Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Léonce Lesieur

Anneaux noethériens à gauche complètement primaires à gauche

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, nº 1 (1967-1968), exp. nº 1, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_1_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, n° 1

ANNEAUX NOETHÉRIENS À GAUCHE COMPLÈTEMENT PRIMAIRES À GAUCHE

par Léonce LESIEUR

1. Introduction.

DÉFINITION 1. - Un anneau A, supposé unitaire et noethérien à gauche, est dit (complètement) primaire (à gauche) si tout diviseur de zéro à droite est nilpotent :

$$ab = 0 \ , \quad a \neq 0 \implies \exists\, n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad b^n = 0 \ .$$

PROPRIÉTÉ 1. - L'ensemble D des diviseurs de zéro à droite forme un idéal bilatère complètement premier qui coïncide avec l'ensemble des éléments nilpotents et avec le radical nilpotent $\mathcal{R}$.

On a évidemment : $\mathcal{R} \subseteq D$.

Démontrons l'inclusion inverse. Soit $b \in D$. Nous avons aussi $\lambda b \in D$, quel que soit $\lambda \in A$. En effet, $b\lambda$ étant diviseur de zéro à droite, est nilpotent. On a donc : $(b\lambda)^n = 0$, $(b\lambda)^{n-1} \neq 0$. En supposant $b \neq 0$ et λb régulier à droite, l'égalité $(b\lambda)^n b = 0 = b(\lambda b)^n$ entraînerait $b = 0$. Il en résulte $\lambda b \in D$. L'idéal à gauche Ab est donc un nil-idéal lorsque $b \in D$. D'après le théorème de Levitzki, Ab est aussi un idéal nilpotent, ce qui prouve $b \in \mathcal{R}$ et $D \subseteq \mathcal{R}$, d'où $D = \mathcal{R}$.

De plus, $D = \mathcal{R}$ est complètement premier, comme ensemble des diviseurs de zéro à droite :

$$xy \in D \implies y \in D \quad \text{ou} \quad x \in D$$

$(axy = 0 \ , \ a \neq 0 \ , \ y \notin D \implies ax = 0 \ , \text{ d'où } x \in D)$.

COROLLAIRE 1. - L'anneau quotient A/D est intègre et noethérien à gauche. Il admet donc un corps de fractions K.

COROLLAIRE 2. - Un anneau complètement primaire à gauche est primaire à gauche au sens de [10], p. 47.

En effet, il faut montrer que la relation $aAb = 0$, $a \neq 0$, entraîne $b \in \mathcal{R}$.

Or, on a en particulier :

$$ab = 0 \ , \qquad a \neq 0$$

ce qui prouve $b \in D$, donc $b \in \mathcal{R}$.

2. Cas particulier d'un anneau co-irréductible.

Examinons le cas d'un anneau noethérien à gauche co-irréductible, c'est-à-dire tel que l'idéal nul (0) soit $\cap$-irréductible dans A :

$$x \neq 0 \ , \quad y \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad Ax \cap Ay \neq 0 \ .$$

PROPRIÉTÉ 2. - Tout anneau noethérien à gauche co-irréductible est complètement primaire à gauche.

Soit en effet :

$$ab = 0 \ , \quad a \neq 0 \ .$$

Considérons un entier n tel que :

$$0 \mathbin{\dot{.}} b^n = 0 \mathbin{\dot{.}} b^{n+1} \ .$$

On en déduit :

$$(0 \mathbin{\dot{.}} b) \cap Ab^n = 0 \ ,$$

et comme l'annulateur $0 \mathbin{\dot{.}} b$ n'est pas nul, on en tire $b^n = 0$. Tout diviseur de zéro à droite b est donc nilpotent, et l'anneau A est bien complètement primaire à gauche.

La propriété 1 s'applique en particulier aux anneaux co-irréductibles. On retrouve ainsi une propriété signalée dans [9], p. 401. Dans ce cas, $D = \mathfrak{R}$ coïncide avec l'idéal singulier de A . La question se pose dans le cas d'un anneau complètement primaire à gauche quelconque (problème 2).

3. Cas artinien.

Désignons par D' l'ensemble des éléments réguliers à droite, par G' l'ensemble des éléments réguliers à gauche, par G l'ensemble des éléments diviseurs de zéro à gauche.

A étant noethérien complètement primaire à gauche, on a :

$$D \subseteq G \ , \quad \text{d'où} \quad G' \subseteq D' \ .$$

Mais, si A est artinien, tout élément régulier à droite est inversible donc régulier à gauche, et on a $D' \subseteq G'$. Il en résulte $D' = G'$ si A est artinien complètement primaire à gauche. Dans ce cas, les éléments réguliers sont inversibles et les éléments non inversibles forment un idéal bilatère D .

DÉFINITION 2. - On appelle anneau local un anneau tel que l'ensemble des éléments non inversibles forme un idéal bilatère.

Nous avons donc établi que tout anneau artinien complètement primaire à gauche est local.

Réciproquement, supposons A local et artinien à gauche. Comme A est local, l'ensemble des éléments non inversibles est l'idéal propre maximum D de A ; il coïncide avec le radical de Jacobson, qui est nilpotent puisque A est artinien à gauche. On a : $ab = 0$, $a \neq 0 \Longrightarrow b \in D$ (car l'hypothèse $b \notin D$ entraînerait b inversible et $a = 0$) et par suite b est nilpotent. L'anneau A est donc complètement primaire à gauche (et aussi à droite, par le même raisonnement).

PROPRIÉTÉ 3. - Il y a équivalence entre les deux propriétés :

(α) A est artinien à gauche complètement primaire à gauche ;

(β) A est artinien à gauche local.

Chacune de ces propriétés entraîne, pour l'anneau, d'être complètement primaire à droite.

4. Anneau de fractions d'un anneau noethérien à gauche primaire.

Dans la suite, nous dirons, sauf mention contraire, anneau primaire A au lieu de anneau complètement primaire à gauche A .

Les éléments de $S = D'$ forment un demi-groupe multiplicatif. En vue de construire un anneau de fractions de A par rapport à S , nous allons utiliser la condition de régularité de SMALL [11] pour les anneaux noethériens à gauche.

PROPRIÉTÉ 4. - L'anneau A , supposé noethérien à gauche et primaire, vérifie la condition de régularité (généralisée) :

(R) Tout élément régulier modulo le radical $\mathfrak{R}$ est régulier à droite dans A .

En effet, comme on a $\mathfrak{R} = D$ et que A/D est intègre, les éléments $a \in A$ qui sont réguliers modulo D sont ceux qui n'appartiennent pas à D , c'est-à-dire les éléments réguliers à droite dans A .

Remarquons que la condition de régularité généralisée est la réciproque d'une propriété qui est vraie dans tout anneau noethérien à gauche A : tout élément régulier à droite dans A est régulier modulo le radical $\mathfrak{R}$. (DJABALI, [5]).

La condition de régularité généralisée (R) entraîne, comme dans [11], les propriétés suivantes :

THÉORÈME 1. - La condition (C) des multiples communs est vérifiée dans A pour la partie multiplicative $S = D'$.

(C) $\forall\ s \in D'$, $a \in A$, $\exists\ s' \in D'$, $a' \in A$ tels que $a's = s'a$.

THÉORÈME 2. - L'ensemble des $x \in A$ tels qu'il existe $s \in D'$ avec $sx = 0$ forme un idéal bilatère I de l'anneau A.

Ce résultat est une conséquence de la condition (C). En effet, on a :

$$x \in I \implies xu \in I \quad \text{puisque} \quad sxu = 0 \;;$$

$$x \in I \implies vx \in I \,,$$

car la condition (C) entraîne $a's = s'v$, d'où :

$$s'vx = a'sx = 0 \,, \qquad \text{et} \qquad vx \in I \,.$$

$$x \in I \ \text{et} \ x' \in I \implies x - x' \in I \,,$$

car

$$sx = 0 \,, \ s'x' = 0 \implies \sigma = s_1 \, s' = as \in S \,,$$

d'où :

$$\sigma(x - x') = 0 \qquad \text{et} \qquad x - x' \in I \,.$$

I est bien un idéal bilatère de l'anneau A.

On a évidemment $I \subseteq D$. Si A est commutatif, on a $I = 0$. Nous verrons plus loin un exemple pour lequel $I \neq 0$. Dans ce cas, la partie multiplicative S possède des éléments non réguliers à gauche. Mais la condition (C) étant vérifiée dans l'anneau A lui-même, on se trouve dans un cas simple étudié dans [8] où l'anneau de fractions existe. (Le cas le plus général, pour les anneaux et les demi-groupes, a été étudié par P. LEFEBVRE [6] et [7].) Dans notre cas particulier, où la condition de régularité (généralisée) est vérifiée, la théorie de Small (généralisée) donne le résultat suivant :

THÉORÈME 3. - L'anneau A admet un anneau de fractions par rapport à la partie multiplicative $S = D'$; cet anneau de fractions A_S est l'anneau total de fractions de A/I, et il est artinien.

DÉFINITION 3. - L'anneau A_S s'appelle l'anneau des fractions de A. A_S vérifie la propriété importante suivante :

THÉORÈME 4. - L'anneau de fractions d'un anneau noethérien à gauche primaire est artinien local.

Le fait que A_S soit artinien résulte de la théorie de Small (théorème 3). Démontrons qu'il est primaire. Remarquons d'abord que l'anneau quotient A/I est primaire et que son radical est D (modulo I). En effet, l'égalité $\alpha\beta = 0$,

$\alpha \neq 0$, dans A/I , équivaut, pour les représentants a et b dans A , à :

$$sab = 0 \ , \quad sa \neq 0 \ .$$

Il en résulte $b \in D$, et b , donc β , est nilpotent. De plus, dans A/I , les éléments réguliers à droite sont réguliers à gauche car $\alpha\beta = 0$, avec $a \notin D$, entraîne $sab = 0$ avec $sa \notin D$, donc $b \in I$ et $\beta = 0$. On voit de même que A/I est primaire à droite car $\alpha\beta = 0$, avec $\beta \neq 0$, entraîne $sab = 0$ avec $a \in D$ (sinon $b \in I$ et $\beta = 0$) ; d'où a et α sont nilpotents.

Cela posé, pour démontrer que l'anneau de fractions A_S est primaire, il suffit de montrer qu'il est local (propriété 3). Or, les éléments non inversibles sont ceux de l'ensemble $\gamma^{-1}\delta$, avec $\gamma \notin D \pmod I$ et $\delta \in D \pmod I$; en effet, si $\gamma^{-1}\delta$ est inversible, δ est régulier à droite et inversement. L'ensemble $\{\gamma^{-1}\delta\}$ forme un idéal bilatère ce qui prouve que l'anneau de fractions est local.

Remarque. - Il existe un anneau total de fractions d'un anneau primaire lorsque tout élément régulier à droite est régulier à gauche. On a dans ce cas $D = G$, c'est-à-dire $I = 0$. On peut se demander si la réciproque est vraie (problème 3).

5. Longueur d'un anneau noethérien à gauche primaire.

La propriété pour l'anneau A_S d'être artinien à gauche entraîne l'égalité des longueurs des chaînes maximales d'idéaux à gauche allant de 0 à A_S , et cette longueur est finie. Nous allons l'interpréter en termes d'idéaux de l'anneau A . Posons $\overline{A} = A/I$. Si $\mathfrak{A}$ est un idéal à gauche de A_S , sa restriction $r(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cap \overline{A}$ est un idéal à gauche de $\overline{A}$, qui est identifié à un idéal à gauche de A contenant I .

Cet idéal Q est D-primaire à droite au sens de la définition suivante :

DÉFINITION 4. - Q est un idéal à gauche D-primaire à droite de l'anneau A si on a la propriété :

$$ab \in Q \ , \quad b \notin Q \implies a \in D \ .$$

$Q = r(\mathfrak{A})$ est bien D-primaire à droite car l'hypothèse $a \notin D$ entraîne a inversible dans A_S et $b \in a^{-1}Q \subseteq Q$.

Inversement, si Q est un idéal à gauche de A contenant I , son extension $e(Q)$, qui est l'idéal engendré par Q dans A_S , est formée des éléments $c^{-1}q$ où q décrit Q , $c \in S$. Si Q est D-primaire à droite, on a $r(e(Q)) = Q$ car $c^{-1}q = q' \in A$; on en tire $q = cq'$ et $q' \in Q$ puisque $c \notin D$ et Q est D-primaire à droite. Il y a donc bijection croissante entre les idéaux à gauche

D-primaires à droite de A et les idéaux à gauche de A_S par :

$$Q \longmapsto e(Q) .$$

Cette application est injective d'après ce qui précède ; elle est surjective car, pour tout idéal à gauche I de A_S , on a :

$$I = e(r(I)) .$$

Remarquons que tout idéal à gauche Q , D-primaire à droite de A , contient I car

$$sx = 0 \in Q , \quad s \notin D \implies x \in Q .$$

Remarquons aussi que I est D-primaire à droite puisque :

$$ab \in I , \quad b \notin I \implies sab = 0 , \qquad \text{d'où} \quad a \in D$$

(sinon $sa \notin D$ et $b \in I$).

Par contre 0 n'est pas D-primaire à droite sauf si $I = 0$.

Le fait que A_S soit artinien entraîne donc la propriété suivante :

THÉORÈME 5. - Dans un anneau A noethérien à gauche primaire, toute chaîne maximale d'idéaux à gauche primaires à droite allant de I à A est finie et toutes ces chaînes ont la même longueur.

DÉFINITION 5. - Cette longueur commune s'appelle la longueur de l'anneau primaire A .

6. Condition de co-irréductibilité.

Revenons au cas particulier d'un anneau co-irréductible (paragraphe 2) en étudiant les conditions nécessaires, et si possible suffisantes, pour qu'un anneau noethérien à gauche primaire soit co-irréductible.

(α) Condition nécessaire. - Considérons les idéaux D-primaires à droite Y et leur trace sur l'idéal $0 \cdot\!\!: D$. Ces traces forment des idéaux à gauche vérifiant la condition de chaîne finie.

PROPRIÉTÉ 5. - Si A est co-irréductible, il n'existe aucun idéal à gauche Y , D-primaire à droite, vérifiant :

(1) $$0 \subset Y \cap (0 \cdot\!\!: D) \subset 0 \cdot\!\!: D .$$

En effet, soit Y , D-primaire à droite, et $x \in 0 \cdot\!\!: D$, $x \notin Y$. Considérons l'idéal à gauche $Y \,\dot{.}\, x$. On a :

$$u \in Y \,\dot{.}\, x \implies ux \in Y$$

et, comme $x \notin Y$, il en résulte $u \in D$, d'où $ux \in Dx = 0$. On en déduit :

$$Y \,\dot{.}\, x = 0 \,\dot{.}\, x$$

et, par suite :

$$0 = Y \cap Ax$$

ce qui est impossible avec $Y \neq 0$.

(β) Condition suffisante : cas $I = 0$. - Supposons maintenant $I = 0$, c'est-à-dire l'anneau A noethérien à gauche et complètement primaire à gauche et à droite.

Dans ce cas, l'idéal $0 \,\dot{.}\, D$ est D-primaire à droite. En effet, soit

$$ab \in 0 \,\dot{.}\, D , \qquad a \notin D .$$

On a donc $Dab = 0$. Si $d \in D$, la condition (C) du théorème 1, appliquée à d et a , donne :

$$sd = ua \qquad \text{avec } u \in D \text{ puisque } ua \in D \text{ et } a \notin D .$$

On en déduit $sdb = uab \in Dab = 0$. Comme $I = 0$, cela entraîne $db = 0$, donc $Db = 0$ et $b \in 0 \,\dot{.}\, D$.

L'idéal $0 \,\dot{.}\, D$ étant D-primaire à droite, et l'intersection de deux idéaux à gauche D-primaires à droite étant D-primaire à droite, la condition (1) exprime qu'il n'existe aucun idéal D-primaire à droite strictement inclus entre 0 et $0 \,\dot{.}\, D$. Montrons que cette condition est suffisante. Si 0 était $\cap$-irréductible, il le serait dans $0 \,\dot{.}\, D$; en effet,

$$X \cap 0 = D \,\dot{.}\, 0 \implies X = 0$$

car soit $D^k X = 0$ et $D^{k-1} X \neq 0$. On a :

$$D(D^{k-1} X) = 0 , \qquad \text{d'où } D^{k-1} \subset (0 \,\dot{.}\, D) \cap X = 0 ,$$

ce qui est impossible pour $X \neq 0$.

On peut donc supposer, en cas de réductibilité :

$$Y \neq 0 , \quad 0 = Ax \cap Y , \quad 0 \subset Ax \subseteq 0 \,\dot{.}\, D .$$

Prenons Y maximal pour cette propriété, (complément relatif de Ax), et montrons que Y est D-primaire à droite. En effet, soit :

$$ab \in Y , \quad b \notin Y , \quad a \notin D .$$

On a :

$$(Y + Ab) \cap Ax \neq 0 ,$$

d'où

$$y + \lambda b = \mu x \neq 0 \ .$$

Appliquons la condition (C) à a et λ :

$$ta = s\lambda \ , \qquad s \notin D \ .$$

On en déduit :

$$sy + s\lambda b = sy + tab = s\mu x \in Y$$

c'est-à-dire $s\mu x \in Y \cap Ax = 0$.

Il en résulte $\mu x = 0$ puisque $I = 0$. On arrive à une contradiction, et Y est bien D-primaire. Alors $Y \cap (0 \,.\!\!\cdot\, D)$ est D-primaire compris entre 0 et $0 \,.\!\!\cdot\, D$ puisque l'égalité à 0 entraîne $Y = 0$ et l'égalité à $0 \,.\!\!\cdot\, D$ entraîne :

$$0 = Ax \cap (0 \,.\!\!\cdot\, D) = Ax \ .$$

THÉORÈME 6. - Pour qu'un anneau noethérien à gauche, complètement primaire à gauche et à droite, soit co-irréductible, il faut et il suffit qu'il n'existe aucun idéal à gauche D-primaire à droite compris entre 0 et $0 \,.\!\!\cdot\, D$.

Remarque. - Dans le cas $I = 0$, on peut vérifier que l'idéal nul est isotypique.

PROPRIÉTÉ 6. - Si A est noethérien à gauche complètement primaire à gauche et à droite, 0 est idéal isotypique.

En effet, si 0 est $\cap$-irréductible, la propriété est vérifiée ([10], p. 103). Sinon, soit :

$$0 = Ax \cap Ay \ , \qquad x \neq 0 \ , \quad y \neq 0 \ .$$

On a nécessairement $x \in D$, $y \in D$ et on peut supposer $x \in 0 \,.\!\!\cdot\, D$, $y \in 0 \,.\!\!\cdot\, D$ (démonstration du théorème 6). On en déduit :

$$0 \,\cdot\!\!. \, x = 0 \,\cdot\!\!. \, y = D$$

car l'hypothèse $0 \,\cdot\!\!. \, x \supset D$ est contredite par la condtion $I = 0$. Donc une des propriétés caractéristiques de l'isotypie est vérifiée ([10], p. 103). Il en résulte en particulier que 0 est tertiaire à droite. Cela pose, dans le cas général I quelconque, certains problèmes (problèmes 4 et 5).

7. Exemples.

1° Anneau noethérien à gauche co-irréductible dans lequel $I \neq 0$. - Soient A' un anneau intègre commutatif noethérien, et P un idéal premier non nul de A'

tel que A' soit injecté dans A'/P (existence assurée par l'appendice). On a donc :

$$i : A' \rightarrowtail A'/P \ .$$

Soit φ l'homomorphisme canonique $\varphi : A' \to A'/P$.

A'/P est un A'-module à gauche monogène $D = A'e$. On considère le A'-module à gauche :

$$A = A' \times A'/P$$

avec la loi de multiplication :

$$(a , \alpha)(b , \beta) = (ab , \alpha i(b) + \varphi(a)\beta) \ .$$

On obtient un anneau noethérien à gauche co-irréductible dans lequel $I = D$ est formé des éléments $(0 , \beta)$. L'ensemble G des diviseurs de zéro à gauche est formé des éléments (p , α) , $p \in P$. On a bien $D \subsetneq G$. L'anneau de fractions de A est l'anneau total de fractions de $A/I = A/D$; c'est donc le corps des fractions de l'anneau intègre A/D .

2° <u>Anneau noethérien à gauche complètement primaire à gauche dans lequel</u> $0 \mathbin{.\!\!\raisebox{1ex}{.}} D \subseteq I$ <u>et qui n'est pas co-irréductible</u>. - Soient $A' = \mathbb{R}[X]$, et $\mathbb{R}$ le corps des réels. Considérons l'idéal :

$$H = A'(X^2 + 1)(X^2 + X + 1) = A'(X^2 + 1) \cap A'(X^2 + X + 1) \ .$$

On a pour l'anneau quotient le composé direct :

$$A'/H \simeq \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \oplus \mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1) \ ,$$

d'où $A'/H \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Il existe une injection i de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{C}$ avec conservation de l'élément unité. Il en résulte une injection $\dot{I}$ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ par $\dot{I}(f) = (i(f) , i(f))$, qui conserve l'élément unité. Donc il existe une injection I' de A' dans A'/H . Comme l'idéal H n'est pas $\cap$-irréductible, A'/H n'est pas co-irréductible, et l'anneau $A = A' \times A'/H$, construit comme à l'exemple 1° , n'est pas co-irréductible. De plus, les éléments $\dot{I}(f) \neq 0$ ne sont pas diviseurs de zéro dans A'/H , car si $f \neq 0$, les deux composantes de $\dot{I}(f)$ dans $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ sont différentes de zéro. L'anneau A est noethérien à gauche complètement primaire à gauche ; il vérifie $0 \mathbin{.\!\!\raisebox{1ex}{.}} D \subseteq I$ et n'est pas co-irréductible.

Cet exemple montre l'intérêt du problème 5.

APPENDICE

$\mathbb{R}$ étant le corps des réels et $\mathbb{C}$ le corps des complexes, il existe une injection de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{C}$, donc dans $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$.

Soit B une base de transcendance de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$, donc de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$ puisque $\mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$. Cette base B est infinie et a même la puissance du continu ([1], chap. 5, § 5, exercice 2). Il existe donc une correspondance biunivoque entre B et une partie $P \subsetneq B$, donc un $\mathbb{Q}$-isomorphisme σ_1 entre le corps $\mathbb{Q}(B)$ et le corps $\mathbb{Q}(P)$. Cet isomorphisme peut être étendu à un $\mathbb{Q}$-isomorphisme σ entre $\mathbb{C}$ (qui est la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(B)$ dans $\mathbb{C}$) et la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}(P)}$ de $\mathbb{Q}(P)$ dans $\mathbb{C}$. Or, si $\xi \in B - P$, on a $\xi \notin \overline{\mathbb{Q}(P)}$, car si ξ était algébrique sur $\mathbb{Q}(P)$, B ne serait pas une base de transcendance de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$. Soit donc :

$$\mathbb{C} \overset{\sigma}{\longmapsto} \overline{\mathbb{Q}(P)} = \mathbb{C}' .$$

Considérons la restriction de σ à $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Elle définit une injection i de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}'$, avec pour image $\mathbb{R}' \subset \mathbb{C}' \subset \mathbb{C}$. Cette injection i peut être étendue à une injection de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}'[\xi]$ par la relation :

$$f(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \rightarrow a'_0 \xi^n + \dots + a'_n , \quad a_i \in \mathbb{R} , \quad a'_i \in \mathbb{R}' ,$$

car $a'_0 \xi^n + \dots + a'_n = 0 \implies a'_0 = \dots = a'_n = 0$ puisque ξ est transcendant sur $\mathbb{C}'$, donc sur $\mathbb{R}'$; de $a'_0 = \dots = a'_n = 0$, on déduit $a_0 = \dots = a_n = 0$ et $f(X) = 0$. En résumé, nous avons bien une injection de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{C}$.

Remarque 1. - L'injection i de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ ne peut se faire dans $\mathbb{R}$, car autrement ce serait l'identité et une surjection ([2], chap. 4, § 3, exercice 3). On aurait alors pour σ un $\mathbb{R}$-isomorphisme de $\mathbb{C}$ sur une partie C', ce qui n'est pas possible ([8], chap. 8, § 1, exercice 4).

Remarque 2. - L'injection i de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ ne peut être surjective. Soient en effet :

$$\sigma = A \longmapsto A/P , \qquad \varphi = A \longmapsto A/P .$$

A anneau noethérien commutatif, P idéal premier non nul de A, σ isomorphisme de A sur A/P, et φ homomorphisme canonique de A sur A/P. Formons la suite d'idéaux de A :

$$0 \subset P \subset P_1 = \varphi^{-1}\,\sigma(P) \subset P_2 = \varphi^{-1}\,\sigma(P_1) \subset \dots$$

Cette suite est infinie strictement croissante, ce qui contredit l'hypothèse A noethérien.

PROBLÈMES

Problème 1. - Un anneau complètement primaire à gauche est-il primaire à droite ? On sait qu'il est primaire à gauche d'après le corollaire 2 de la propriété 1.

Problème 2. - Etudier l'idéal singulier J d'un anneau complètement primaire à gauche. On a nécessairement : $I \subseteq J \subseteq D$.

Problème 3. - Soit A un anneau noethérien à gauche primaire admettant un anneau total de fractions. A-t-on $D = G$, c'est-à-dire $I = 0$?

Problème 4. - Soit A un anneau noethérien à gauche complètement primaire ; 0 est-il tertiaire à droite ? est-il isotypique ?

Problème 5. - Etudier des conditions nécessaires et suffisantes pour que A soit co-irréductible. (La condition nécessaire de la propriété 5 exige, puisque $I \neq 0$, $I \supseteq 0 \,\dot{:}\, D$; une autre condition nécessaire est l'isotypie, ou au moins la tertiarité à droite, qui ne sont pas alors des conséquences immédiates des autre hypothèses.)

Problème 6. - Un anneau tertiaire à droite vérifie-t-il la condition de régularité généralisée ? Même question pour un anneau isotypique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre. Chap. 4 et 5, 2e édition. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1102 ; Bourbaki, 11).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale. Chap. 3 et 4, 3e édition. - Paris, Hermann, 1960 (Act. scient. et ind., 1143 ; Bourbaki, 3).

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale. Chap. 5 à 8. - Paris, Hermann, 1947 (Act. scient. et ind., 1029 ; Bourbaki, 5).

[4] DJABALI (M.). - Anneaux de fractions artiniens, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 20e année, 1966/67, n° 7, 8 p.

[5] DJABALI (M.). - Sur les nil-demi-groupes et les éléments réguliers d'un anneau noethérien à gauche, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, 1967, Série A, p. 493-495.

[6] LEFEBVRE (Pierre). - Sur les demi-groupes de fractions, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, Série A, p. 329-332.

[7] LEFEBVRE (Pierre). - Sur les demi-groupes de fractions, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 21e année, 1967/68.

[8] LESIEUR (Léonce). - Anneaux de fractions. Cours de 3e cycle professé à la Faculté des Sciences d'Orsay en 1965.

[9] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Coeur d'un module, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 42, 1963, p. 367-407.

[10] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).

[11] SMALL (L.). - Orders in artinian rings, J. of algebra, t. 4, 1966, p. 13-41.