Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

François Dress

Familles de séries formelles applications aux nombres algébriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, nº 2 (1966-1967), exp. nº 18, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_2_A6_0>

FAMILLES DE SÉRIES FORMELLES
APPLICATIONS AUX NOMBRES ALGÉBRIQUES

par François DRESS

1. Introduction. Définitions.

Cet exposé présente un certain nombre de résultats relatifs à des familles de séries formelles, notamment des caractérisations arithmétiques et des propriétés de fermeture en topologie X-adique ; puis des résultats portant sur des familles de fractions rationnelles, et enfin des applications à des ensembles fermés de nombres algébriques. Les démonstrations seront esquissées ou omises (leur détail figure dans F. DRESS [4], [5], [6]).

Nous désignerons par A un anneau commutatif, intègre, possédant un élément unité, et par K son corps des fractions. Les éléments de A seront appelés entiers.

Outre les anneaux et corps classiques de polynômes, fractions rationnelles et séries formelles sur A et K, nous utiliserons l'anneau $\mathcal{Q}$ des quotients de séries formelles à coefficients entiers :

$$\mathcal{Q} = \{F(X) = \frac{U(X)}{V(X)} \mid U , V \in A[[X]] , \quad V(0) \neq 0\} ,$$

qui est un sous-anneau de $K[[X]]$, ainsi que l'anneau $\mathcal{A} = S^{-1} A[[X]]$ et le corps $\mathcal{K}$ des fractions de $A[[X]]$, $\mathcal{K} = S^{-1} \mathcal{Q}$ (S désigne la partie multiplicative $\{X^n \mid n \geqslant 0\}$).

2. Déterminants de Hankel et de Hadamard.

Etant donnée

$$F(X) = \sum_0^\infty a_k X^k$$

une série formelle de $A[[X]]$ ou de $K[[X]]$, nous considérerons ses déterminants de Hankel :

$$H_m^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} a_m & \cdots & a_{m+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+p} & \cdots & a_{m+2p} \end{vmatrix}$$

ainsi que d'autres déterminants plus généraux, introduits par J. HADAMARD [11] :

$$D_m^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_0 & \dots & a_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & \dots & a_m & \dots & a_{m+p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p & \dots & a_{m+p} & \dots & a_{m+2p} \end{vmatrix}$$

et

$$D^{(p)}_{m_0,m_1,\dots,m_p}(F) = \begin{vmatrix} a_{m_0} & a_{m_1} & \dots & a_{m_p} \\ a_{m_0+1} & a_{m_1+1} & \dots & a_{m_p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_0+p} & a_{m_1+p} & \dots & a_{m_p+p} \end{vmatrix}$$

Si nous étendons ces définitions aux séries du corps $K((X))$ des séries formelles généralisées, il apparaît que les deux premiers types de déterminants sont identiques aux notations près (en effet, lorsque $F(X) \in K[[X]]$, $a_{-m} = \dots = a_{-1} = 0$, et donc $D_m^{(p)}(F) = H_{-m}^{(m+p)}(F)$).

3. Déterminants des quotients de séries.

PROPOSITION 1. - *Soient*

$$U(X) = \sum_0^\infty u_k X^k \qquad \textit{et} \qquad V(X) = \sum_0^\infty v_k X^k$$

deux séries de $K[[X]]$, *avec* $v_0 \neq 0$. *On a alors*

$$D^{(p)}_{m_0,\dots,m_p}\left(\frac{U(X)}{V(X)}\right) = v_0^{-(m_p+p+1)} N^{(p)}_{m_0,\dots,m_p}(U , V) \quad ,$$

avec

$$N^{(p)}_{m_0,\dots,m_p}(U , V) = \begin{vmatrix} v_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & u_0 \\ v_1 & v_0 & \dots & 0 & \dots & \dots & u_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & u_0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & v_0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & u_{m_0} & \dots & u_{m_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m_p+p} & v_{m_p+p-1} & \dots & v_{p+1} & u_{m_0+p} & \dots & u_{m_p+p} \end{vmatrix}$$

(déterminant dont m_p colonnes sont formées de coefficients de $V(X)$, avec une structure régulièrement décalée, et les $p + 1$ autres colonnes de coefficients de $U(X)$ avec une structure analogue à celle du déterminant de Hadamard $D^{(p)}_{m_0,\ldots,m_p}(F)$).

Cette identité permet de retrouver rapidement un certain nombre de résultats connus. Nous en citerons trois.

Déterminants relatifs à l'inverse d'une série. - Si $G(X) = \frac{1}{F(X)}$, avec $F = \frac{U}{V}$ et $G = \frac{V}{U}$, alors les déterminants de Hankel de F et de G sont liés par la relation (J. HADAMARD [11], E. BOREL [2]) :

$$H^{(p)}_m(G) = \pm \left(\frac{v_0}{u_0}\right)^{m+2p+1} H^{(m+p-1)}_{2-m}(F)$$

(en effet, les déterminants N sont les mêmes à un certain nombre près de permutations entre les u_i et les v_j).

Quotients de séries à coefficients entiers. - Si $U(X)$ et $V(X)$ appartiennent à $A[[X]]$, la propriété

$$a_n = \frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}}$$

des coefficients du quotient $F(X)$ se généralise en

$$H^{(p)}_m(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{m+2p+1}} .$$

Cette propriété possède des applications importantes (C. PISOT [13]), et sera d'ailleurs développée au paragraphe suivant, avec l'introduction des familles Φ_q .

Fonctions à caractéristique bornée. - Si $F(Z)$, série entière de la variable complexe Z , est à caractéristique bornée à l'intérieur du cercle-unité (i. e. $F(Z)$ est quotient de deux fonctions bornées dans $|Z| < 1$) ou, un peu plus généralement, si $F(Z)$ est quotient de deux séries entières $U(Z)$ et $V(Z)$ telles que

$$\sum_0^\infty |u_n|^2 < \infty \qquad \text{et} \qquad \sum_0^\infty |v_n|^2 < \infty ,$$

on a alors (D. CANTOR [3])

$$\lim_{p\to\infty} |K_p(F)|^{1/p} = 0 ,$$

où les $K_p = H^{(p)}_0$ sont les déterminants de Kronecker de F .

Pour démontrer ce résultat, il suffit d'écrire que

$$K_p = H_0^{(p)} = v_0^{-(2p+1)} N_0^{(p)} ,$$

suivant la proposition 1, puis d'appliquer la majoration d'Hadamard à $N_0^{(p)}$ suivant ses lignes.

4. Familles Φ_q.

Nous classerons les éléments de l'anneau $\mathfrak{Q}$ des quotients de séries formelles de $A[[X]]$ de la manière suivante :

Définition. - Etant donné un entier q non nul, nous désignerons par Φ_q la famille des séries $F(X) \in \mathfrak{Q}$ qui possèdent une expression

$$F(X) = \frac{U(X)}{V(X)} , \qquad \text{où } U(X) , V(X) \in A[[X]] ,$$

telle que $v_0 = V(0) = q$.

Il est clair que :

- Si q_1 et q_2 sont associés, $\Phi_{q_1} = \Phi_{q_2}$;
- $\Phi_1 = A[[X]]$;
- Si q' est un diviseur de q, $\Phi_{q'} \subset \Phi_q$.

Propriété fondamentale. - Si $F(X) \in \Phi_q$, ses déterminants de Hankel sont de la forme

$$H_m^{(p)}(F) = \frac{\text{entier}}{q^{m+2p+1}}$$

(c'est une conséquence triviale de l'expression, donnée dans la proposition 1, du déterminant $N_m^{(p)}(U , V)$).

Inversement, il se pose le problème de savoir si cette propriété, imposée aux coefficients et à certains déterminants de Hankel d'une série $F(X) \in K[[X]]$, permet d'établir son appartenance à la famille Φ_q.

Nous n'avons pu établir que des résultats partiels. Le principal est le suivant :

PROPOSITION 2. - Soit $F(X) = \sum_0^\infty a_k X^k$ une série de $K[[X]]$. Posons

$$\frac{1}{F(X)} = \sum_0^\infty c_k X^k .$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $F(X)$ appartienne à la famille

Φ_{v_0} , dans le cas particulier où $a_0 = \frac{u_0}{v_0}$, avec u_0 et v_0 étrangers (i. e. $u_0 A + v_0 A = A$), est que :

1° $a_n = \frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}}$ pour tout n ,

2° $c_n = \frac{\text{entier}}{u_0^{n+1}}$ pour tout n .

La démonstration repose sur une construction par récurrence des deux séries à coefficients entiers $U(X)$ et $V(X)$ telles que $\frac{U(X)}{V(X)} = F(X)$. La condition

$$c_n = \frac{\text{entier}}{u_0^{n+1}}$$

est utilisée sous la forme

$$H_{-n+2}^{(n-1)}(F) = \frac{\text{entier}}{u_0^{n+1}}$$

(voir remarque, au paragraphe précédent, sur les déterminants de l'inverse d'une série).

La question reste ouverte de savoir si ce critère ne serait pas général.

5. Transformations homographiques dans les anneaux euclidiens et principaux.

Lorsque l'anneau A sera euclidien, nous utiliserons la notation de la valeur absolue $|a| = \varphi(a)$, pour désigner le stathme euclidien de A ($a = bq + r$, avec $\varphi(r) < \varphi(b)$).

Afin d'éviter toute confusion, les notations astérisquées $(A^*, \ldots, U^*, \ldots)$ seront exclusivement réservées aux polynômes (à coefficients entiers).

LEMME 1. - Si A est euclidien, et si $F(X)$, appartenant à la famille Φ_q , est à coefficients non tous entiers $(F \notin \Phi_1)$, on peut toujours l'écrire sous la forme:

$$F(X) = P^*(X) + \frac{X^\lambda}{G(X)} ,$$

où $P^*(X)$ est un polynôme à coefficients entiers, λ un entier naturel $\geqslant 0$, et où $G(X)$ appartient à une famille $\Phi_{q'}$, vérifiant $|q'| < |q|$ $(q' \neq 0)$.

Si une expression de $F(X)$ était

$$F(X) = \frac{U(X)}{V(X)} ,$$

avec $V(0) = q$, alors $G(X)$ possède l'expression

$$G(X) = \frac{V(X)}{W(X)} \quad ,$$

<u>avec</u> $V(0) = q$, $W(0) = q'$.

Ce lemme constitue pour la suite le support de raisonnements par récurrence sur le stathme de q . Il appelle en outre deux remarques :

1° Si nous définissons le stathme d'une série

$$F(X) = \sum_{m}^{\infty} a_k X^k \qquad (m \in \underset{\sim}{Z} , \quad a_m \neq 0)$$

de $\mathfrak{A} = S^{-1} A[[X]]$, comme le stathme dans A de son terme de plus bas degré, $|F(X)| = |a_m|$, le lemme 1 équivaut au résultat suivant :

PROPOSITION 3. - <u>Si</u> A <u>est un anneau euclidien, l'anneau</u> $\mathfrak{A}$ <u>est également euclidien.</u>

(Ce qui permet, à l'aide du théorème de Nagata, de retrouver le résultat classique, que $A[[X]]$ est factoriel.)

2° Un corollaire immédiat du lemme 1 est que, si $F(X) \in \Phi_q$, il existe une transformation homographique à coefficients A^* , B^* , C^* , D^* dans $A[X]$, avec $A^*D^* - B^*C^* \neq 0$, telle que

$$\frac{A^*F + B^*}{C^*F + D^*} \quad \text{appartienne à} \quad \Phi_1 = A[[X]] \quad .$$

Ce corollaire permet de donner une démonstration, pour le cas où A est euclidien, du résultat suivant :

PROPOSITION 4. - <u>Soit</u> A <u>un anneau principal, et désignons par</u> $\underset{\sim}{G}$ <u>le groupe des transformations homographiques à coefficients polynomiaux. On a alors</u>

$$\underset{\sim}{G}(A[[X]]) = \mathcal{K} \quad (= S^{-1} \mathcal{Q}) \quad .$$

6. Polynômes et séries lacunaires dans $\mathcal{Q}$.

Nous nous contenterons d'indiquer brièvement deux résultats :

PROPOSITION 5. - <u>Si l'anneau</u> $A[[X]]$ <u>est factoriel, et si le polynôme</u> $F^*(X)$ <u>appartient à la famille</u> Φ_q , <u>alors</u>

$$qF^*(X) = P^*(X)$$

<u>est un polynôme à coefficients entiers.</u>

PROPOSITION 6. - *L'anneau* $A[[X]]$ *étant supposé factoriel, soit*

$$F(X) = \sum_0^\infty a_m X^{\lambda_m}$$

une série lacunaire appartenant à la famille Φ_q . *S'il existe un nombre réel* $K > 1$ *tel que* $\lambda_{m+1} \geqslant K\lambda_m$ *pour tout* m , *alors* $qF(X)$ *est à coefficients entiers.*

7. Sous-familles de Φ_q , résultats topologiques.

Séries réduites, formes réduites. - Nous désignerons par

$$\mathcal{R}(q) = \{c_0 = 0 \ , \ c_1 \ , \ \dots \ , \ c_j \ , \ \dots\}$$

un système de représentants dans A du quotient A/qA , et nous dirons qu'une série

$$B(X) = \sum_0^\infty b_k X^k \in A[[X]]$$

est réduite, si $b_k \in \mathcal{R}(b_0)$ pour tout $k \geqslant 1$.

Etant donnée une série $F(X) \in \Phi_q$, nous dirons qu'une expression $\frac{U(X)}{V(X)} = F(X)$ est sous forme réduite, si le dénominateur $V(X)$ est une série réduite.

LEMME 2. - *Etant donnée une série quelconque* $B(X) \in A[[X]]$, *il est toujours possible de trouver une série inversible* $E(X)$ (*i. e.* $E(0) = 1$ *ou entier associé de* A), *telle que* $E(X)\ B(X)$ *soit une série réduite.*

($E(X)\ B(X)$ est alors appelée réduite de $B(X)$.)

Un corollaire immédiat est qu'il est toujours possible de trouver une expression sous forme réduite d'une série quelconque $F(X) \in \Phi_q$.

Sous-familles $\Phi_{q,r_1,\dots,r_n}$. - q étant un entier non nul, $r_1 , \dots , r_n$ des éléments fixés de $\mathcal{R}(q)$, nous désignerons par $\Phi_{q,r_1,\dots,r_n}$ la sous-famille de Φ_q formée par les séries $F(X)$ telles que, pour une expression au moins $\frac{U(X)}{V(X)} = F(X)$, le dénominateur $V(X)$ ait pour réduite la série

$$E(X)\ V(X) = q + r_1 X + \dots + r_n X^n + v'_{n+1} X^{n+1} + \dots \ ,$$

les coefficients d'indice supérieur à n étant quelconques.

Sous certaines conditions, les différentes familles et sous-familles que nous avons définies sont fermées dans l'anneau $K[[X]]$, muni de la topologie X-adique.

PROPOSITION 7. - Si l'anneau A est euclidien, chaque famille Φ_q est fermé.

Cela se démontre par récurrence en utilisant le lemme 1.

PROPOSITION 8. - Si l'anneau A est tel que tout idéal principal est de norme finie (i. e. $\mathrm{Card}(A/qA) < \infty$), chaque sous-famille $\Phi_{q,r_1,\dots,r_n}$ est fermée.

La démonstration repose sur le fait que les séries réduites forment une partie compacte dans le groupe topologique (multiplicatif) $\mathcal{K}^* = S^{-1}\mathcal{Q} - \{0\}$.

Sous-familles $\Phi_q(d_1 , \dots , d_h)$. - Nous partirons ici de la remarque suivante : Si nous effectuons le produit $W(X) = E(X)\,V(X)$ de la série $V(X)$, possédant la propriété que d divise ses coefficients $v_0 , v_1 , \dots , v_m$, par une série inversible $E(X)$, nous constatons que la série $W(X)$ possède la même propriété, d divisant ses coefficients $w_0 , w_1 , \dots , w_m$.

Cette propriété est particulièrement intéressante, car elle se manifeste de la même façon sur une série et sur sa réduite, rendant inutile le recours explicite à cette dernière.

Considérant alors une suite de diviseurs "emboîtés" de q ,

$$d_1|q\ ,\ d_2|d_1\ ,\ \dots\ ,\ d_h|d_{h-1} \qquad (\ d_h \text{ non inversible})\ ,$$

nous désignerons par $\Phi_q(d_1 , \dots , d_h)$ la sous-famille $\subset \Phi_q$ des séries $F(X)$ telles que, pour une expression au moins $\frac{U(X)}{V(X)} = F(X)$, le dénominateur $V(X)$ satisfasse à

$$v_0 = q\ ,\ d_1|v_1\ ,\ \dots\ ,\ d_h|v_h\ .$$

Ces sous-familles sont réunions (finies) de sous-familles du type étudié au début de ce paragraphe :

$$\Phi_q(d_1 , \dots , d_h) = \bigcup_{d_1|r_1,\dots,d_h|r_h} \Phi_{q,r_1,\dots,r_h}\ .$$

Il s'ensuit, en corollaire de la proposition 8, que, si tout idéal principal de A est de norme finie, chaque sous-famille $\Phi_q(d_1 , \dots , d_h)$ est fermée.

8. Fractions rationnelles dans l'anneau $\mathcal{Q}$.

Le problème qui se pose ici est de savoir si une fraction rationnelle de $A(X)$, que l'on sait par ailleurs appartenir à une famille Φ_q , possède dans cette famille

Φ_q une représentation comme quotient de polynômes, et non plus seulement de séries formelles.

Nous savons que cette représentation comme quotient de polynômes est possible dans la famille Φ_1, grâce à un lemme, démontré par P. FATOU [8] dans le cas particulier $A = \underset{\sim}{Z}$, et que nous allons rappeler ici. (La démonstration classique de ce lemme suppose que A est un anneau factoriel ; signalons que ce lemme a été généralisé aux anneaux de Dedekind (C. PISOT [12]).)

LEMME 3. - L'anneau A étant supposé factoriel, soit $F(X)$ une fraction rationnelle du corps $A(X)$. Si $F(X)$ est à coefficients tous entiers (nous dirons : si $F(X) \in \Phi_1$), et si l'on écrit $F(X) = \frac{U^*(X)}{V^*(X)}$ comme quotient de deux polynômes premiers entre eux dans $A[X]$, alors

$$v_0^* = V^*(0)$$

est inversible dans A.

(Il en résulte, en particulier, que l'on peut choisir $V^*(X)$ tel que $v_0^* = 1$.)

PROPOSITION 9. - L'anneau A étant supposé euclidien, soit $F(X)$ une fraction rationnelle du corps $A(X)$. Si $F(X)$ appartient à la famille Φ_q, et si l'on écrit $F(X) = \frac{U^*(X)}{V^*(X)}$ comme quotient de deux polynômes premiers entre eux dans $A[X]$, alors $v_0^* = V^*(0)$ est un diviseur (strict ou non) de q.

(Il est équivalent d'énoncer : On peut choisir une représentation avec $V^*(X)$ tel que $v_0^* = q$, si l'on n'impose plus à $U^*(X)$ et $V^*(X)$ d'être premiers entre eux.)

La démonstration s'effectue par récurrence en utilisant le lemme 1.

Cette proposition peut être particularisée aux sous-familles définies au paragraphe précédent.

PROPOSITION 10. - L'anneau A étant supposé euclidien, soit $F(X) = \frac{U^*(X)}{V^*(X)}$ une fraction rationnelle du corps $A(X)$. Si $F(X)$ appartient à la sous-famille $\Phi_{q,r_1,\ldots,r_n}$, alors on peut choisir les polynômes $U^*(X)$ et $V^*(X)$ de telle sorte que $V^*(X)$ soit "réduit jusqu'au rang n" :

$$V^*(X) = q + r_1 X + \ldots + r_n X^n + v_{n+1}^* X^{n+1} + \ldots \ .$$

(On pourrait aussi bien imposer à $V^*(0)$ d'avoir ses $n + 1$ premiers coefficients égaux à ceux d'une série

$$E(X)\ B(X) = (1 + e_1 X + \dots)(q + r_1 X + \dots + r_n X^n + \dots) \quad .)$$

COROLLAIRE. - Si $F(X) = \frac{U^*(X)}{V^*(X)}$, fraction rationnelle du corps $A(X)$, appartient à la famille $\Phi_q(d_1 , \dots , d_h)$, alors on peut choisir les polynômes $U^*(X)$ et $V^*(X)$ de telle sorte que si

$$V^*(X) = v_0^* + v_1^* X + \dots + v_h^* X^h + v_{h+1}^* X^{h+1} + \dots ,$$

on ait

$$v_0^* = q \ , \ d_1 | v_1^* \ , \ \dots \ , \ d_h | v_h^* \ .$$

9. Rappel sur les nombres de Pisot-Vijayaraghavan.

Définition de l'ensemble S . - Nous dirons qu'un nombre réel θ appartient à l'ensemble S si :

1° θ est entier algébrique (sur $\mathbb{Z}$),

2° $\theta > 1$, ses conjugués autres que lui-même vérifiant $|\theta_j| < 1$ $(j = 2 , 3 , \dots , s)$.

Parmi les propriétés remarquables de cet ensemble S , nous noterons qu'il est fermé (R. SALEM [14]).

A chaque nombre $\theta \in S$, on peut associer une ou plusieurs fractions rationnelles ayant $\frac{1}{\theta}$ pour pôle unique intérieur au cercle-unité. On définit ainsi la famille $\mathfrak{F}$ des fractions rationnelles $f(Z) = \frac{A^*(Z)}{Q^*(Z)}$ vérifiant :

- $A^*(Z)$ et $Q^*(Z)$ appartiennent à $\mathbb{Z}[Z]$, le dénominateur satisfaisant à $Q^*(0) = 1$ (i. e. les inverses des pôles de $f(Z)$ sont des entiers algébriques),
- $f(Z)$ possède un pôle unique (réel, positif) dans le disque $|Z| < 1$ de $\mathbb{C}$,
- $|f(Z)| \leqslant 1$ sur le cercle-unité $|Z| = 1$.

Généralisation : Ensembles $S(K)$. - K étant un corps quadratique imaginaire, et A_K l'anneau de ses entiers, nous dirons qu'un nombre θ appartient à l'ensemble $S(K)$ si :

- θ est entier algébrique sur A_K ,
- $|\theta| > 1$, ses conjugués autres que lui-même vérifiant $|\theta_j| < 1$ $(j = 2 , 3 , \dots \ s)$.

On peut aussi bien associer à ces nombres une famille de fractions rationnelles.

Généralisation : Ensembles S_q . - q étant un entier rationnel fixé, nous dirons qu'un nombre réel θ appartient à l'ensemble S_q si :

- $\frac{1}{\theta}$ est la seule racine située dans le disque $|Z| < 1$ d'un polynôme $Q^*(Z)$ appartenant à $\mathbb{Z}[Z]$ et satisfaisant à $Q^*(0) = q$;
- Il existe un polynôme $A^*(Z)$ appartenant à $\mathbb{Z}[Z]$ et vérifiant

$$A^*(\tfrac{1}{\theta}) \neq 0 , \qquad |A^*(0)| \geqslant |q| ,$$

$$|A^*(Z)| \leqslant |Q^*(Z)| \quad \text{sur le cercle-unité } |Z| = 1 .$$

L'introduction des familles de fractions rationnelles associées permet de montrer que tous ces ensembles sont fermés, ainsi que de déterminer les plus petits éléments de S , S' et S'' (J. DUFRESNOY et C. PISOT [7], Mme M. GRANDET [9]), de $S(K)$ (Mme M. GRANDET [10]), de S_q et S'_q (C. PISOT [13], M. AMARA [1]).

10. Ensembles fermés de nombres algébriques.

Dans tout ce paragraphe, K désignera, soit le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, soit l'un des cinq corps quadratiques imaginaires euclidiens, et A_K désignera l'anneau des entiers de K .

Ce qui suit réalise une synthèse partielle entre les deux généralisations des nombres de Pisot-Vijayaraghavan exposées au paragraphe précédent.

(La notation $|a|$ aura ici sa signification usuelle de valeur absolue.)

Ensembles $S_q(K)$ et sous-ensembles $S_q(d_1 , \ldots , d_h ; K)$. - q étant un entier fixé de A_K , nous dirons qu'un nombre θ appartient à l'ensemble $S_q(K)$ si :

- $\frac{1}{\theta}$ est la seule racine située dans le disque $|Z| < 1$ d'un polynôme $Q^*(Z)$ appartenant à $A_K[Z]$ et vérifiant $Q^*(0) = q$;
- Il existe un polynôme $A^*(Z)$ appartenant à $A_K[Z]$ et vérifiant

$$A^*(\tfrac{1}{\theta}) \neq 0 , \qquad |A^*(0)| \geqslant |q| ,$$

$$|A^*(Z)| \leqslant |Q^*(Z)| \quad \text{sur le cercle-unité } |Z| = 1 .$$

Etant donnée une suite de diviseurs "emboîtés" de q :

$$d_1 | q , \; d_2 | d_1 , \; \ldots , \; d_h | d_{h-1} \qquad (d_h \text{ non inversible}) ,$$

nous dirons qu'un nombre θ appartient à l'ensemble $S_q(d_1 , \ldots , d_h ; K)$ si :

- θ appartenant à $S_q(K)$, le polynôme

$$Q^*(Z) = q_0^* + q_1^* Z + \ldots + q_h^* Z^h + \ldots + q_s^* Z^s ,$$

dont $\frac{1}{\theta}$ est racine, satisfait à la condition :

$$q_0^* = q \ , \ d_1 | q_1^* \ , \ \ldots \ , \ d_h | q_h^* \ .$$

Nous remarquerons qu'il n'est pas exigé que le polynôme $Q^*(Z)$ soit irréductible, ni qu'il soit primitif (ce qui entraîne d'ailleurs $S_{q'}(K) \subset S_q(K)$, lorsque q' est un diviseur de q).

<u>Familles</u> $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$ <u>et sous-familles</u> $\mathcal{F}_\delta(S_q(d_1 , \ldots , d_h ; K))$. - q étant un entier fixé de A_K , nous dirons qu'une fraction rationnelle $f(Z) = \frac{A^*(Z)}{Q^*(Z)}$ appartient à la famille $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$ si :

- $A^*(Z)$ et $Q^*(Z)$ appartiennent à $A_K[Z]$, le dénominateur vérifiant $Q^*(0) = q$;
- $f(Z)$ possède un pôle unique dans le disque $|Z| < 1$, pôle situé dans la couronne $0 < \delta \leqslant |Z| < 1$;
- $|f(0)| \geqslant 1$ et $|f(Z)| \leqslant 1$ sur le cercle-unité $|Z| = 1$.

On définit enfin les sous-familles $\mathcal{F}_\delta(S_q(d_1 , \ldots , d_h ; K))$ en ajoutant les conditions de divisibilité sur les coefficients de $Q^*(Z)$.

PROPOSITION 11. - <u>Dans l'espace des applications du disque</u> $|Z| < 1$ <u>dans la sphère de Riemann, muni de la topologie de la convergence compacte, chaque famille</u> $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$ <u>est compacte</u>.

Le même résultat a lieu pour chaque famille $\mathcal{F}_\delta(S_q(d_1 , \ldots , d_h ; K))$.

La démonstration s'effectue en plusieurs étapes. On commence par montrer que ces familles sont des familles normales (au sens de P. MONTEL) de fonctions méromorphes, puis que ces familles sont fermées, donc compactes. Il faut pour cela montrer que toute fonction limite est une fraction rationnelle, qui peut s'écrire en vérifiant les conditions arithmétiques imposées (ce qui nécessite d'utiliser les propositions 7 et 8, 9 et 10).

PROPOSITION 12. - <u>Chaque ensemble</u> $S_q(K)$ <u>est fermé</u>.

Cela se déduit très simplement de la proposition précédente. Mais lorsque l'on veut étendre cette proposition aux sous-ensembles $S_q(d_1 , \ldots , d_h ; K)$, de sérieuses difficultés se posent pour établir une correspondance convenable entre les pôles $\frac{1}{\theta}$ des fractions rationnelles des sous-familles et les nombres θ des sous-ensembles. Le seul résultat aisément démontrable est que chaque sous-ensemble $S_q(d ; K)$ est fermé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMARA (M.). - Ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e Série, t. 83, 1966, p. 215-270 (Thèse Sc. math. Paris, 1967).

[2] BOREL (E.). - Leçons sur les fonctions méromorphes. - Paris, Gauthier-Villars, 1903.

[3] CANTOR (D.). - Power series with integral coefficients, Bull. Amer. math. Soc., t. 69, 1963, p. 362-366.

[4] DRESS (F.). - Familles fermées de séries formelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 7e année, 1965/66, n° 3, 11 p.

[5] DRESS (F.). - Déterminants de Hankel et quotients de séries formelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 7e année, 1965/66, n° 20, 14 p.

[6] DRESS (F.). - Familles de séries formelles et ensembles de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. (à paraître en 1968) (Thèse Sc. math. Paris, 1967).

[7] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 72, 1955, p. 62-92.

[8] FATOU (P.). - Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., Uppsala, t. 30, 1906, p. 335-400.

[9] GRANDET (Marthe). - Sur un ensemble d'entiers algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 1542-1543.

[10] GRANDET (Marthe). - Ensembles fermés d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 82, 1965, p. 1-33 (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[11] HADAMARD (J.). - Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, J. Math. pures et appl., 4e série, t. 8, 1892, p. 101-186 (Thèse Sc. math. Paris, 1892).

[12] PISOT (C.). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).

[13] PISOT (C.). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 81, 1964, p. 165-188.

[14] SALEM (R.). - A remarkable class of algebric integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.

[15] SAMUEL (P.). - Anneaux factoriels, Vol. 1. - São Paulo, Sociedade de Matematica de São Paulo, 1963 (Publicações da Sociedade de Matematica de São Paulo, 1).