Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Roger Desq

Structure des demi-groupes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, nº 2 (1966-1967), exp. nº 16, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_2_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
20e année, 1966/67, n° 16
17 avril 1967

STRUCTURE DES DEMI-GROUPES

par Roger DESQ

(d'après Hans Jürgen HOEHNKE [1])

Dans son mémoire [1], HOEHNKE adapte à l'étude des demi-groupes certaines méthodes utilisées dans le livre de JACOBSON [2] pour déterminer la structure des anneaux. La notion de représentation d'un demi-groupe a été introduite par TULLY [3].

1. Représentations d'un demi-groupe.

Soient S un demi-groupe, M un ensemble ; on dit que S opère à droite sur M, si, à tout élément a de S, correspond une application ρ_a de M dans M. On note

$$\rho_a : x \to x\rho_a = xa , \qquad \text{pour } x \in M , \quad a \in S ,$$

M est un S-système (à droite), si

$$(xa)b = x(ab) , \qquad \forall\, x \in M , \quad \forall\, a , b \in S .$$

L'application $\Delta : a \to \rho_a$ est un homomorphisme de S dans le demi-groupe des transformations de M. L'image S_M de S par Δ est appelée représentation de S associée au S-système M ; si Δ est injectif, S_M est dite fidèle.

On définit de façon naturelle les homomorphismes entre S-systèmes, les S-sous-systèmes, les congruences. Si L est un sous-système de M, on définit le S-système quotient M/L en prenant l'ensemble quotient de M par la relation

$$\lambda : \quad x \equiv y(\lambda) \iff \begin{cases} x = y , \\ \text{ou} \quad x , y \in L . \end{cases}$$

M/λ est muni d'une structure de S-système par la loi

$$\bar{x}a = \overline{xa} \qquad (\bar{x} = \mathrm{cl}(x) \mod \lambda) .$$

Un S-sous-système L de M est dit trivial, si $L = M$ ou si $|L| = 1$ ($|L|$ = puissance de L) .

On pose

$$F_S(M) = \{x \in M ; \ xa = x , \ \forall\, a \in S\} \quad (= F(M) \text{ si } S \text{ est fixé}) ,$$

$$MS = \{xa ; \ x \in M , \ a \in S\} .$$

<u>Exemple</u> : S lui-même est muni d'une structure de S-système en posant $\rho_a = a_R$ multiplication à droite.

$$F(S) = O(S) = \{\text{zéros à gauche de } S\} \ .$$

Si M est un S-système quelconque, $M\,O(S) \subset F(M)$.

DÉFINITION 1.1. - <u>Un</u> S-<u>système</u> M (<u>une représentation</u> S_M) <u>est dit irréductible, si</u> :

(i) $MS \not\subset FM$;

(ii) M <u>n'a que des sous-systèmes triviaux</u>.

(i) $\Longrightarrow$ $F(M) \neq M$; (ii) $\Longrightarrow$ $|F(M)| \leqslant 1$. De plus $MS = M$, car autrement, (ii) $\Longrightarrow$ $MS = \{x\}$; $\forall\ a \in S$, $xa = x$; $x \in F(M)$, ce qui contredit (i).

DÉFINITION 1.2. - <u>Un demi-groupe</u> S <u>est dit primitif (à droite), s'il admet une représentation irréductible fidèle</u>.

Si S est primitif, $|O(S)| \leqslant 1$, puisque $M\,O(S) \subset F(M)$.

A une représentation quelconque S_M de S on associe une congruence δ_M ; $a \equiv b(\delta_M)$ $\Longleftrightarrow$ $\rho_a = \rho_b$.

DÉFINITION 1.3. - <u>On pose</u>

$$\operatorname{rad} S = \bigcap_{M \in I} \delta_M \ ;$$

I <u>désigne l'ensemble des</u> S-<u>systèmes irréductibles. (Si</u> I <u>est vide,</u> $\operatorname{rad} S = u$, <u>la relation universelle</u>.)

THÉORÈME 1.1. - $\operatorname{rad}(S/\operatorname{rad} S) = 0$ (0 <u>représente l'identité</u>).

En effet, si M est un S-système, si λ est une congruence dans S contenue dans δ_M , on définit sur M une structure de S/λ-système, en posant

$$x[a] = xa \qquad ([a] = \mathrm{Cl}\ a \mod \lambda) \ .$$

Inversement, si M est un S/λ-système, cette relation définit sur M une structure de S-module. Le S-système M est irréductible si, et seulement si, le S/λ système M est irréductible.

DÉFINITION 1.4. - <u>Un</u> S-<u>système</u> Z <u>est strictement cyclique, s'il contient un élément</u> z <u>tel que</u>

$$Z = zS \ .$$

L'élément z est un générateur strict de Z .

L'ensemble $\hat{Z}$ des non-générateurs de Z est un S-sous-système de Z , distinct de Z . Si Z contient au moins deux éléments, on a

$$F(Z) \subset \hat{Z} \quad .$$

THÉORÈME 1.2.

(a) Un S-système irréductible M est strictement cyclique, avec $F(M) = \hat{M}$.

(b) Soit Z un S-système strictement cyclique, $|Z| \geqslant 2$:

- Si $\hat{Z} = \emptyset$, Z est irréductible ;
- Si $\hat{Z} \neq \emptyset$, $Z/\hat{Z}$ est irréductible.

Preuve.

(a) Pour tout élément $x \in M - F(M)$, on a $xS = M$; autrement, soit

$$L = \{y \in M \ , \ \ yS \subset F(M)\} \quad ,$$

L est un sous-système de M non contenu dans $F(M)$, donc $L = M$, ce qui contredit l'hypothèse $MS \not\subset F(M)$.

(b) $Z = zS$ implique $ZS = Z \not\subset F(Z)$. Soit W un sous-système de Z non contenu dans $\hat{Z}$, W contient un élément w tel que $wS = Z$, $Z \subset WS \subset W$, $Z = W$. Ceci démontre (b), lorsque $\hat{Z} = \emptyset$.

Si $\hat{Z} \neq \emptyset$: $F(Z/\hat{Z}) = \{\hat{Z}\}$; $(Z/\hat{Z})S \not\subset F(Z/\hat{Z})$, tout sous-système de $Z/\hat{Z}$ est de la forme $W/\hat{Z}$, où W est un sous-système de Z contenant $\hat{Z}$; $Z/\hat{Z}$ est bien irréductible.

2. Le socle d'un demi-groupe.

LEMME 2.1. - Soit φ un homomorphisme d'un S-système irréductible M dans un S-système quelconque N ; $M' = \varphi(M)$ est, soit un sous-système irréductible de N , soit un sous-système trivial contenu dans $F(N)$.

$M'S = \varphi(M)S = \varphi(MS) = \varphi(M) = M'$. D'autre part, si L est un sous-système de M' , $\varphi^{-1}(L)$ est un sous-système de M , M' ne contient pas de sous-système propre. Si $F(M') = M'$, M' ne contient qu'un seul élément, car si $x , y \in M'$, $\{x\}$ et $\{y\}$ sont des sous-systèmes de M' , $\varphi^{-1}(x)$ et $\varphi^{-1}(y)$ sont deux sous-systèmes distincts de M , et l'un d'eux est égal à M .

DÉFINITION 2.1. - Soit J l'ensemble de tous les sous-systèmes irréductibles de M.

$$\mathfrak{S} = \{ \bigcup_{L \in J} L \} \cup F(M)$$

est le socle de M.

Soit H_α le sous-ensemble de J formé des sous-systèmes irréductibles isomorphes à un sous-système fixe K.

$$\mathfrak{D}_\alpha = \{ \bigcup_{L \in H_\alpha} L \} \cup F(M)$$

est la composante homogène de $\mathfrak{S}$ relative à K. L'intersection de deux composantes homogènes distinctes est $F(M)$.

Dans l'ensemble des sous-systèmes de M, considérons la relation suivante : $X \sim Y$, si et seulement s'il existe une suite finie $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de sous-systèmes de M tels que $M_1 = X$, $M_n = Y$, et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$, il existe un homomorphisme de M_i sur M_{i+1} ou de M_{i+1} sur M_i. Cette relation décompose J en classes, $J = \bigcup J_\sigma$.

Les sous-systèmes

$$\mathfrak{J}_\sigma = \{ \bigcup_{L \in J_\sigma} L \} \cup F(M)$$

sont appelés composantes semi-homogènes du socle $\mathfrak{S}$.

M est dit complètement réductible [resp. semi-homogène, homogène], si $M = \mathfrak{S}$ $[M = \mathfrak{J}_\sigma , \ M = \mathfrak{D}_\alpha]$.

THÉORÈME 2.1.

(a) Soit M_i un S-système ayant un socle $\mathfrak{S}_i \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$. Tout homomorphisme φ de M_1 dans M_2 induit un homomorphisme de $\mathfrak{S}_1$ dans $\mathfrak{S}_2$.

(b) Toute image homomorphe d'un S-système complètement réductible est complètement réductible.

(c) Tout sous-système M' d'un S-système complètement réductible M est complètement réductible.

Preuve. - (a) et (b) résultent du lemme 2.1.

(c)

$$M = \{ \bigcup_{L \in J} L \} \cup F(M) \quad ,$$

$$M' = M' \cap M = \{ \bigcup_{L \in J} (M' \cap L)\} \cup (M' \cap F(M)) \quad .$$

$M' \cap F(M) = F(M')$; $M' \cap L$ est un sous-système de L , ou est vide ; nous avons $M' \cap L = \emptyset$, ou $M' \cap L \subset F(L) \subset F(M')$, ou $M' \cap L = L$.

Si on considère S comme S-système, les sous-systèmes de S sont les idéaux à droite, le socle $\mathfrak{S}$ de ce S-système est appelé socle (droit) du demi-groupe S . L'application $a \to ua$ est un endomorphisme du S-système S , d'après le théorème 2.1, $\mathfrak{S}$ est vide ou est un idéal bilatère ; d'après le lemme 2.1, les composantes semi-homogènes sont des idéaux bilatères.

$$\mathfrak{S} = \bigcup \mathfrak{I}_\sigma \ , \qquad \text{avec } \mathfrak{I}_\sigma \cap \mathfrak{I}_\tau = 0(S) \quad \text{si} \quad \sigma \neq \tau \ ,$$

ce qui implique

$$\mathfrak{I}_\sigma . \mathfrak{I}_\tau = 0(S) \ , \qquad \text{si} \quad \sigma \neq \tau \ .$$

Si $0(S)$ est vide, $\mathfrak{S}$ est vide ou semi-homogène.

Dans la suite, "idéal" remplace "idéal bilatère".

LEMME 2.2. - *Un* S-*système* M *irréductible est irréductible comme* T-*système, pour tout idéal* T *de* S *tel que* $MT \not\subset F(M)$.

Si $x \in M - F(M)$, $xT = M$, car xT est un S-sous-système,

$$L = \{x \in M \ ; \ xT \subset F(M)\}$$

est un S-sous-système de M égal à M , s'il contient un élément de $M - FM$.

THÉORÈME 2.2. - *Si* S *est un demi-groupe tel que* $0(S)$ *soit vide ou que* $S/0(S)$ *ne contienne pas d'idéal nilpotent non nul, le socle* $\mathfrak{S}$ *de* S *est vide ou complètement réductible.*

Preuve. - Soit R un idéal à droite de S irréductible (irréductible en tant que S-système). Si $R\mathfrak{S} \not\subset F(R)$, d'après le lemme 2.2, R est un $\mathfrak{S}$-système irréductible. Si $R\mathfrak{S} \subset F(R)$, $R^2 \subset F(R) = R \cap 0(S)$; $(R \cup SR)^2 \subset 0(S)$; $R \subset 0(S)$ et $RS \subset R \cap 0(S) = F(R)$, contrairement à l'hypothèse.

THÉORÈME 2.3. - *Soit* S *un demi-groupe complètement réductible.*

(a) *Tout* S-*système* M *qui vérifie* $MS = M$ *est complètement réductible.*

(b) *Tout* S-*système irréductible est l'image homomorphe d'un idéal à droite irréductible de* S .

<u>Preuve</u>. - $S = \bigcup_{R \in I} R \cup O(S)$.

(a) $M\, O(S) \subset F(M)$.

$$M = MS = (\bigcup_{R\in I} MR) \cup F(M) = (\bigcup_{R\in I} \bigcup_{x\in M} xR) \cup F(M) \quad .$$

$r \to xr$ est un homomorphisme de R sur xR , d'après le lemme 2.1, xR est irréductible ou contenu dans $F(M)$.

(b) Si M est irréductible, $MS \not\subset F(M)$, il existe R irréductible avec

$$MR \not\subset F(M) \quad ,$$

il existe $x \in M$ avec

$$xR \not\subset F(M) \quad ,$$

on a $xR = M$; $r \to xr$ est un homomorphisme de R sur M .

3. Etude de Hom(M , M) .

$$\mathrm{Hom}(M , M) = \Gamma_M = \{\text{homomorphismes de } M \text{ dans } M\} = \text{centralisateur de } M \quad .$$

THÉORÈME 3.1. - <u>Le centralisateur d'un</u> S-<u>système strictement cyclique est homomorphe à un sous-demi-groupe de</u> S .

<u>Preuve</u>. - Soient $M = xS$, $\varphi \in \Gamma_M$, $\varphi(x) = xc$, $\varphi(xa) = \varphi(x).a = xca$; comme φ est une application,

$$xa = xb \implies xca = xcb \quad .$$

Inversement, un élément c qui vérifie les relations précédentes définit un homomorphisme de M dans M . L'ensemble C de ces éléments est un sous-demi-groupe de S homomorphe à Γ_M .

LEMME 3.1. - <u>Soient</u> e <u>un idempotent de</u> S , <u>et</u> M <u>un</u> S-<u>système. Il existe une bijection entre</u> Hom(eS , M) <u>et</u> Me ; <u>si</u> $M = eS$, $\Gamma_M \simeq eSe$.

Si $\varphi \in \mathrm{Hom}(eS , M)$, $a \in S$, $\varphi(ea) = \varphi(eea) = \varphi(e)ea$.

$\varphi(e) = y \in Me$; inversement, un élément y de Me définit un homomorphisme φ_y de eS dans M , par $\varphi_y(ea) = ya$. Si $M = eS$, cette correspondance devient un isomorphisme.

THÉORÈME 3.2. - <u>Soit</u> e <u>un idempotent de</u> S .

(a) <u>Si l'idéal à droite</u> eS <u>est irréductible</u>, $e \notin O(S)$, eSe <u>est un groupe ou</u>

<u>un groupe avec zéro adjoint ; dans chaque cas,</u> $eSe = \{e\}$ <u>ou</u> $O(eSe) = eSe \cap O(S)$.

(b) <u>Si</u> $O(S)$ <u>est vide ou si</u> $S/O(S)$ <u>ne contient pas d'idéal nilpotent non nul,</u> <u>si</u> $e \notin O(S)$, <u>et si</u> eSe <u>vérifie les conditions de</u> (a), eS <u>est irréductible</u>.

<u>Preuve</u>.

(a) $e \notin O(S)$, car autrement $(eS)S = \{e\} = F(eS)$.

Posons $F(eS) = F$, $F(eS) \subset F(S)$, $F \subset O(S)$. Soit T un idéal à droite de eSe, $TS = eTeS \subset eS$; donc on a :

- soit $TS \subset F$, d'où $T = Te \subset F$, $T = F$ et $|T| = 1$,
- soit $TS = eS$, d'où $T \subset eSe = TSe = TeSe \subset T$, $T = eSe$.

En particulier,

$$O(eSe) = \begin{cases} eSe\text{, ce qui donne } eSe = \{e\}, \\ \text{ou } F,\quad O(eSe) = eSe \cap O(S), \\ \text{ou } \emptyset . \end{cases}$$

Si F est vide, le demi-groupe eSe n'a pas d'idéaux à droite **propres**, c'est un groupe.

Si $F = \{f\}$, f est un zéro de eSe ; en effet, si $a \in eSe$, $a \neq f$,

$$a \in a.eSe = eSe, \qquad af.eSe = af = f .$$

Ceci montre également que eSe est un groupe avec zéro f.

(b) $F(eS) = F \subset O(S) \cap O(eSe)$, comme $e \notin O(S)$, on en déduit $(eS)S \not\subset F$. Soit ea un élément de $eS - F$, $ea \notin O(S)$, $eaS \not\subset O(S)$, car autrement

$$Q = \{x \in S,\ xS \subset O(S)\}$$

est un idéal qui contient strictement $O(S)$, et tel que $Q^2 \subset QS \subset O(S)$.

Maintenant, $eaS \not\subset O(S)$ implique $(eaS)^2 \not\subset O(S)$, $eaSe \not\subset O(S)$, si $eSe \neq \{e\}$, il résulte de l'hypothèse qu'il existe $b \in S$ tel que $eabe \notin O(eSe)$. Comme eSe est un groupe ou un groupe avec zéro, il existe c tel que $eabc = e$, pour tout $d \in S$, $ea.bcd = ed$, donc $ea.S = eS$, eS est irréductible. Si $eSe = \{e\}$, on a encore $eaS \supset eaeS = eS$.

COROLLAIRE 3.1. - <u>Soit</u> S <u>un demi-groupe vérifiant l'une des conditions suivantes</u> :

(i) S <u>ne contient aucun élément zéro à gauche ou à droite</u> ;

(ii) S <u>contient un zéro, mais ne contient pas d'idéal nilpotent non nul</u>.

Soit e un idempotent de S, eS est irréductible si, et seulement si, Se est irréductible.

THÉORÈME 3.3. - Soient eS et fS deux idéaux à droite irréductibles de S engendrés par les idempotents e et f.

(a) $eS \simeq fS \iff eSf \not\subset O(S)$.

(b) $eS \simeq fS \implies eSe \simeq fSf$.

(c) Tout homomorphisme φ de fS dans eS est trivial (φ est un isomorphisme, ou $|\varphi(eS)| = 1$).

Preuve. - D'après le lemme 3.1, $\mathrm{Hom}(fS , eS) \leftrightarrow eSf$.

(a) Si $eS \simeq fS$, il existe $c \in eSf$ tel que $cfS = eS$, comme $eS \not\subset O(S)$, $c = cf \notin O(S)$, $eSf \not\subset O(S)$.

Si $eSf \not\subset O(S)$, $eSf \not\subset F(eS)$, donc $eSfS = eS$, $eSf.fSe = eSe$. Il existe $a \in eSf$ et $b \in fSe$ tels que $ab = e$, $g = ba$ vérifie $g^2 = g$, $agb = e \notin O(S)$, $g \notin O(S)$, $g \in fSf$, qui est un groupe ou un groupe avec zéro, donc $g = f$. L'application $x \to ax$ est un isomorphisme de fS sur eS.

(b) L'application $s \to bsa$ est un isomorphisme de eSe sur fSf.

(c) Si $eSf \subset O(S)$, tout homomorphisme de fS dans eS est l'application sur l'élément fixe $F(eS)$ de eS. Si $a \in eSf$, $a \notin O(S)$, $afS = eS$, $afSe = eSe$, on peut trouver $b \in fSe$ avec $ab = e$, la démonstration de (a) montre que l'homomorphisme associé à a est un isomorphisme.

4. Ensembles vectoriels.

DÉFINITION 4.1. - Soit Δ un groupe ou un groupe avec zéro. Un Δ-système à gauche M est appelé ensemble vectoriel (à gauche) sur Δ, s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) $\forall x \in M$, $1x = x$ (1 = élément unité de Δ) ;

(ii) $|F(M)| \leqslant 1$ ou $F(M) = M$;

(iii) $F(M) = M \implies |\Delta| = 1$;

(iv) $\emptyset \neq F(M) \neq M \implies [\Delta(M - F(M))] \supset F(M)$;

(v) Pour $\gamma , \delta \in \Delta$, $x \in M$, la relation $\gamma x = \delta x$ entraîne $\gamma = \delta$ ou $x \in F(M)$.

LEMME 4.1. - Si M est un ensemble vectoriel sur Δ, et si $\emptyset \neq F(M) \neq M$, $|F(M)| = 1$, Δ contient un zéro, $F(M) = 0M$.

D'après (iv), il existe $x \in M - F(M)$ et $\delta \in \Delta$ tels que $\delta x \in F(M)$, $\forall \gamma \in \Delta$, on a $\gamma\delta x = \delta x$, ce qui, d'après (v), implique $\gamma\delta = \delta$. Donc $\delta = 0$, ou $\gamma = 1$, et $\Delta = \{1\}$, ce qui contredit $F(M) \neq M$.

THÉORÈME 4.1. - Tout ensemble vectoriel sur Δ est un Δ-système complètement réductible homogène.

Preuve.

$$M = \bigcup_{x \in M - F(M)} \Delta x \qquad \text{ou} \qquad M = F(M) \quad .$$

Si $x \in M - F(M)$, Δx est un Δ-système irréductible. En effet, $\Delta(\Delta x) \subset F(\Delta x)$ donne $\Delta x \subset F(M)$, $|\Delta x| = 1$, $|\Delta| = 1$, ce qui est impossible. Si $\delta x \notin F(\Delta x)$, $\Delta\delta x = \Delta\delta^{-1}\, \delta x = \Delta x$.

D'autre part, l'application $\delta x \to \delta y$ $(\delta \in \Delta)$ est un isomorphisme de Δx sur Δy (si x et $y \notin F(M)$).

DÉFINITION 4.2. - Soit M un ensemble vectoriel sur Δ ; une forme linéaire sur M est un homomorphisme de M dans le Δ-système $\Delta = \Delta 1$.

L'ensemble M^* des formes linéaires sur M est un Δ-système à droite relativement à la loi

$$x(f\delta) = (xf)\delta \qquad (x \in M \ , \quad f \in M^* \ , \quad \delta \in \Delta) \quad .$$

M^* est non vide, en effet, si $\bar{\Delta} = \Delta - \{0\}$, on peut décomposer M en classes de transitivité modulo $\bar{\Delta}$;

$$M = \bigcup_{x \in N} \bar{\Delta} x \quad ,$$

pour avoir un élément f de M^* , on peut choisir arbitrairement les images des éléments de N .

LEMME 4.2. - Si $|\Delta| \neq 1$, $F(M^*) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $|F(M^*)| = 1$, $0 \in \Delta$, $F(M^*) = M^* 0$.

Soient $f \in F(M^*)$, $x \in M$; $(xf)\delta = x(f\delta) = xf$, comme $|\Delta| \neq 1$, $xf = 0 \in \Delta$, $|F(M^*)| = 1$.

THÉORÈME 4.2. - M^* est un ensemble vectoriel à droite sur Δ .

Preuve. - Il faut vérifier les conditions symétriques de la définition 4.1.

(i) est immédiat.

(ii) résulte du lemme 4.2.

(iii) Si $F(M^*) = M^*$ et $|\Delta| \neq 1$, $|M^*| = 1$ (lemme 4.2), mais ceci est impossible, car $|M^*| \geqslant |\Delta|$.

(iv) Si $|\Delta| = 1$, $F(M^*) = M^*$; si $|\Delta| \neq 1$, le lemme 4.2 donne le résultat.

(v) Si $f\gamma = f\delta$, $\gamma \neq \delta$ et $f \in M^* - F(M^*)$; $\forall\, x \in M$, $(xf)\gamma = (xf)\delta$, d'où $xf = 0$, $f \in F(M^*)$.

THÉORÈME 4.3. - Soient M un S-système irréductible, Γ son centralisateur. $F_S(M)$ [resp. $F_\Gamma(M)$] représente l'ensemble des éléments fixes de M pour S [resp. pour Γ].

(a) Si $|F_S(M)| = 1$, $0 \in \Gamma$, et $F_\Gamma(M) = 0M$.
(b) Si $|\Gamma| \neq 1$, $F_\Gamma(M) = F_S(M)$.
(c) Si Γ est un groupe ou un groupe avec zéro, M est un ensemble vectoriel sur Γ.

Preuve.

(a) Si $F_S(M) = \{y\}$, considérons l'application θ de M dans M définie par

$$\theta(x) = y , \qquad \forall\, x \in M ,$$

$$\theta(xa) = y = ya = \theta(x).a , \qquad \theta \in \Gamma .$$

Si $\gamma \in \Gamma$, $(\theta\gamma)(x) = \theta(\gamma x) = y = \theta(x)$, $\theta\gamma = \theta$,

$$(\gamma y)a = \gamma(ya) = \gamma y , \qquad \text{donc } \gamma y \in F_S(M) , \quad \gamma y = y ,$$

$$(\gamma\theta)(x) = \gamma(\theta x) = \gamma y = y = \theta(x) , \qquad \gamma\theta = \theta .$$

Comme $|M| \neq 1$, $|\Gamma| \neq 1$, θ est bien un zéro pour Γ.

(b) Soit x un élément de $F_\Gamma(M)$; $\gamma x = x$, $\gamma(xa) = xa$, si $x \notin F_S(M)$, $xS = M$, $\gamma = 1$, et $\Gamma = \{1\}$. Si $\Gamma \neq \{1\}$, $F_\Gamma(M) \subset F_S(M)$ et $F_\Gamma(M) = F_S(M)$, car $|F_S(M)| = 1$. D'autre part, d'après (a), si $F_\Gamma(M) = \emptyset$, il en est de même pour $F_S(M)$.

(c) Les conditions (i), (ii), (iii) de la définition 4.1 sont vérifiées, d'après (b).

Si $\emptyset \neq F_\Gamma(M) \neq M$, $|\Gamma| \neq 1$, donc, d'après (b), $|F_S(M)| = 1$, d'après (a), $F_\Gamma(M) = 0M$, et comme $|F_\Gamma(M)| = 1$, $F_\Gamma(M) = 0(M - F_\Gamma(M))$.

Si γ, $\delta \in \Gamma$, $\gamma \neq \delta$, et si $x \notin F_\Gamma(M)$, $|\Gamma| \neq 1$, donc $x \notin F_S(M)$, $xS = M$, et si $\gamma x = \delta x$, on en déduit $\gamma = \delta$.

Soit M [resp. M'] un ensemble vectoriel à gauche [resp. à droite] sur Δ . Le couple (M , M') forme une paire d'ensembles vectoriels duaux, s'il existe une application de $M \times M'$ dans Δ vérifiant :

(1) $(\alpha x , x') = \alpha(x , x')$, $(x , x'\alpha) = (x , x')\alpha$;
(2) Si $0 \in \Delta$, et si $(x , x') = 0$, pour tous les $x' \in M'$, $x \in F(M)$;
(2') Si $0 \in \Delta$, et si $(x , x') = 0$, pour tous les $x \in M$, $x' \in F(M')$.

On dit que la paire (M , M') est non dégénérée, si elle vérifie de plus :

(3) Si $(x , x') = (y , x')$ a lieu pour tout $x' \in M'$, $x = y$;
(3') Si $(x , x') = (x , y')$ a lieu pour tout $x \in M$, $x' = y'$.

Les conditions (3) et (3') entraînent (2) et (2').

Soit (M , M') une paire d'ensembles vectoriels duaux sur Δ . Les endomorphismes du Δ-système M constituent un demi-groupe $\mathcal{E}(M)$. Si $s \in \mathcal{E}(M)$, on note xs l'image de l'élément x de M par s . Ms est un ensemble vectoriel sur Δ , ou contient seulement l'élément fixe de M . L'ensemble $\mathfrak{F}(M)$ des éléments s de $\mathcal{E}(M)$, tels que $Ms = \Delta x$, est un idéal de $\mathcal{E}(M)$.

Une application s' de M' dans M' est un adjoint de l'élément s de $\mathcal{E}(M)$, si,

$$\forall\, x \in M \ , \quad \forall\, x' \in M' \ , \qquad (xs , x') = (x , x's') \quad .$$

On désigne par $\mathcal{E}_{M'}(M)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}(M)$ qui admettent un adjoint relativement à M' . On pose

$$\mathfrak{F}_{M'}(M) = \mathfrak{F}(M) \cap \mathcal{E}_{M'}(M) \quad .$$

$\mathcal{E}_{M'}(M)$ est un demi-groupe, $\mathfrak{F}_{M'}(M)$ est un idéal de $\mathcal{E}_{M'}(M)$.

LEMME 4.3. - <u>Soit</u> (M , M') <u>une paire d'ensembles vectoriels duaux. Un élément</u> s <u>de</u> $\mathcal{E}(M)$ <u>appartient à</u> $\mathfrak{F}_{M'}(M)$, <u>si et seulement s'il existe</u> $y' \in M'$ <u>et</u> $u \in M$ <u>tels que</u> $xs = (x , y')u$.

Si $s \in \mathfrak{F}(M)$, $Ms = \Delta u$ pour $u \in M$, $xs = \sigma(x)u$, $\sigma(x) \in \Delta$.

Si $u \in F(M) = 0M$, $\sigma(x)$ est arbitraire, on peut prendre $\sigma(x) = (x , y')$ pour y' quelconque. Si $u \notin F(M)$, soit s' l'adjoint de s , la relation

$$(xs , x') = (x , x's') \qquad \text{implique} \qquad \sigma(x)(u , x') = (x , x's') \quad .$$

Comme $u \notin F(M)$, on peut trouver $x' \in M'$, tel que $(u , x') = \alpha \neq 0$, on a $\sigma(x) = (x , x's')\alpha^{-1} = (x , y')$, avec $y' = x's'.\alpha^{-1}$.

Inversement, si $xs = (x, y')u$, définissons s' par $x's' = y'(u, x')$, on a

$$(xs, x') = (x, y')(u, x') = (x, x's') .$$

LEMME 4.4. - *Soit* S *un demi-groupe primitif ayant des idéaux à droite minimaux (0-minimaux, si* S *contient* 0 *).*

Tout idéal à droite minimal R *de* S *est irréductible et fidèle.*

Tout S*-système irréductible et fidèle est homomorphe à* R .

Soit R un idéal à droite minimal de S. Si $|R| = 1$, $R \subset 0(S)$, donc

$$|0(S)| = 1 , \qquad 0(S) = \{0\} \qquad \text{et} \qquad R = \{0\} ,$$

contrairement à l'hypothèse, car dans ce cas R est 0-minimal donc différent de $\{0\}$.

Soit M un S-système irréductible fidèle ; $MR \not\subset F(M)$, car autrement

$$|MR| = |F(M)| = 1 , \quad M \text{ fidèle} \quad \text{donne} \quad |R| = 1 .$$

Donc $MR = M$. Il existe un élément x de M tel que $xR = M$. L'application $\Phi : r \to xr$ de R dans M est un épimorphisme. Il en résulte que R est fidèle, car si, $\forall r \in R$, $ra = rb$,

$$\Phi(ra) = \Phi(rb) \implies \Phi(r)a = \Phi(r)b ,$$

$ya = yb$ a lieu pour tout élément y de M .

$RS \not\subset F(R)$, car autrement $RS = \{0\}$, et R n'est pas fidèle. R est bien irréductible.

LEMME 4.5. - *Soit* S *un demi-groupe primitif contenant un idempotent* e *tel que l'idéal* eS *soit irréductible,* SeS *est le socle de* S .

Tout idéal irréductible est minimal. D'après le lemme 4.4, le socle

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{R \in I} R \cup 0(S) ,$$

R, idéal à droite irréductible, est homomorphe à eS. Si $s \in S$, seS est un idéal homomorphe à eS $(x \to sx)$, donc, d'après le lemme 2.1, est contenu dans $\mathfrak{S}$; $SeS \subset \mathfrak{S}$.

Inversement, soit R un idéal irréductible ; $R.SeS \subset R \cap SeS$, $R.SeS$ qui est un idéal à droite contenu dans R est, soit égal à R, soit égal à $F(R)$. $R.SeS = R$ donne $R \subset SeS$. Si $R.SeS \subset F(R) \subset F(S)$, $Re \subset 0(S)$, d'après le lemme 3.1, tout homomorphisme de eS dans R est trivial, comme il existe un homomorphisme surjectif, $R \subset O(S)$, ce qui est impossible.

THÉORÈME 4.4. - Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) S est un demi-groupe primitif ayant un idéal à droite irréductible engendré par un idempotent ;

(b) Il existe une paire d'ensembles vectoriels duaux (M , M') sur Δ $(|M| \neq 1)$, telle que S soit isomorphe à un sous-demi-groupe de $\mathfrak{L}_{M'}(M)$ contenant $\mathfrak{F}_{M'}(M)$. Le socle de l'image de S dans cet isomorphisme est $\mathfrak{F}_{M'}(M)$.

Preuve.

(b) $\Longrightarrow$ (a) : Soit S un demi-groupe, $\mathfrak{F}_{M'}(M) \subset S \subset \mathfrak{L}_{M'}(M)$. Soit

$$y' \in M' - F(M') \ ;$$

$R_{y'}$ est l'ensemble des applications de M dans M définies par

$$x \to xr = (x , y')u , \qquad \text{pour un } u \in M \ .$$

D'après le lemme 4.3, $R_{y'} \subset \mathfrak{F}_{M'}(M)$. Si $s \in S$, $x(rs) = (x , y')us$, donc $R_{y'}$ est un idéal à droite de S .

Soient u_1 un élément de $M - F(M)$, y'_1 un élément de M' tel que

$$\alpha = (u_1 , y'_1) \neq 0 \ .$$

Définissons

$$x \to xr_1 = (x , y')u_1 \ .$$

Si $u \in M$, considérons $s : x \to xs = (x , y'_1)\alpha^{-1} u$, $s \in \mathfrak{F}_{M'}(M)$; $u_1 s = u$, $xr_1 s = (x , y')u = xr$, donc $r_1 S = R_{y'}$.

Si $y' \notin F(M')$, $R_{y'}$ contient plusieurs éléments, tout élément de $R_{y'}$ engendre $R_{y'}$, sauf r_0 défini par

$$x \to xr_0 = (x , y')u_0 , \qquad \text{où } u_0 \in F(M) \ \ (= 0M) \ .$$

$R_{y'}$ est un idéal irréductible de S .

Si, pour $s , t \in S$, $rt = rs$ a lieu pour tout élément r de $R_{y'}$,

$$\forall u \in M , \qquad (x , y')ut = (x , y')us , \quad us = ut \quad \text{et} \quad s = t \ .$$

Donc S est un demi-groupe primitif ayant des idéaux à droite irréductibles. Choisissons $v \in M$, tel que $(v , y') = \beta \neq 0$, $v \notin F(M)$, l'application

$$e : x \to xe = (x , y')(\beta^{-1} v)$$

engendre $R_{y'}$, c'est un idempotent. $R_{y'} = eS$. D'après le lemme 4.5, le socle $\mathfrak{S}$ de S est SeS ; $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{F}_{M'}(M)$, qui est un idéal de $\mathfrak{L}_{M'}(M)$. Mais, inversement,

$$\mathfrak{F}_{M'}(M) = \bigcup_{y' \in M' - F(M')} R_{y'} \cup O(S) \quad ,$$

d'après le lemme 4.3, est contenu dans $\mathfrak{S}$.

(a) ==> (b) : Soit $M = eS$ un idéal à droite irréductible engendré par un idempotent, d'après le lemme 4.4, M est fidèle.

D'après le théorème 3.2, le centralisateur $\Delta = eSe$ de M est un groupe ou un groupe avec zéro ; M est un ensemble vectoriel sur Δ (théorème 4.2).

Posons $M' = Se$, pour la multiplication à droite, M' est un Δ-système. M' est un ensemble vectoriel à droite sur Δ . Si $|\Delta| = 1$, c'est évident. Si $|\Delta| \neq 1$, S contient un zéro, ou S ne contient aucun élément zéro à gauche ou à droite. S étant primitif, $|O(S)| \leqslant 1$. Soit

$$O_r(S) = \{\text{zéros à droite de } S\} \quad ;$$

si $O_r(S)$ est non vide, c'est l'intersection de tous les idéaux à droite de S , c'est donc un idéal à droite irréductible. Supposons $|O_r(S)| > 1$, alors $O(S) = \Phi$,

$$O_r(S) \subset fS \subset O_r(S) \ , \qquad f = f^2 \ , \quad \text{si } f \in O_r(S) \quad .$$

L'idéal à droite fS est irréductible, $eSf \not\subset O(S)$, donc, d'après le théorème 3.3, $eS \simeq fS$ et $eSe \simeq fSf = \{f\}$, ce qui est impossible $(|\Delta| \neq 1)$. Si S contient un zéro, soit N un idéal bilatère nilpotent de S . $eN \subset eS$, donc $eN = eS$ ou $eN = \{0\}$; $(eN)^p \subset N^p = 0$ montre que la première hypothèse est impossible ; de $eN = \{0\}$, on déduit $eSN = \{0\}$, $N = \{0\}$. D'après le corollaire 3.1, $M' = Se$ est un idéal à gauche irréductible, qui admet Δ comme centralisateur (lemme 3.1), c'est un ensemble vectoriel à droite sur Δ (théorème 4.2).

Pour $ex \in M$, $y'e \in M'$, posons

$$(ex \ , \ y'e) = exy'e \quad ,$$

c'est une application de $M \times M'$ dans Δ ; pour cette application, $(M \ , \ M')$ est une paire d'ensembles vectoriels duaux. Si $a \in S$, posons

$$\rho_a : \ M \to M \ ; \qquad x\rho_a = xa \ ; \qquad \rho_a \in \mathfrak{L}(M) \quad .$$

La relation $(xa)y' = x(ay')$ montre que ρ_a admet un adjoint

$$(x\rho_a \ , \ y') = (x \ , \ y'\lambda_a) \quad ;$$

$\lambda_a : \ M' \to M'$ est la multiplication à gauche. M étant fidèle, $a \to \rho_a$ définit un isomorphisme de S dans $\mathfrak{L}_{M'}(M)$. Un élément $s \in \mathfrak{F}_{M'}(M)$ est caractérisé (lemme 4.3) par

$$xs = (x , y')u , \qquad x \in M , \quad u \in M , \quad y' \in M' ,$$

soit $xs = xy'u$; posons $a = y'u$, $s = \rho_a$. L'image de S contient $\mathfrak{F}_{M'}(M)$.

THÉORÈME 4.5. - <u>Les deux conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) S <u>est un demi-groupe primitif à gauche et à droite ayant un idéal à droite irréductible engendré par un idempotent</u> ;

(b) <u>Il existe une paire non dégénérée d'ensembles vectoriels duaux</u> (M , M') <u>sur</u> Δ , <u>avec</u> $|\Delta| \neq 1$, <u>telle que</u> S <u>soit isomorphe à un sous-demi-groupe de</u> $\mathfrak{L}_{M'}(M)$ <u>contenant</u> $\mathfrak{F}_{M'}(M)$.

<u>Preuve</u>.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : Soient S un demi-groupe primitif à gauche et à droite, $M = eS$ un idéal à droite irréductible de S , d'après la démonstration du théorème 4.4, $M' = Se$ est un idéal à gauche irréductible de S , donc c'est un S-système à gauche fidèle (lemme 4.4). Pour l'application $(ex , y'e) = exy'e$, la paire (M , M') est non dégénérée. $\Delta = eSe$, $|\Delta| \neq 1$, en effet, si xe et ye sont deux éléments distincts de Se , eS étant fidèle, il existe $s \in S$ avec $esxe \neq esye$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) : $|\Delta| \neq 1$ implique $|M| \neq 1$ et $|M'| \neq 1$. Soit S un sous-demi-groupe de $\mathfrak{L}_{M'}(M)$ contenant $\mathfrak{F}_{M'}(M)$, d'après le théorème 4.4, S est primitif à droite et contient un idéal irréductible eS . En prenant Δ' anti-isomorphe à Δ , M' peut être considéré comme un ensemble vectoriel à gauche sur Δ' , M à droite sur Δ' . Pour l'application $(x' , x)' = (x , x')$, (M' , M) est une paire non dégénérée d'ensembles vectoriels sur Δ' . Comme (M , M') est non dégénérée, l'application

$$s \to s' = \text{adjoint de } s$$

est un anti-isomorphisme de $\mathfrak{L}_{M'}(M)$ sur $\mathfrak{L}_{M}(M')$ qui envoie $\mathfrak{F}_{M'}(M)$ sur $\mathfrak{F}_{M}(M')$. L'image S' par cet anti-isomorphisme de S est un demi-groupe primitif à droite contenant un idéal irréductible à droite engendré par un idempotent, le théorème en résulte.

<u>Remarque</u>. - Si (M , M') est une paire d'ensembles vectoriels duaux, il existe un homomorphisme canonique de M' dans l'ensemble M^* des formes linéaires sur M . A $y' \in M'$, on fait correspondre

$$\bar{y}' : x \to (x , y') .$$

Soient M_i $(i = 1 , 2)$ deux ensembles vectoriels à gauche sur Δ_i. Une application s de M_1 dans M_2 est dite semi-linéaire, s'il existe un isomorphisme σ de Δ_1 sur Δ_2 tel que

$$(\delta x)s = \delta^{\sigma}(xs) , \qquad \forall\, x \in M_1 , \ \forall\, \delta \in \Delta_1 .$$

Si (M_i , M_i') $(i = 1 , 2)$ sont deux paires d'ensembles vectoriels duaux sur Δ_i, si (s , σ) est une application semi-linéaire de M_1 dans M_2, on dit que (s' , σ^{-1}) est un adjoint de (s , σ), si c'est un homomorphisme de M_2' dans M_1' tel que

$$(x_1 s , y_2')_2^{\sigma^{-1}} = (x_1 , y_2' s')_1 , \qquad \forall\, x_1 \in M_1 , \ \forall\, y_2' \in M_2' .$$

$(x_i , y_i)_i$ désigne la forme bilinéaire associée à la paire (M_i , M_i').

Si, de plus, s est bijective :

- si $a_1 \in \mathfrak{L}(M_1)$, $s^{-1} a_1 s \in \mathfrak{L}(M_2)$;
- si $a_1 \in \mathfrak{F}(M_1)$, $s^{-1} a_1 s \in \mathfrak{F}(M_2)$.

Donc, si (s , σ) et (s^{-1} , σ^{-1}) ont des adjoints, l'application

$$a_1 \to s^{-1} a_1 s$$

est un isomorphisme de $\mathfrak{L}_{M_1'}(M_1)$ sur $\mathfrak{L}_{M_2'}(M_2)$ qui applique $\mathfrak{F}_{M_1'}(M_1)$ sur $\mathfrak{F}_{M_2'}(M_2)$.

Pour chaque $\delta_i \in \Delta_i$, la multiplication à gauche par δ_i appartient au centralisateur du S_i-système M_i, pour tout sous-demi-groupe S_i de $\mathfrak{L}(M_i)$. On peut considérer que Δ_i est contenu dans ce centralisateur.

THÉORÈME 4.6. - <u>Soient</u> (M_i , M_i') <u>une paire d'ensembles vectoriels duaux sur</u> Δ_i, <u>et</u> S_i <u>un sous-demi-groupe de</u> $\mathfrak{L}_{M_i'}(M_i)$ <u>contenant</u> $\mathfrak{F}_{M_i'}(M_i)$ $(i = 1 , 2)$. <u>Si le centralisateur du</u> S_i<u>-système</u> M_i <u>est</u> Δ_i $(i = 1 , 2)$, <u>tout isomorphisme de</u> S_1 <u>sur</u> S_2 <u>est de la forme</u>

$$a_1 \to s^{-1} a_1 s ,$$

<u>où</u> (s , σ) <u>est une application semi-linéaire bijective de</u> M_1 <u>sur</u> M_2 <u>telle que</u>

$$\begin{cases} (s , \sigma) \ \underline{\text{ait un adjoint}} \ (s' , \sigma^{-1}) , \\ (s^{-1} , \sigma^{-1}) \ \underline{\text{ait un adjoint}} \ (s'' , \sigma) . \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] HOEHNKE (H. J.). - Structure of semigroups, Canad. J. of Math., t. 18, 1966, p. 449-491.

[2] JACOBSON (Nathan). - Structure of rings. - Providence, American mathematical Society, 1956 (American mathematical Society, Colloquium Publications, 37).

[3] TULLY (E. J., Jr). - Representation of a semigroup by transformations acting transitively on a set, Amer. J. of Math., t. 83, 1961, p. 533-541.