ', φ') sont deux solutions du problème 1, alors Δ et Δ' sont isomorphes.

Il y a donc "unicité" des solutions du problème 1 (ou du problème 2), et l'on parlera du demi-groupe des fractions de D par rapport au sous-demi-groupe S.

3. Anneaux et demi-groupes de fractions dans le cas commutatif.

Si A est un anneau, on désigne par D_A son demi-groupe multiplicatif. Inversement, si D est un demi-groupe et A un anneau admettant ce demi-groupe comme demi-groupe multiplicatif, on notera éventuellement A_D cet anneau.

3.1. THÉORÈME 4. - Soient A un anneau commutatif, S une partie multiplicative de A. A toute solution (Δ, φ) du problème 1 pour le couple (D_A, S) correspond biunivoquement une solution (B, φ) du problème 1' pour le couple (A, S).

Les deux seules difficultés de la démonstration sont :

- Définir une addition qui fasse de Δ un anneau B ;

- Démontrer la condition (γ'') lorsque, (B, ω) étant une solution du problème 1' pour le couple (A, S), on veut établir que le couple (D_B, ω) est une solution du problème 1 pour le couple (D_A, S).

3.2. Remarques. - Ce théorème montre que, dans le cas commutatif, le problème de la définition et de la construction des anneaux de fractions est entièrement résolu quand on sait résoudre ce problème pour les demi-groupes. Nous verrons que la situation est moins satisfaisante dans le cas non commutatif.

3.3. THÉORÈME 5. - Les problèmes II et 1' (donc aussi 2') sont équivalents.

Cela vient de $\mathcal{R}_\omega = \mathcal{R}$, pour une solution (Δ, ω) du problème 1, et de ce que I, idéal bilatère intervenant dans la condition (γ') du problème II, est dans le cas des anneaux, la classe de 0 modulo $\mathcal{R}$.

4. Modules et D-demi-groupes de fractions.

4.1. - On peut, par analogie avec le cas commutatif des anneaux de fractions, chercher une généralisation de la notion de module de fractions. Pour cela, nous avions utilisé la notion de D-demi-groupe qui nous avait déjà servi pour appliquer la méthode d'Asano à la construction du demi-groupe des fractions dans le cas non commutatif régulier ([6]). Il semble en fait qu'on pourrait obtenir d'aussi bons résultats avec la notion de S-système due à HOEHNKE [4]. Nous indiquerons cependant, ici, les notions utilisées antérieurement à la lecture du travail de HOEHNKE.

4.2. DÉFINITION. - Soient D et M deux demi-groupes, non nécessairement commutatifs, non nécessairement avec élément-unité. On dira que M est un D-demi-groupe à gauche s'il existe une loi de composition externe à gauche sur M, le domaine d'opérateurs étant D, telle que, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in D$ et $x \in M$, on ait $\lambda_1(\lambda_2 x) = (\lambda_1 \lambda_2)x$, et, éventuellement, $1.x = x$.

4.3. Remarques. - Tout demi-groupe D est un D-demi-groupe sur lui-même, à gauche ou à droite.

Plus généralement, si I est un idéal à gauche de D, I est un D-demi-groupe à gauche.

4.4. DÉFINITION. - M et N étant deux D-demi-groupes à gauche, on appellera D-homomorphisme une application $f : M \to N$ telle que, pour tout $\lambda \in D$, on ait $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

4.5. Remarque. - On n'exige pas $f(xy) = f(x)\,f(y)$!

4.6. - D-demi-groupes de fractions : Soient M un D-demi-groupe sur un demi-groupe D commutatif, S un sous-demi-groupe de D. Sur l'ensemble $M \times S$, définissons une relation R par $(x\,,\,s)\,R\,(x'\,,\,s')$ si, et seulement s'il existe $t \in S$ tel que $t(s'x) = t(sx')$. Alors, R est une équivalence, et l'ensemble $F = M \times S/R$ peut être muni d'une structure de D-demi-groupe, l'application $h : M \to F$ définie par $h(x) = sx/s$ étant un D-homomorphisme.

On peut munir également F d'une structure de D_S-demi-groupe, et les relations entre les propriétés de F comme D-demi-groupe et comme D_S-demi-groupe sont tout-à-fait analogues à celles qu'on établit pour les modules de fractions.

Il semble donc qu'il y ait là une direction de recherche intéressante, immédiatement généralisable au cas non commutatif, et pour laquelle on pourrait essayer d'utiliser des méthodes d'Algèbre homologique (cf. [8]).

IV. Cas non commutatif

1. Cas régulier.

1.1. - Si tous les éléments de S sont réguliers dans D, une condition nécessaire d'existence des solutions du problème 1 est la condition suivante :

(C_d) Pour tout couple $(a\,,\,s) \in D \times S$, il existe $(a'\,,\,s') \in D \times S$ tel que $as' = sa'$.

Cette condition est également suffisante, comme il résulte du théorème suivant :

1.2. THÉORÈME 6. - *Si le couple $(D\,,\,S)$ vérifie la condition (C_d), il existe une solution canonique $(D_S\,,\,i)$ au problème 1, et i est un homomorphisme injectif.*

On obtient cette solution en prenant le quotient $D_S = D \times S/R$, où R est l'équivalence définie par $(a\,,\,s)\,R\,(a'\,,\,s')$ si, et seulement s'il existe $u\,,u' \in D$ et $\omega \in S$ tels que $su = s'u' = \omega$ et $au = a'u'$.

La multiplication est définie dans D_S par $(a/s)(a'/s') = (aa''/s's'')$, où $(a''\,,\,s'')$ est déterminé par la condition (C_d), $a's'' = sa''$.

Par cette multiplication, D_S est un demi-groupe avec élément-unité, et l'application $i : D \to D_S$ étant définie par $i(a) = as/s$, le couple $(D_S\,,\,i)$ est une solution du problème 1, i étant d'ailleurs injectif.

1.3. THÉORÈME 7. - Pour un couple (D, S) vérifiant la condition (C_d), les problèmes 1 et 2 sont équivalents.

1.4. COROLLAIRES. - Les solutions du problème 1, lorsqu'elles existent, sont isomorphes.

Si le couple (D, S) vérifie à la fois la condition (C_d) et la condition (C_g) pour l'existence des fractions à droite et à gauche, les demi-groupes de fractions à droite et à gauche D_S et ${}_SD$ sont isomorphes.

1.5. Remarque. - M. BENABOU nous a fait remarquer que les problèmes 2 et 2' avaient toujours une solution ([1]). On n'a, ici, l'équivalence avec le problème 1 que moyennant une condition supplémentaire (C_d) qui vient de ce qu'on impose, par la condition (β), aux solutions du problème 1, d'avoir une forme particulière (fractions à droite). Il serait intéressant de trouver une solution élémentaire du problème général 2.

2. Cas général.

2.1. - Si S est un sous-demi-groupe quelconque de D, la régularité des éléments de $\varphi(S)$ dans Δ (qui résulte de leur invertibilité) fait apparaître une condition nécessaire pour $\mathcal{R}_\varphi$, qui doit être simplifiable par les éléments de S : $sx \equiv sy \ (\mathcal{R}_\varphi)$ ou $xs \equiv ys \ (\mathcal{R}_\varphi)$ entraîne $x \equiv y \ (\mathcal{R}_\varphi)$.

Par ailleurs, la condition (β) entraîne que (D, S) doit vérifier la condition:

(C_d) modulo $\mathcal{R}_\varphi$. Pour tout couple $(a, s) \in D \times S$, il existe $(a', s') \in D \times S$ tel que $as' \equiv sa' \ (\mathcal{R}_\varphi)$.

2.2. - Soit alors $\mathfrak{F}$ l'ensemble des équivalences compatibles sur D et simplifiables par les éléments de S ; $\mathfrak{F}$ admet un plus petit élément $\mathcal{R}$, qu'on peut construire par un procédé de récurrence, analogue à celui employé dans ma thèse pour la construction de la plus fine équivalence régulière et simplifiable d'un demi-groupe.

$\mathcal{R}$ est la réunion d'une chaîne de relations :

$$\rho_0 \subseteq \rho_1 \subseteq \dots \subseteq \rho_{3n} \subseteq \rho_{3n+1} \subseteq \rho_{3n+2} \subseteq \dots$$

définies par $\rho_0 = \mathcal{E}$, égalité.

Pour $a, b \in D$ et $n \geqslant 0$:

- $a \, \rho_{3n+1} \, b$ si, et seulement s'il existe s , $s' \in S$ tels que $sas' \, \rho_{3n} \, sbs'$;
- $a \, \rho_{3n+2} \, b$ si, et seulement s'il existe x , y , a' , $b' \in D$ tels que $a = xa'y$, $b = xb'y$ et $a' \, \rho_{3n+1} \, b'$ (x ou y pouvant être l'élément neutre réel ou formel de D).

Enfin, ρ_{3n+3} est la fermeture transitive de ρ_{3n+2} .

On a alors le théorème suivant :

2.3. THÉORÈME 8. - Le problème 1 a une solution pour un couple (D , S) si, et seulement si, ce couple vérifie la condition (C_d) modulo $\mathcal{R}$.

La construction est analogue à celle du cas commutatif général, en prenant pour D_S le demi-groupe des fractions de $\overline{D} = D/\mathcal{R}$, pour $\overline{S} = \theta(S)$ avec $\theta : D \rightarrow \overline{D}$ homomorphisme canonique.

On en déduit encore des corollaires analogues aux précédents :

2.4. COROLLAIRES. - Si (Δ , φ) est une solution du problème 1, alors $\mathcal{R}_\varphi = \mathcal{R}$.

φ est injectif si, et seulement si, tous les éléments de S sont réguliers dans D .

Moyennant la condition (C_d) modulo $\mathcal{R}$ (ou (C_g)), les problèmes 1 et 2 sont équivalents.

Deux solutions du problème 1 sont isomorphes.

2.5. Remarques.

- Dans le cas commutatif, on a $\mathcal{R} = \rho_1$.
- Dans le cas régulier, on a $\mathcal{R} = \rho_0 =$ (égalité) .

3. Anneaux de fractions.

3.1. - Comme dans le cas commutatif, on se demande si on peut déduire la construction d'un anneau de fractions, solution du problème 1' pour un couple (A , S) , de celle du demi-groupe de fractions, solution du problème 1 pour le couple (D_A , S) . La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant, malheureusement plus restrictif que celui du cas commutatif.

3.2. THÉORÈME 9. - Si $\mathcal{R}$ est compatible avec l'addition (ce qui est le cas dans le cas commutatif et dans le cas régulier), à toute solution (Δ_B , φ) du problème 1 pour le couple (D_A , S) correspond biunivoquement une solution (B , φ) du problème 1' pour le couple (A , S) .

Les difficultés sont les mêmes que dans le cas commutatif, mais la démonstration est beaucoup moins simple, et fait apparaître l'utilité "technique" de la condition (suffisante) : " $\mathcal{R}$ compatible avec l'addition de A ".

3.3. Remarques. - Dans ma note ([6]), je soulignais que L. LESIEUR imposait, pour la construction de l'anneau de fractions dans le cas général, la condition (C_d) à ρ_3 , ce qui est plus fort que de l'imposer à $\mathcal{R}$ (qui contient ρ_3). Nous pensions alors avoir trouvé pour les anneaux une construction plus générale que la sienne.

Mais le théorème précédent montre qu'on ne peut pas se servir de $\mathcal{R}$, en général, pour construire l'anneau de fractions d'un couple quelconque (A , S) , si $\mathcal{R}$ n'est pas compatible avec l'addition sur A . Il faut prendre la plus petite équivalence compatible $\mathcal{R}'$ à la fois avec l'addition et la multiplication de A , et simplifiable sur S . On aura en général $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$, mais pas $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$. Cependant, il convient de noter qu'on a cette égalité dans deux cas particuliers importants, en particulier le cas non commutatif régulier.

Comme on l'a souligné au début, on peut maintenant chercher des propriétés des demi-groupes de fractions, analogues, d'abord, à celles des anneaux de fractions. On peut s'attendre à des difficultés quand intervient, dans les propriétés en question, l'addition de l'anneau. Cependant, ces difficultés ne sont pas toujours insurmontables, comme le prouve la possibilité d'étendre à la construction des demi-groupes de fractions, dans le cas non commutatif régulier, la méthode d'Asano [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Théorie des ensembles. Chapitre IV. - Paris, Hermann, 1957 (Act. scient. et ind., 1258 ; Bourbaki, 22).

[2] BOUVIER (Alain). - Fractions réductibles d'un demi-groupe de fractions, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, p. 652-654.

[3] DUBREIL (Paul). - Algèbre. Tome I. 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[4] HOEHNKE (Hans Jürgen). - Structure of semigroups, Canad. J. of Math., t. 18, 1966, p. 449-491.

[5] ION (D.). - Sur les demi-groupes de fractions dans le cas subcommutatif, Bull. math. Soc. Sc. math. et phys. R. P. roumaine, t. 9, 1965, p. 57.

[6] LEFEBVRE (Pierre). - Sur les demi-groupes de fractions, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, p. 329-332.

[7] LESIEUR (L.). - Anneaux de fractions, Cours de Mathématiques approfondies, 1964/65, Faculté des Sciences d'Orsay.

[8] NORTHCOTT (D. G.). - An introduction to homological algebra. - Cambridge, University Press, 1960.