

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

ANNIE CAILLEAU

Anneau associé à un module injectif riche en co-irréductibles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, n° 2 (1966-1967), exp. n° 19,
p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_2_A7_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNEAU ASSOCIÉ À UN MODULE INJECTIF
RICHE EN CO-IRRÉDUCTIBLES

par Annie CAILLEAU

L'étude suivante nous conduit à un théorème de structure pour l'anneau associé à un module injectif riche en co-irréductibles. Nos méthodes, inspirées de celles qu'utilisent L. LESIEUR et R. CROISOT [4], pour montrer le théorème dans le cas particulier où le module considéré est injectif et de dimension finie, nous permettent en outre de décrire l'anneau associé à certains modules remarquables.

1. Anneau associé à un module. Définitions, propriétés.

Dans tout ce qui suit, A désigne un anneau unitaire quelconque et tous les A -modules considérés sont des A -modules à gauche unitaires.

Soient M un A -module et \mathcal{A} l'anneau des endomorphismes de M ; le sous-ensemble $J(M)$ de \mathcal{A} constitué des endomorphismes φ de M dont le noyau est essentiel dans M , est un idéal bilatère de \mathcal{A} . L'anneau quotient $\mathcal{A}/J(M)$ est dit anneau associé à M , nous le noterons $S(M)$.

Nous disposons de propriétés de l'anneau associé à un module dans certains cas particuliers :

PROPOSITION 1.1. - Soient E un A -module injectif et \mathcal{B} l'anneau des endomorphismes de E ;

1° $J(E)$ coïncide avec le radical de Jacobson de \mathcal{B} et $S(E)$ est un anneau régulier (au sens de VON NEUMANN).

2° Si $J(E)$ est nul, $S(E)$ est self-injectif à droite (i. e. injectif, considéré comme module à droite sur lui-même).

La propriété 1° a été démontrée par UTUMI [5] et la propriété 2° par JOHNSON et WONG [3]. On trouvera également une démonstration des propriétés 1° et 2° dans [1].

En particulier, l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel est régulier et self-injectif à droite.

PROPOSITION 1.2. - L'anneau associé à un A -module injectif indécomposable E est un corps, dit corps associé à E .

PROPOSITION 1.3. - Soit E un A-module injectif de dimension finie :

$$E = \bigoplus_{i=1}^m E_i .$$

Désignons par (π_1, \dots, π_p) l'ensemble des types de sous-modules injectifs indécomposables de E, et pour tout $m = 1, \dots, p$, par k_m le nombre de sous-modules E_i de type π_m . Alors, l'anneau $S(E)$ associé à E, est un anneau semi-simple, produit de p anneaux simples, chacun d'eux étant isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension k_m sur le corps K_m associé au type π_m .

C'est le théorème 2.2 de [4].

2. Modules riches en co-irréductibles. Dimension d'un module.

Nous reprenons ici des définitions et propriétés énoncées et démontrées par J. FORT [2].

On appelle module riche en co-irréductibles, un module extension essentielle d'une somme directe de sous-modules co-irréductibles. Il résulte immédiatement de cette définition qu'un module injectif est riche en co-irréductibles si, et seulement si, il est extension essentielle d'une somme directe de sous-modules injectifs indécomposables.

Nous utiliserons pour les modules riches en co-irréductibles, la notion de dimension introduite par J. FORT :

PROPOSITION 2.1. - Soient M un A-module et

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i , \quad T = \bigoplus_{j \in J} K_j ,$$

deux sommes directes maximales de sous-modules co-irréductibles de M (i. e. tout sous-module co-irréductible de M rencontre S et T selon des sous-modules non nuls) ; désignons par $E(C_i)$ et $E(K_j)$ des enveloppes injectives des C_i et des K_j . Alors, il existe une bijection σ de I sur J, et un isomorphisme φ de $\bigoplus_{i \in I} E(C_i)$ sur $\bigoplus_{j \in J} E(K_j)$, tels que l'on ait pour tout indice i de I :

$$\varphi(E(C_i)) = E(K_{\sigma(i)}) .$$

Le cardinal de I, ne dépendant que de M, est dit dimension de M et noté $\dim M$.

N.-B. - On peut de même parler de π -dimension de M , pour un type π de sous-modules injectifs indécomposables de l'enveloppe injective de M : on appelle ainsi le cardinal d'une famille $(C_i, i \in I)$ de sous-modules co-irréductibles de M , telle que :

- pour tout i appartenant à I , $E(C_i)$ soit de type π ;
- la somme $\sum_{i \in I} C_i$ soit directe ;
- tout sous-module co-irréductible C de M dont l'enveloppe injective est de type π , coupe $\bigoplus_{i \in I} C_i$ selon un sous-module non nul.

3. Anneau associé à un module injectif riche en co-irréductibles.

Soit E un A -module injectif riche en co-irréductibles, nous savons qu'il est extension essentielle d'une somme directe de sous-modules injectifs indécomposables :

$$\bigoplus_{i \in I} E_i .$$

Nous allons d'abord montrer que l'anneau $S(E)$ associé à E est isomorphe à l'anneau $S(\bigoplus_{i \in I} E_i)$ associé à $\bigoplus_{i \in I} E_i$, c'est-à-dire la propriété suivante :

THÉOREME 3.1. - Soit M une somme directe de A -modules injectifs indécomposables ; l'anneau associé à M est isomorphe à l'anneau associé à l'enveloppe injective E de M .

Remarquons tout d'abord que quel que soit M , $S(M)$ se plonge dans $S(E)$: tout endomorphisme de M se prolonge en un endomorphisme de E , et si deux endomorphismes de E prolongent le même endomorphisme de M , ils diffèrent d'un élément de $J(E)$. On peut donc poser pour un endomorphisme φ de M :

$$f(\varphi) = \bar{\varphi}$$

où $\bar{\varphi}$ est la classe, modulo $J(E)$, d'un endomorphisme φ de E prolongeant φ . On obtient ainsi un homomorphisme f de l'anneau des endomorphismes de M dans $S(E)$, dont le noyau est manifestement $J(M)$.

Supposons maintenant que M soit somme directe de sous-modules injectifs indécomposables :

$$M = \bigoplus_{i \in I} E_i ,$$

et montrons que f est alors surjective.

Soit ϕ un endomorphisme de E , désignons par I_1 le sous-ensemble de I constitué des indices i tels que E_i ne soit pas inclus dans $\ker \phi$. Si i appartient à I_1 , il existe un élément x_i de E_i tel que $\phi(x_i)$ ne soit pas nul. M étant essentiel dans E , on peut trouver un élément a_i de A tel que $a_i \phi(x_i)$ ne soit pas nul et appartienne à M et, par suite, à une somme directe finie :

$$\bigoplus_{\ell=1}^n E_{j_\ell} .$$

Cette somme directe finie de modules injectifs étant elle-même injective, il existe un homomorphisme φ_i de E_i dans $\bigoplus_{\ell=1}^n E_{j_\ell}$ dont la restriction à $Aa_i x_i$ coïncide avec ϕ .

Soit φ l'endomorphisme de M :

$$\varphi = \bigoplus_{i \in I} \varphi_i ,$$

où les φ_i sont définis comme précédemment pour les indices i de I_1 , et où les φ_i sont nuls pour les indices i n'appartenant pas à I_1 . Si ψ est un endomorphisme de E prolongeant φ , on a pour tout indice i de I :

$$\ker (\psi - \phi) \cap E_i \neq 0 ,$$

en effet, ou i appartient à I_1 et alors $\ker (\varphi - \phi) \cap E_i$ contient $a_i x_i$, ou i n'appartient pas à I_1 et alors

$$\ker (\varphi - \phi) \cap E_i = E_i .$$

Il en résulte que ψ et ϕ diffèrent d'un élément de $J(E)$, et l'on a par suite :

$$f(\varphi) = \overline{\phi} .$$

Il nous suffit dès lors de rechercher la structure de

$$S\left(\bigoplus_{i \in I} E_i\right) .$$

LEMME 3.1. - L'anneau associé à une somme directe de A -modules injectifs indécomposables

$$M = \bigoplus_{i \in I} E_i$$

est isomorphe au produit des anneaux associés aux composantes isotypiques de $\bigoplus_{i \in I} E_i$.

Soit $(\pi_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ l'ensemble des types de sous-modules injectifs indécomposables de $\bigoplus_{i \in I} E_i$. Pour tout λ appartenant à Λ désignons par I_λ l'ensemble des indices i de I tels que E_i soit de type π_λ et posons :

$$M_\lambda = \bigoplus_{i \in I_\lambda} E_i, \quad \overline{M}_\lambda = \bigoplus_{i \notin I_\lambda} E_i,$$

appelons enfin η_λ l'injection canonique de M_λ dans M et ξ^λ la projection de M sur \overline{M}_λ parallèlement à M_λ . Si à un endomorphisme α de M nous faisons correspondre l'élément

$$\overline{(\xi^\lambda \alpha \eta^\lambda)}_{\lambda \in \Lambda} \quad \text{de} \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} S(M_\lambda)$$

($\overline{\xi^\lambda \alpha \eta^\lambda}$ étant la classe de $\xi^\lambda \alpha \eta^\lambda$ modulo $J(M_\lambda)$), nous obtenons une application θ de l'anneau \mathfrak{A} des endomorphismes de M dans $\prod_{\lambda \in \Lambda} S(M_\lambda)$.

1° θ est un homomorphisme d'anneaux : il est évident que pour tout couple (α_1, α_2) d'éléments de \mathfrak{A} , on a :

$$\theta(\alpha_1 + \alpha_2) = \theta(\alpha_1) + \theta(\alpha_2).$$

Pour montrer l'égalité :

$$\theta(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = \theta(\alpha_1) \cdot \theta(\alpha_2),$$

on est amené à montrer que l'on a, pour tout λ appartenant à Λ :

$$\overline{\xi^\lambda \alpha_1 \xi^\lambda \alpha_2 \eta^\lambda} = \overline{\xi^\lambda \alpha_1 \alpha_2 \eta^\lambda},$$

soit

$$\overline{\xi^\lambda \alpha_1 (\xi^\lambda \alpha_2 - \alpha_2) \eta^\lambda} = 0.$$

Or l'homomorphisme $(\xi^\lambda \alpha_2 - \alpha_2)$ envoie M_λ dans \overline{M}_λ . Si

$$\ker(\xi^\lambda \alpha_2 - \alpha_2) \cap M_\lambda$$

n'était pas essentiel dans M_λ , il existerait un indice i de I_λ vérifiant

$$\ker(\xi^\lambda \alpha_2 - \alpha_2) \cap E_i = 0,$$

et M_λ et $\overline{M_\lambda}$ admettraient alors des sous-modules injectifs indécomposables isomorphes, ce qui est impossible (en vertu, par exemple de la proposition 2 de [2] :

Soient un A -module M et $\bigoplus_{i \in I} X_i$ une somme directe de sous-modules de M , si Y est un sous-module de M vérifiant

$$Y \cap \left(\bigoplus_{i \in I} X_i \right) \neq 0 ,$$

il existe un sous-module non nul de l'un des X_i isomorphe à un sous-module de Y). $\ker (\xi^\lambda \alpha_2 - \alpha_2) \eta^\lambda$ est donc essentiel dans M^λ , il en est évidemment de même de $\ker \xi^\lambda \alpha_1 (\xi^\lambda \alpha_2 - \alpha_2) \eta^\lambda$, par suite on a bien

$$\overline{\xi^\lambda \alpha_1 (\xi^\lambda \alpha_2 - \alpha_2) \eta^\lambda} = 0 .$$

2° θ est surjectif : si $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est un élément de $\prod_{\lambda \in \Lambda} S(M_\lambda)$, l'endomorphisme α de M :

$$\alpha = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \eta^\lambda \alpha_\lambda , \quad \text{où pour tout } \lambda , \quad \overline{\alpha_\lambda} = a_\lambda ,$$

est tel que $\theta(\alpha)$ soit égal à $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

3° $\ker \theta = J(M)$: on vérifie immédiatement l'inclusion : $J(M) \subseteq \ker \theta$.

Supposons que l'on puisse trouver un élément α de $\ker \theta$ n'appartenant pas à $J(M)$. Pour un tel élément on peut trouver un indice i de I vérifiant :

$$\ker \alpha \cap E_i = 0 .$$

Si λ est l'élément de Λ tel que i appartienne à I_λ , on a, $\theta(\alpha)$ étant nul,

$$\ker \xi^\lambda \alpha \cap E_i \neq 0 .$$

$\alpha(E_i)$ est donc un sous-module injectif indécomposable de M de type π_λ ($\ker \alpha \cap E_i = 0$), rencontrant $\overline{M_\lambda}$ ($\ker \xi^\lambda \alpha \cap E_i \neq 0$) ceci est impossible d'après la proposition 2 de [2], rappelée précédemment.

Il nous reste à étudier l'anneau associé à chaque composante isotypique de $\bigoplus_{i \in I} E_i$, c'est-à-dire à une somme directe de modules injectifs indécomposables tous isomorphes :

THÉOREME 3.2. - L'anneau associé à une somme directe de modules injectifs indécomposables tous isomorphes :

$$M = \bigoplus_{i \in I} E_i ,$$

est un anneau régulier, self-injectif à droite, isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension ;

$$\dim M = \text{card } I ,$$

sur le corps associé au type des E_i .

Remarquons tout d'abord que les propriétés pour $S(M)$ d'être régulier et self-injectif à droite, résulteront de l'isomorphisme entre $S(M)$ et l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel qui possède lui-même ces propriétés (cf. proposition 1.1).

Soit F un A -module injectif indécomposable isomorphe aux A -modules E_i et soit K le corps associé à F ; désignons par V l'espace vectoriel à droite sur K engendré par une famille quelconque $(e_i)_{i \in I}$ indexée par I :

$$V = \bigoplus_{i \in I} e_i K$$

Pour tout indice i de I , nous choisissons un isomorphisme φ_i de F sur E_i , et nous désignons par ξ_i la projection de M sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.

Soit α un endomorphisme de M , et i un indice de I , les indices j de I pour lesquels $\overline{\varphi_j^{-1} \xi_j \alpha \varphi_i}$ n'est pas nul, sont en nombre fini : en effet, fixons-nous un élément non nul x de E_i ; si $\overline{\varphi_j^{-1} \xi_j \alpha \varphi_i}$ n'est pas nul, on a

$$\ker \xi_j \alpha \cap E_i = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \xi_j \alpha(x) \neq 0 ,$$

or, l'ensemble des indices j pour lesquels $\xi_j \alpha(x)$ n'est pas nul est fini.

On peut donc considérer l'application η de l'anneau \mathcal{A} et des endomorphismes de M dans l'anneau \mathcal{L} des endomorphismes de V définie par :

$$\eta(\alpha) \cdot (e_i) = \sum_{j \in I} e_j \cdot \overline{\varphi_j^{-1} \xi_j \alpha \varphi_i} .$$

1° η est un homomorphisme d'anneaux : on a pour tout couple (α_1, α_2) d'éléments de \mathcal{A} :

$$\eta(\alpha_1 + \alpha_2) = \eta(\alpha_1) + \eta(\alpha_2) .$$

D'autre part,

$$\eta(\alpha_2) \cdot \eta(\alpha_1)(e_i) = \sum_{k \in I} e_k \overline{\sum_{p \in I} \varphi_k^{-1} \xi_k \alpha_2 \xi_p \alpha_1 \varphi_i}$$

$$\eta(\alpha_2 \cdot \alpha_1)(e_i) = \sum_{k \in I} e_k \overline{\varphi_k^{-1} \xi_k \alpha_2 \alpha_1 \varphi_i} .$$

Désignons par I_1 l'ensemble des indices p de I vérifiant :

$$\ker \xi_p \alpha_1 \cap E_i = 0 .$$

Si x est un élément de E_i vérifiant $\alpha_1(x) \neq 0$, on peut trouver un élément a de A tel que $a\alpha_1(x)$ ne soit pas nul et soit égal à $\sum_{p \in I_1} \xi_p \alpha_1(ax)$, ax

est alors un élément non nul de $\ker(\alpha_1 - \sum_{p \in I_1} \xi_p \alpha_1)$. On a donc,

$$\ker(\alpha_1 - \sum_{p \in I_1} \xi_p \alpha_1) \cap E_i \neq 0$$

et par suite :

$$\sum_{p \in I_1} \overline{\varphi_k^{-1} \xi_k \alpha_2 \xi_p \alpha_1 \varphi_i} = \overline{\varphi_k^{-1} \xi_k \alpha_2 \alpha_1 \varphi_i}$$

ce qui donne, compte tenu de la définition de I_1 :

$$\sum_{p \in I} \overline{\varphi_k^{-1} \xi_k \alpha_2 \xi_p \alpha_1 \varphi_i} = \overline{\varphi_k^{-1} \xi_k \alpha_2 \alpha_1 \varphi_i} .$$

Remarque. - La démonstration précédente suppose que I_1 n'est pas vide;; il est trivial que la conclusion subsiste dans le cas où I_1 est vide.

2° η est surjectif : soit ρ un élément de \mathcal{E} . Posons

$$\rho(e_i) = \sum_{j \in I} e_j \overline{\rho_i^j} .$$

L'endomorphisme de M :

$$\alpha = \bigoplus_{i \in I} \alpha_i ,$$

avec pour tout i de I :

$$\alpha_i = \left(\sum_{k \in I} \omega_k \rho_i^k \right) \phi_i^{-1},$$

est tel que son image par α soit ρ .

3° $\ker \eta = J(M)$: on montre immédiatement qu'un élément α de \mathcal{A} est annulé par η si, et seulement si, l'on a pour tout couple d'indices (i, j) :

$$\ker \xi_j \alpha \cap E_i \neq 0.$$

Ceci est évidemment vérifié par les éléments de $J(M)$. D'autre part, si α n'appartient pas à $J(M)$, il existe un indice i de I tel que l'on ait

$$\ker \alpha \cap E_i = 0;$$

pour un élément non nul x de E_i , on peut écrire :

$$\alpha(x) = \xi_{j_1} \alpha(x) + \dots + \xi_{j_n} \alpha(x),$$

de l'hypothèse $\ker \alpha \cap E_i = 0$, on déduit qu'il existe un indice j parmi j_1, \dots, j_n , tel que $\ker \xi_j \alpha \cap E_i$ ne soit pas essentiel dans E_i , c'est-à-dire tel que $\ker \xi_j \alpha \cap E_i$ ne soit pas nul. Ceci prouve que α n'est pas annulé par η .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème de structure, dont le théorème 2.2 de [4] apparaît comme cas particulier.

THÉORÈME 3.3. - Soit E un A -module riche en co-irréductibles (resp. somme directe de A -modules injectifs indécomposables) et soit $(\pi_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ l'ensemble des types de sous-modules injectifs indécomposables de E ; l'anneau $S(E)$ associé à E est un anneau régulier, self-injectif à droite, isomorphe à l'anneau produit $\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{E}_\lambda$, où pour tout λ , \mathcal{E}_λ est l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel sur le corps associé au type π_λ , dont la dimension est égale à la π_λ -dimension de E .

$S(E)$ est régulier et self-injectif à droite en tant que produit d'anneaux possédant ces propriétés. Pour montrer qu'un anneau

$$L = \prod_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$$

produit d'anneaux self-injectifs à droite (resp. à gauche) est lui-même self-injectif à droite (resp. à gauche), on peut montrer que pour tout λ , L_λ est un L -module à droite (resp. à gauche) injectif; L , produit de L -modules injectifs, est alors un L -module injectif.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FAITH (Carl) and UTUMI (Yuzo). - Quasi-injective modules and their endomorphism rings, Arch. der Math., t. 15, 1964, p. 166-174.
 - [2] FORT (Jacques). - Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 20, 1966/67, 21 p. (multigr.).
 - [3] JOHNSON (R. E.) and WONG (E. T.). - Self-injective rings, Canad. math. Bull., t. 2, 1959, p. 167-173.
 - [4] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Coeur d'un module, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 42, 1963, p. 367-407.
 - [5] UTUMI (Yuzo). - On a theorem on modular lattices, Proc. Japan Acad., t. 35, 1959, p. 16-21.
-