Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Alain Bigard

Groupes archimédiens et hyper-archimédiens

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, nº 1 (1967-1968), exp. nº 2, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_1_A2_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des Nombres)
21e année, 1967/68, n° 2

20 novembre 1967

GROUPES ARCHIMÉDIENS ET HYPER-ARCHIMÉDIENS

par Alain BIGARD

1. Notations et rappel de quelques résultats classiques.

Rappelons tout d'abord qu'un groupe réticulé est dit archimédien si $a^n \leqslant b$ pour tout entier n positif entraîne $a \leqslant e$. On utilise également une définition équivalente, qui est souvent plus commode : Si $a \geqslant e$ et si $a^n \leqslant b$ pour tout entier positif, alors $a = e$.

Les résultats suivants seront supposés connus (Von L. FUCHS [7]).

1.1. - Tout groupe archimédien est commutatif.

Ceci nous permet d'utiliser dorénavant la notation additive.

1.2. - Un groupe réticulé est archimédien si, et seulement si, il peut être plongé dans un groupe réticulé complet.

En fait, la méthode de complétion de Dedekind s'applique aux groupes archimédiens.

1.3. - Un groupe totalement ordonné est archimédien si, et seulement si, il est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

Nous ferons un usage constant des concepts suivants, pour lesquels nous renvoyons à P. CONRAD [5] :

Un ℓ-sous-groupe convexe est un sous-groupe convexe qui est en même temps un sous-treillis. Nous dirons dans la suite un " ℓ-s-c". Tout ℓ-s-c est engendré par ses éléments positifs. On appelle idéal un ℓ-s-c distingué. Nous noterons $I(g)$ le ℓ-s-c engendré par g.

Deux éléments sont dits orthogonaux si $|a| \wedge |b| = 0$. Pour toute partie A de G, on pose

$$A' = \{x \in G \mid \forall a \in A , \quad |x| \wedge |a| = 0\} .$$

A' est appelée composante de A. C'est un ℓ-s-c. On notera a' au lieu de $\{a\}'$.

On dit qu'un ℓ-s-c P est premier si $0 \leqslant a \wedge b \in P$ implique $a \in P$ ou $b \in P$. Un idéal P est premier si, et seulement si, G/P est totalement ordonné.

On appelle valeur de $a \in G$, tout ℓ-s-c maximal parmi ceux qui ne contiennent pas a. Toute valeur est un ℓ-s-c premier.

2. Résultats généraux

2.1 LEMME. - Soient G archimédien, K une partie de G, et $0 < b \in K''$. On a :

$$b = \bigvee_{c \in K, n \in \mathbb{N}} (b \wedge n|c|) \quad .$$

En effet, supposons par l'absurde que $b \wedge n|c| \leqslant t < b$ quels que soient n et c. On a $0 < b - t \leqslant b$, donc $b - t \notin K'$. Il existe $c \in K$ tel que

$$d = (b - t) \wedge |c| > 0 \quad .$$

On a $d \leqslant b$.

Supposons $(n-1)d \leqslant b$. Comme $(n-1)d \leqslant (n-1)|c|$ on a

$$(n-1)d \leqslant b \wedge (n-1)|c| \leqslant t \quad .$$

D'autre part, $d \leqslant b - t$, donc

$$nd = d + (n-1)d \leqslant b - t + t = b \quad .$$

Par récurrence, on a donc $nd \leqslant b$ pour tout n, donc $d = 0$, ce qui est contradictoire.

2.2 PROPOSITION. - Si I est un idéal fermé par $\bigvee$ infini dans un groupe archimédien, c'est une composante.

Ceci résulte immédiatement du lemme en prenant $K = I$. Un ensemble S d'éléments positifs est dit "orthogonal" si ses éléments sont deux à deux orthogonaux. L'axiome de Zorn assure l'existence d'ensembles orthogonaux maximaux. Si S est un tel ensemble, on a $S' = \{0\}$, donc $S'' = G$. Le lemme donne alors la proposition suivante.

2.3 PROPOSITION. - Si S est un ensemble orthogonal maximal dans un groupe archimédien, on a, pour tout $b > 0$,

$$b = \bigvee_{c \in S, n \in \mathbb{N}} (b \wedge nc) \quad .$$

2.4 THÉORÈME. - Un groupe réticulé est archimédien si, et seulement si, pour tout couple d'éléments positifs, on a :

$$b = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} [b \wedge n(nb - a)] \quad .$$

Il est clair que cette condition est suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, on va appliquer le lemme à l'ensemble $K = \{(nb - a) \vee 0 \mid n \in \mathbb{N}\}$. On doit montrer que $b \in K''$. Soit $0 \leqslant g \in K'$. Pour tout n , on a :

$$n(b \wedge g) - a \leqslant ng \wedge (nb - a) \leqslant ng \wedge [(nb - a) \vee 0] = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire $n(b \wedge g) \leqslant a$. Par suite, $b \wedge g = 0$. En appliquant le lemme, il vient

$$b = \bigvee_{m,n} [b \wedge m[(nb - a) \vee 0]] \quad .$$

Si $s = \sup(m , n)$, nous avons

$$b \wedge m[(nb - a) \vee 0] \leqslant b \wedge s[(sb - a) \vee 0] \leqslant b \quad .$$

Par conséquent,

$$b = \bigvee_{s \in \mathbb{N}} [b \wedge s[(sb - a) \vee 0]] = \bigvee_{s} [b \wedge [s(sb - a) \vee 0]] \quad ,$$

$$b = \bigvee_{s} [b \wedge s(sb - a)] \vee 0 = \bigvee_{s} [b \wedge s(sb - a)] \quad .$$

2.5 COROLLAIRE. - Si G est archimédien et N un idéal fermé par $\bigvee$ dénombrable, G/N est archimédien.

En effet, soient $0 \leqslant b \leqslant a$ tels que $N + nb \leqslant N + a$ quel que soit n . On a $(nb - a) \vee 0 \in N$ pour tout n . D'après la démonstration du théorème 2.4, on voit que :

$$b = \bigvee_{m,n} [b \wedge m[(nb - a) \vee 0]] \in N \quad ,$$

donc $N + b = N$ et G/N est **archimédien**.

Considérons un groupe G représentable, c'est-à-dire un groupe réticulé qui peut être plongé dans un produit direct de groupes totalement ordonnés. Si C est une valeur de a et si D est l'intersection des ℓ-s-c contenant strictement D , on a $C \lhd D$, et D/C est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}$ [5].

2.6 THÉORÈME. - Un groupe G représentable est archimédien si, et seulement si, pour tout $a \in G$, a' est l'intersection des valeurs de a .

Montrons la suffisance. Soient $0 < b \leqslant a$. On a $b \notin a'$, donc il existe une valeur C de a telle que $b \notin C$. D étant défini comme plus haut, on a $b \in D$, car $a \in D$. Il existe un n tel que , dans D/C , on **ait** $C + a < C + nb$, donc $nb \nleqslant a$.

Réciproquement, considérons un groupe archimédien.

Soit $a > 0$. Prenons $b > 0$ avec $b \notin a'$. On a $c = a \wedge b > 0$, donc il existe un n tel que $nc \nleq a$. Posons :

$$a = (nc \wedge a) + h \quad \text{et} \quad nc = (nc \wedge a) + g \quad .$$

On a $g > 0$. Soit P un idéal premier tel que $g \notin P$. On a $a \notin P$, car sinon $nc \wedge a \in P$, ce qui entraînerait $g \in P$. Soit M une valeur de a contenant P, comme $g \wedge h = 0$, on a $h \in P$ et a fortiori $h \in M$. Il en résulte que

$$nc \wedge a \notin M \quad ,$$

donc $c \notin M$, et finalement $b \notin M$.

3. Problème de la représentation

On sait que KRULL avait conjecturé que les groupes archimédiens sont les groupes de fonctions réelles sur un ensemble. NAKAYAMA a donné un contre-exemple prouvant qu'il n'en est rien, et finalement P. JAFFARD [8] a exhibé un groupe archimédien qui n'admet aucun homomorphisme non nul dans $\mathbb{R}$. Dès lors, il ne restait plus que deux directions de recherche. La première consiste à rechercher des représentations moins exigeantes. Cette voie a abouti au théorème de Bernau [1] : Tout groupe archimédien peut être plongé dans le groupe des fonctions continues presque finies sur un espace de Stone.

En suivant la méthode de NAKANO et BROWN [2], on peut en déduire que tout groupe archimédien est image homomorphe d'un groupe de fonctions réelles. La deuxième voie consiste évidemment à déterminer des classes de groupes archimédiens qui sont représentables par des fonctions réelles. Dans cette voie, on trouve le résultat de WEINBERG [10] que nous allons généraliser.

Soit G un groupe archimédien. Prenons $a > 0$. Soit $\Omega(a)$ la borne supérieure des idéaux ne contenant pas a.

3.1 LEMME. - On a $G = \Omega(a) + I(a)$.

Soit $x > 0$. Il existe n tel que $na \nleq x$. Posons :

$$x = (x \wedge na) + u \quad \text{et} \quad na = (x \wedge na) + v \quad .$$

On a d'une part, $x \wedge na \in I(a)$. D'autre part, $0 < v \leq na$ entraîne

$$u \in v' \subseteq \Omega(v) \subseteq \Omega(na) = \Omega(a) \quad .$$

Donc $x \in \Omega(a) + I(a)$.

3.2 LEMME. - Dans un groupe archimédien, les conditions suivantes sont équivalentes, pour tout $a > 0$:

(i) $\Omega(a) \neq G$ (iii) $\Omega(a) = a'$

(ii) $\Omega(a)$ <u>est maximal</u> (iv) a' <u>est premier</u> .

(i) $\Longrightarrow$ (ii) . Si $\Omega(a) \subset N$, on a $a \in N$ par définition de $\Omega(a)$, donc

$$G = \Omega(a) + I(a) \subseteq N$$

c'est-à-dire $N = G$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) . On a toujours $a' \subseteq \Omega(a)$. Si $0 < b \notin a'$, on a

$$b \wedge a > 0 \quad \text{et} \quad \Omega(b \wedge a) \subseteq \Omega(a) \neq G$$

ce qui implique $\Omega(b \wedge a)$ maximal. On a $\Omega(b \wedge a) = \Omega(a)$, et par suite

$$b \wedge a \notin \Omega(a) \quad .$$

A fortiori $b \notin \Omega(a)$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) , car $a \notin \Omega(a)$ implique $a' = \Omega(a)$ premier.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) . G/a' est totalement ordonné, car a' est premier. Il est archimédien d'après (2.5). Il n'a donc pas d'idéaux propres.

Soit M une valeur de a . On a $a' \subseteq M$. Comme a' est maximal, il en résulte $M = a'$. Finalement $\Omega(a) = a'$, donc on a certainement $\Omega(a) \neq G$.

Il est bien connu que la condition (iv) est équivalente, dans tout groupe réticulé, à "a basic".

Considérons le radical $R(G)$ de G , c'est-à-dire l'intersection des $\Omega(a)$ pour tous les $a > 0$.

Nous appellerons <u>représentation complète</u> toute représentation qui conserve les $\bigvee$ (donc les $\bigwedge$) infinis.

3.3 THÉORÈME. - <u>Si</u> G <u>est un groupe archimédien,</u> $G/R(G)$ <u>admet une représentation complète dans le groupe des fonctions réelles sur un ensemble</u> X .

Soit φ l'homomorphisme canonique $G \longrightarrow G/R(G)$. Si $\Omega(a) \neq G$, $(\Omega(a))$ est maximal, et $\varphi(\Omega(a))$ l'est aussi. De plus, on a

$$G = I(a) \oplus \Omega(a) \quad ,$$

donc $\varphi(\Omega(a))$ est facteur direct dans $G/R(G)$, ce qui entraîne qu'il est fermé. Finalement, dans $G/R(G)$, $\{0\}$ s'écrit comme intersection d'idéaux maximaux fermés, ce qui établit le théorème.

3.4 COROLLAIRE (WEINBERG [10]). - <u>Pour qu'un groupe réticulé admette une représentation complète dans le groupe des fonctions réelles sur un ensemble, il faut et il</u>

<u>suffit qu'il soit archimédien et complètement distributif</u>.

En effet, P. CONRAD a montré [4] qu'un groupe abélien est complètement distributif si, et seulement si, son radical est nul.

4. Groupes hyper-archimédiens.

Nous avons déjà remarqué que la condition archimédienne peut s'écrire :

$$\forall\ f \geqslant 0\ ,\quad \forall\ g > 0\ ,\quad \exists\ m\ ,\quad f \wedge mg < mg\quad .$$

Nous définirons les groupes hyper-archimédiens par la condition plus forte :

$$\forall\ f \geqslant 0\ ,\quad \forall\ g \geqslant 0\ ,\quad \exists\ m\ ,\quad f \wedge mg \leqslant (m-1)g\quad .$$

Les groupes hyper-archimédiens peuvent être caractérisés de la façon suivante : Nous dirons <u>principal</u> tout ℓ-s-c de la forme $I(g)$.

4.1 THÉORÈME. - <u>Pour un groupe réticulé</u> G , <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) G <u>est hyper-archimédien</u> ;
(ii) <u>Tout</u> ℓ-s-c <u>principal est facteur direct</u> ;
(iii) <u>Tout</u> ℓ-s-c <u>premier est maximal</u>.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Soit m tel que $f \wedge mg \leqslant (m-1)g$. On a

$$[f-(m-1)g] \wedge g \leqslant 0\quad ,$$

ce qui peut s'écrire :

$$0 = [[f-(m-1)g] \wedge g] \vee 0 = [[f-(m-1)g] \vee 0] \wedge g\ ,\ \text{car}\quad g \geqslant 0\quad .$$

$$0 = [f + (-(m-1)g \vee -f)] \wedge g = [f - ((m-1)g \wedge f)] \wedge g\quad .$$

Par conséquent, $f - ((m-1)g \wedge f) \in g'$. Mais $(m-1)g \wedge f \in I(g)$, donc on a $f \in g' + I(g)$. Ceci prouve que $G = g' \oplus I(g)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) . Soient f et g positifs. Puisque $G = g' \oplus I(g)$, on peut écrire $f = a + b$ avec $0 \leqslant a \in g'$ et $0 \leqslant b \in I(g)$. Il existe un entier m tel que $b \leqslant (m-1)g$. Par suite,

$$(m-1)g \wedge f = (m-1)g \wedge (a \vee b) = [(m-1)g \wedge a] \vee [(m-1)g \wedge b] = 0 \vee b = b\quad .$$

Donc $f - [(m-1)g \wedge f] = a \in g'$. En remontant le calcul précédent, on retrouve $f \wedge mg \leqslant (m-1)g$.

(ii $\Longrightarrow$ (iii) . Soit P un ℓ-s-c premier. Supposons $P \subset N$. Si $g \in N - P$, on a $g' \subseteq P \subset N$, donc $G = g' + I(g) \subseteq N$, c'est-à-dire $N = G$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) . (iii) entraîne évidemment que tout ℓ-s-c premier est minimal.

Prenons $g \in G$, et considérons le ℓ-s-c N engendré par g' et $I(g)$. Si on avait $N \neq G$, alors on pourrait trouver un ℓ-s-c premier P contenant N . D'après la propriété caractéristique des premiers minimaux [5], $g \in P$ implique

$$g' \notin P \quad ,$$

et ceci nous donne une contradiction.

Un exemple de groupe hyper-archimédien est fourni par le groupe des fonctions réelles sur un ensemble X qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. La question de savoir si tout groupe hyper-archimédien peut être représenté de cette manière est ouverte. On dispose cependant de la représentation suivante :

4.2 THÉORÈME. - <u>Un groupe reticulé est hyper-archimédien si, et seulement si, il peut être représenta par des fonctions réelles sur un espace séparé, à supports compacts.</u>

Soit G hyper-archimédien. Soit E l'ensemble des idéaux premiers. Nous avons la représentation $G \longrightarrow \prod_{P \in E} G/P$, où G/P est isomorphe à un sous-groupe de $\underset{\sim}{R}$. Pour $f \in G$, posons

$$\Sigma(f) = \{P \in E \mid f \notin P\} \quad .$$

On vérifie facilement que la topologie de E admettant les $\Sigma(f)$ comme base d'ouverts est séparée.

Montrons que $\Sigma(f)$ est compact pour cette topologie. Si

$$\Sigma(f) = \bigcup_{\lambda} \Sigma(f_\lambda) \ , \text{ alors } \ f \in \bigvee_{\lambda} I(f_\lambda) \quad .$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver $P \in E$ tel que

$$\bigvee_{\lambda} I(f_\lambda) \subseteq P$$

et $f \notin P$. On a donc $f \in I(f_1) + \ldots + I(f_n)$, ce qui implique

$$\Sigma(f) \subseteq \Sigma(f_1) \cup \ldots \cup \Sigma(f_n) \quad .$$

Réciproquement, soit $G \longrightarrow \prod_{P \in E} G/P$ la représentation donnée. Soient $f \geqslant 0$ et $g \geqslant 0$. Posons :

$$V_n = \{P \in \Sigma(g) \mid ng + P \geqslant f + P\} = \Sigma(g) \cap \complement\, \Sigma((f - ng)_+) \quad .$$

V_n est ouvert dans $\Sigma(g)$, car $\Sigma((f - ng)_+)$ est compact donc fermé. De plus, $\Sigma(g) = \bigcup_{n \in \underset{\sim}{N}} V_n$. Prenons un recouvrement fini $\Sigma(g) = V_{n_1} \cup \ldots \cup V_{n_k}$. Soit m le plus grand des n_i . On a

$$mg + P \geqslant f + P \quad \text{pour tout} \quad P \in \Sigma(g) \quad .$$

Il en résulte que

$$(f + P) \wedge [(m + 1)g + P] \leqslant mg + P \quad \text{quel que soit} \quad P \quad ,$$

et finalement $f \wedge (m + 1)g \leqslant mg$.

Il résulte immédiatement de la définition que tout sous-groupe, sous-treillis d'un groupe hyper-archimédien, est hyper-archimédien. Grâce à (4.1 (iii)) on voit que la propriété se conserve par passage au quotient. Elle ne se conserve pas par produit direct infini car $\underset{\approx}{R}^{[0,1]}$ n'est pas hyper-archimédien. Par contre, on a la propriété suivante :

4.3 PROPOSITION. - Une somme directe de groupes réticulés est hyper-archimédienne si, et seulement si, chaque sommant est hyper-archimédien.

Soit $G = \Sigma G_i$. Prenons $g \geqslant 0$, et montrons que $I(g)$ est facteur direct. On a $g = g_1 + \ldots + g_\lambda$, donc $I(g) = I(g_1) + \ldots + I(g_\lambda)$.

Si $f \in G$, on peut écrire $f = f_1 + \ldots + f_\lambda + t$ avec $f_i \in G_i$. Puisque G_i est hyper-archimédien,

$$f_i = u_i + s_i \quad \text{où} \quad u_i \in I(g_i) \quad \text{et} \quad s_i \in G_i \cap g_i' \quad .$$

Nous avons $u = u_1 + \ldots + u_\lambda \in I(g_1) + \ldots + I(g_\lambda) = I(g)$, et d'autre part, $s_i \in g'$ et $t \in g'$, donc $s = s_1 + \ldots + s_\lambda + t \in g'$. Finalement,

$$f = u + s \in I(g) + g' \quad .$$

Le résultat suivant fournit un exemple de groupe qui est à la fois hyper-archimédien et complètement distributif.

4.4 THÉORÈME. - Pour un groupe réticulé G , les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est archimédien, et tout élément n'a qu'un nombre fini de valeurs ;
(ii) Tout ℓ-s-c est facteur direct ;
(iii) G est isomorphe à une somme directe de sous-groupes de $\underset{\approx}{R}$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) . Si tout élément n'a qu'un nombre fini de valeurs, tout ℓ-s-c est fermé par $\vee$ infini [3]. D'après (2.2), nous avons, pour tout idéal J ,

$$G = (J + J')'' = J + J' \quad , \quad \text{donc} \quad G = J \oplus J' \quad .$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) . Grâce au théorème (4.1), nous savons que G est hyper-archimédien. Considérons, comme dans (4.2), la représentation $G \longrightarrow \prod_{P\in E} G/P$. Pour $P \in E$, nous avons $P = P'' = \bigcap_{a\in P'} a'$. Puisque P est maximal, il existe $a \in P'$ tel que $P = a'$. Par (3.2) nous voyons que $P = \Omega(a)$, donc $\Sigma(a) = \{P\}$. Pour tout $f \in G$, $\Sigma(f)$ est compact et discret, donc fini. De plus,

$$G = I(a) \cup \mathcal{M}(a) = I(a) \oplus P \quad ,$$

donc $G/P \subseteq G$, ce qui achève la démonstration.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) . Nous savons, par la proposition (4.3), que G est hyper-archimédien. Nous avons $G = \sum_{i\in I} R_i$. Posons $P_i \{x \in G \mid x_i = 0\}$. Si $a \in G$, nous avons $a = a_1 + \dots + a_n$, donc $a' = P_1 \cap \dots \cap P_n$. Si P est un idéal premier ne contenant pas a , on a $a' \subseteq P$, donc il existe un i tel que $P_i \subseteq P$. Comme P_i est maximal, $P = P_i$. Il en résulte que les P_i sont les valeurs de a .

Dans l'énoncé (4.4), la condition "tout élément n'a qu'un nombre fini de valeurs" peut être remplacée par une condition plus forte, la condition (F) de Conrad, ou par une condition plus faible : "tout idéal est fermé par $\bigvee$ infini".

5. ℓ-espaces booléens.

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ réticulé. Nous dirons que c'est un ℓ-espace booléen s'il est monogène et hyper-archimédien. Dire qu'il est monogène, c'est dire qu'il existe un élément $e > 0$ "archimédien" : pour tout x , il existe un entier n tel que $x \leqslant ne$. Si V est un ℓ-espace booléen, nous pouvons lui associer l'espace V^* de ses idéaux premiers, avec la topologie admettant comme ouverts de base les $\Sigma(f) = \{P \in V^* \mid f \notin P\}$. Comme $V^* = \Sigma(e)$, il résulte immédiatement du théorème (4.2) que V^* est un espace de Boole.

Inversement, si E est un espace de Boole, nous noterons E^* l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par les fonctions caractéristiques des "clopens". On vérifie aisément que E^* est réticulé. Il possède un élément archimédien : la fonction caractéristique de E . Il est hyper-archimédien, car tout $f \in F^*$ a pour support un clopen, donc un compact (4.2).

5.1 THÉORÈME. - Si E est un espace topologique booléen, $(E^*)^*$ est homomorphe à E .

A tout $x \in E$, associons l'idéal premier $M_x = \{f \in E^* \mid f(x) = 0\}$. Cette application est injective, car deux points distincts de E sont séparés par un clopen, donc par une fonction de E^* .

Si M est un idéal premier de E^*, supposons par l'absurde que $M \neq M_x$ pour tout x. Alors $M \not\subseteq M_x$, car M est maximal, donc, pour tout x, il existe un $0 \leqslant f_x \in M - M_x$. Les $\Sigma(f_x)$ forment un recouvrement ouvert de E. Donc

$$E = \Sigma(f_{x_1}) \cup \ldots \cup \Sigma(f_{x_n}) \quad .$$

On a $f = f_{x_1} \vee \ldots \vee f_{x_n} \in M$, et $f' = 0$ car $\Sigma(f) = E$. Par suite,

$$E^* = I(f) + f' \subseteq M \quad ,$$

ce qui est impossible.

L'application $x \dashrightarrow M_x$ est donc une bijection de E sur $(E^*)^*$. C'est en fait un homéomorphisme, car la topologie de E est engendrée par les clopens, qui sont de la forme $\Sigma(f)$ pour $f \in E^*$.

5.2 THÉORÈME. - Si V est un espace réticulé booléen, $(V^*)^*$ est isomorphe à V.

Considérons, comme dans (4.2), la représentation :

$$V \xrightarrow{\varphi} \prod_{P \in V^*} V/P \quad .$$

Soit $a \in V$ archimédien. Il existe un isomorphisme de V/P dans $\mathbb{R}$ (et un seul), tel que $a + P$ soit envoyé sur 1. Nous identifions V/P à son image. Dans ces conditions, $\varphi(V)$ contient les fonctions constantes.

Si $g \in V$ et $r \in \mathbb{R}$,

$$\{P \in V^* \mid g(P) = r\} = \complement\, \Sigma(g - r) \quad ,$$

est un clopen. De plus $\Sigma(g) = \bigcup_{r \neq 0} \complement\, \Sigma(g - r)$. Comme $\Sigma(g)$ est compact, on peut extraire un recouvrement fini, ce qui signifie que $\varphi(g)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. On a donc

$$\varphi(V) \subseteq (V^*)^* \quad .$$

Soit C un clopen de V^*. Comme C est ouvert, il peut s'écrire $C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Sigma(f_\lambda)$ avec $f_\lambda \in V$, C étant compact,

$$C = \Sigma(f_1) \cup \ldots \cup \Sigma(f_n) \quad .$$

C'est-à-dire $C = \Sigma(f)$ avec $f = f_1 \vee \ldots \vee f_n \in V$. Comme f ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut trouver m tel que $mf(P) \geqslant 1$ pour tout $P \in C$. Alors $mf \wedge a \in V$ a pour image, par φ, la fonction caractéristique de C. Il en résulte que $(V^*)^* \subseteq \varphi(V)$ d'où l'égalité.

5.3 PROPOSITION. - Il existe un isomorphisme entre le treillis des ouverts de E et le treillis des idéaux de E^*. Dans cet isomorphisme, les ouverts réguliers correspondent aux composantes et les clopens aux idéaux principaux.

Si Ω est un ouvert, posons

$$\rho(\Omega) = \{f \in E^* \mid \Sigma(f) \subseteq \Omega\} \text{ .}$$

Si J est un idéal, posons

$$\sigma(J) = \bigcup_{f \in J} \Sigma(f) \text{ .}$$

Nous avons :

$$x \in \sigma(\rho(\Omega)) \iff \exists\, f \in \rho(\Omega) \text{ , } x \in \Sigma(f) \iff \exists\, f \text{ , } \Sigma(f) \subseteq \Omega \text{ , } x \in \Sigma(f)$$

$$\iff x \in \mathring{\Omega} = \Omega \text{ ,}$$

$$f \in \rho(\sigma(I)) \iff \Sigma(f) \subseteq \sigma(I) \iff \Sigma(f) \subseteq \bigcup_{g \in J} \Sigma(g) \text{ .}$$

Si $f \in J$, cette dernière condition est évidemment vérifiée. Réciproquement, si $\Sigma(f) \subseteq \bigcup_{g \in J} \Sigma(g)$, on a

$$\Sigma(f) \subseteq \Sigma(g_1) \cup \ldots \cup \Sigma(g_n) = \Sigma(g_1 \vee \ldots \vee g_n) \text{ .}$$

Il en résulte

$$f \in (g_1 \vee \ldots \vee g_n)'' = I(g_1 \vee \ldots \vee g_n) \subseteq J \text{ .}$$

Donc $\rho(\sigma(J)) = J$.

Dans l'isomorphisme entre les deux treillis, les pseudo-compléments se correspondent, ainsi que les compléments. La deuxième assertion en résulte immédiatement.

5.4 COROLLAIRE. - E est un espace stonien si, et seulement si, dans E^*, toute composante est facteur direct.

5.5 THÉORÈME. - Un espace réticulé booléen V est complet si, et seulement si, il n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers.

En vertu de (5.1) et (5.2), nous pouvons raisonner sur $E = V^*$. Soit $\mathcal{C}(E, \underset{\sim}{R})$ l'ensemble des applications continues de E dans $\underset{\sim}{R}$. On sait que $\mathcal{C}(E, \underset{\sim}{R})$ est complet si, et seulement si, E est stonien [9].

Si E est fini, il est stonien, donc $E^* = (E, \underset{\sim}{R})$ est complet. Supposons E^* complet. Toute composante est facteur direct, donc E est stonien (5.4). Montrons que $\mathcal{C}(E\,,\,\underset{\approx}{R})$ est le complété de E^*. Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout $0 < h \in \mathcal{C}(E\,,\,\underset{\approx}{R})$, il existe s et v dans E^* telles que $0 < s \leqslant h \leqslant v$ (P. CONRAD et Mc ALLISTER [6]). Supposons h bornée par $r \in \underset{\approx}{R}$. On peut prendre $v = r1$. De plus, $\Sigma(h)$ est une réunion de clopens. Soit C l'un d'entre eux. h est bornée sur C, et atteint sa borne inférieure $\mu > 0$. La fonction s, égale à μ sur C, et à 0 sur le complémentaire, appartient à E^*, et vérifie $0 < s \leqslant h$.

Nous avons donc $E^* = \mathcal{C}(E\,,\,\underset{\approx}{R})$. Soit C_n une suite croissante de clopens. On peut écrire $\complement C_n = \Sigma(g_n)$ avec $g_n \geqslant 0$. Alors

$$g = \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{1}{2^n}\right) g_n \in \mathcal{C}(E\,,\,\underset{\approx}{R}) = E^* \quad .$$

On a :

$$\bigcup_{n \geqslant 0} C_n = \bigcap_{n \geqslant 0} \Sigma(g_n) = \Sigma(g)$$

donc $C = \bigcup_{n \geqslant 0} C_n$ est un clopen. C'est une réunion finie, car C est compact. L'algèbre du clopen vérifie la condition de chaîne ascendante, donc elle est finie. Il en résulte que E lui-même est fini.

De la démonstration précédente, on peut conclure que la complétion d'un groupe hyper-archimédien n'est pas nécessairement hyper-archimédienne.

5.6 PROPOSITION. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces booléens. Il existe une bijection entre l'ensemble</u> $\mathcal{C}(E\,,\,F)$ <u>des applications continues de</u> E <u>dans</u> F <u>et l'ensemble</u> $\mathrm{Hom}(F^*\,,\,E^*)$ <u>des homomorphismes d'espace réticulé qui préservent l'identité.</u>

Si $\varphi \in \mathcal{C}(E\,,\,F)$, nous lui associons $\overline{\varphi}$, définie par $\overline{\varphi}(f) = f \circ \varphi$, $\overline{\varphi} = \overline{\psi}$ entraîne $\varphi = \psi$, car E^* sépare les points de E.

Soit $\tau \in \mathrm{Hom}(F^*\,,\,E^*)$. $f \dashrightarrow \tau(f)(x)$ est un homomorphisme de F^* sur $\underset{\approx}{R}$. Il préserve l'identité. Il existe donc un $y \in F$ unique, tel que $\tau(f)(x) = f(y)$. Posons $y = \varphi(x)$. φ est continue. En effet, soit $C = \Sigma(f)$ un clopen de F. On a :

$$x \in \varphi^{-1}(c) \iff \varphi(x) \in C \iff f[\varphi(x)] \neq 0 \iff \tau(f)(x) \neq 0 \iff x \in \Sigma(\tau(f)) \quad ,$$

donc $\varphi^{-1}(C) = \Sigma(\tau(f))$ est un clopen. Montrons que $\tau = \overline{\varphi}$.

$$\tau(f)(x) = f(\varphi(x)) = \overline{\varphi}(f)(x) \quad \text{pour tout } x \quad ,$$

donc $\tau(f) = \overline{\varphi}(f)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNAU (S. J.). - Unique representation of archimedean lattice groups and normal archimedean lattice rings, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 15, 1965, p. 599-631.

[2] BROWN (Leon) and NAKANO (Hidegoro). - A representation theorem for archimedean linear lattices, Proc. Amer. math. Soc., t. 17, 1966, p. 835-837.

[3] BYRD (Richard D.). - Lattice-ordered groups (Thèse Sc. math., Tulane University, 1966).

[4] CONRAD (Paul F.). - The relationship between the radical of a lattice-ordered group and complete distributivity, Pacific J. of Math., t. 14, 1964, p. 493-499.

[5] CONRAD (Paul F.). - Introduction à la théorie des groupes réticulés. - Paris, Secrétariat mathématique, 1967.

[6] CONRAD (Paul F.) and Mc ALLISTER (H.). - The completion of a lattice-ordered group (multigraphié).

[7] FUCHS (Laszló). - Teilweise geordnete algebraische Strukturen. - Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1966 (Studia Mathematica. Mathematische Lehrbücher, 19).

[8] JAFFARD (Paul). - Théorie algébrique de la croissance, Seminaire Dubreil-Pisot : algèbre et théorie des nombres, 9e année, 1955/56, n° 24, 11 p.

[9] STONE (M. H.). - Boundedness properties in function-lattices, Canad. J. of Math., t. 1, 1949, p. 176-186.

[10] WEINBERG (Elliot Carl). - Completely distributive lattice-ordered groups, Pacific J. of Math., t. 12, 1962, p. 1131-1137.