Marie-Christine Germa

$(\mathcal{T})$-algèbres non associatives

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, n° 2 (1966-1967), exp. n° 12, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_2_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
20e année, 1966/67, n° 12

6 mars 1967

($\mathfrak{T}$)-ALGÈBRES NON ASSOCIATIVES

par Marie-Christine GERMA

En 1956, LESIEUR et CROISOT exposaient une théorie des ($\mathfrak{T}$)-algèbres, qui apportait de nombreux résultats relatifs à la théorie des idéaux d'un anneau ou d'un demi-groupe non commutatif, ainsi qu'à celle des sous-modules d'un module sur un anneau non-commutatif (voir un exposé complet dans [4]). En 1964 et 1965, KURATA publiait deux articles dont une partie présentait trop de parallélisme avec la théorie des ($\mathfrak{T}$)-algèbres pour ne pas lui être intimement liée. Plus précisément, les deux exemples de KURATA sont exactement deux exemples de ($\mathfrak{T}$)-algèbres dans lesquelles on aurait supprimé certains axiomes d'associativité. D'où cet exposé sur les " ($\mathfrak{T}$)-algèbres non associatives", dont le but est de rendre compte des propriétés des ($\mathfrak{T}$)-algèbres qui subsistent après suppression des axiomes d'associativité.

Dans une première partie, nous donnons la définition d'une ($\mathfrak{T}$)-algèbre non associative et ses premières propriétés. Cette partie se déduit, avec peu de modifications, de [4] (p. 25 et suivantes) ; nous renvoyons donc à cet ouvrage pour des commentaires et pour les démonstrations.

Dans une deuxième partie, nous étudions la "théorie tertiaire". Nous donnons uniquement des énoncés de définitions et théorèmes, car cette partie de la théorie de LESIEUR et CROISOT était déjà une théorie non associative, bien que cela ne soit pas explicitement dit dans leur ouvrage (pour plus de précisions, voir donc [4], p. 66 et suivantes) ; dans leur partie tertiaire, les deux exemples de KURATA ne sont que des cas particuliers de cette théorie.

Dans la troisième partie, nous étudions la "théorie primaire" ; il est remarquable que de nombreuses propriétés subsistent de cette théorie, mais au moyen de démonstrations nouvelles, car la suppression de l'axiome d'associativité supprime certains modes de raisonnement et certains liens qui existaient entre la théorie primaire et la théorie tertiaire. Dans ce chapitre, nous sommes donc amenés à refaire un certain nombre de démonstrations, qui sont souvent directement inspirées de ce qui a été fait à ce sujet, dans leur cas particulier, par BEHRENS d'abord, puis par KURATA.

I. Définition et premières propriétés d'une $(\mathcal{T})$-algèbre non associative.

1. Définition (voir [4], p. 25 et suivantes).

Une $(\mathcal{T})$-algèbre (L) est constituée par deux treillis $(\mathcal{T})$ et (L) satisfaisant aux axiomes suivants :

Axiome (A) : $(\mathcal{T})$ est un groupoïde réticulé, quasi-entier, complet ;

Axiome (B) : (L) est un treillis complet ;

Axiome (C) : Les éléments de $(\mathcal{T})$ sont opérateurs dans (L),

$$(\mathcal{T}) \times (L) \to (L) : (\alpha , X) \longmapsto \alpha X , \quad \text{avec } \alpha X \subseteq X , \quad OX = O .$$

Double distributivité généralisée :

$$\begin{cases} (\sum_{i\in I} \alpha_i)X = \sum(\alpha_i X) , \\ \alpha(\sum_{i\in I} X_i) = \sum(\alpha X_i) . \end{cases}$$

Notations. - Dans $(\mathcal{T})$: Elément nul $= 0$, Elément universel $= \mathcal{E}$; dans (L), on les note : O et U.

Pour retrouver la théorie des $(\mathcal{T})$-algèbres associatives, on doit ajouter deux axiomes d'associativité d'importance très inégale :

(a) Associativité de la loi de $(\mathcal{T})$:

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \quad ;$$

(b) Associativité mixte :

$$\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X \quad .$$

C'est surtout la deuxième associativité qui est importante, car elle exprime que les deux tables de multiplication, que l'on peut écrire, ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, ce qui est le cas dans une théorie non associative.

De plus, presque toute la théorie des $(\mathcal{T})$-algèbres de LESIEUR et CROISOT est valable en supprimant (a).

Exemples de $(\mathcal{T})$-algèbres :

1° $(\mathcal{T}) = (L) =$ ensemble des sous-groupes normaux d'un groupe (KURATA).

2° $(\mathcal{T}) = (L) =$ ensemble des idéaux bilatères d'un anneau non associatif (BEHRENS et KURATA).

3° $(\mathcal{T})$ = ensemble des idéaux bilatères d'un anneau non associatif.

(L) = ensemble des idéaux à gauche d'un anneau non associatif.

2. Premières propriétés. Résiduation.

Notion de résiduel : Conséquence immédiate de l'axiome (C).

X et Y étant donnés dans (L) , l'ensemble des éléments $\mathfrak{a}$ de $(\mathcal{T})$ tels que $\mathfrak{a}Y \subseteq X$ possède un élément maximum noté $X \mathbin{{}^{\cdot}{.}} Y$, appelé résiduel à gauche de X par Y .

$X \in (L)$, $\mathfrak{a} \in (\mathcal{T})$, alors $\{Y \in (L) \ , \ \mathfrak{a}Y \subseteq X\}$ a un plus grand élément noté $X \mathbin{{.}^{\cdot}} \mathfrak{a}$.

Formulaire.

1° Définition.

$$\mathfrak{a} \subseteq X \mathbin{{}^{\cdot}{.}} Y \iff \mathfrak{a}Y \subseteq X \iff Y \subseteq X \mathbin{{.}^{\cdot}} \mathfrak{a} \ ,$$

$$\mathfrak{a}X \subseteq X \iff X \subseteq X \mathbin{{.}^{\cdot}} \mathfrak{a} \ .$$

2° Résiduation et relation d'ordre.

$$X \subseteq X' \implies X \mathbin{{}^{\cdot}{.}} Y \subseteq X' \mathbin{{}^{\cdot}{.}} Y \quad \text{et} \quad X \mathbin{{.}^{\cdot}} \mathfrak{a} \subseteq X' \mathbin{{.}^{\cdot}} \mathfrak{a} \ ,$$

$$Y \subseteq Y' \implies X \mathbin{{}^{\cdot}{.}} Y \supseteq X \mathbin{{}^{\cdot}{.}} Y' \ ,$$

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}' \implies X \mathbin{{.}^{\cdot}} \mathfrak{a} \supseteq X \mathbin{{.}^{\cdot}} \mathfrak{a}' \ .$$

Si on ajoute au deuxième membre de ces propositions l'hypothèse " Y est un résiduel à droite de X " (respectivement " $\mathfrak{a}$ est un résiduel à gauche de X "), on a même la propriété réciproque (qui sera conséquence de formules ci-après) :

$$\Big(\bigcap_{i \in I} X_i\Big) \mathbin{{.}^{\cdot}} \mathfrak{a} = \bigcap_{i \in I} (X_i \mathbin{{.}^{\cdot}} \mathfrak{a}) \ ,$$

$$\Big(\bigcap_{i \in I} X_i\Big) \mathbin{{}^{\cdot}{.}} Y = \bigcap_{i \in I} (X_i \mathbin{{}^{\cdot}{.}} Y) \ ,$$

$$X \mathbin{{}^{\cdot}{.}} \sum Y_i = \bigcap (X \mathbin{{}^{\cdot}{.}} Y_i) \ ,$$

$$X \mathbin{{.}^{\cdot}} \Big(\sum \mathfrak{a}_i\Big) = \bigcap (X \mathbin{{.}^{\cdot}} \mathfrak{a}_i) \ .$$

3° Résiduations successives.

$$\begin{cases} \mathfrak{a} \subseteq X \mathbin{{}^{\cdot}{.}} (X \mathbin{{.}^{\cdot}} \mathfrak{a}) \ , \\ \text{égalité} \iff \mathfrak{a} \text{ est un résiduel à gauche de } X \ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y \subseteq X \,\dot{:}\, (X \,\dot{\cdot}\, Y) \ , \\ \text{égalité} \iff Y \text{ est un résiduel à droite de } X \ , \end{cases}$$

$$(X \,\dot{:}\, \alpha_1) \,\dot{:}\, \alpha_2 \neq X \,\dot{:}\, \alpha_1 \alpha_2 \ .$$

Conséquences.

(a) Cette formule, valable avec l'hypothèse d'associativité mixte, n'est pas valable en général ;

(b) Un résiduel d'un résiduel de X n'est plus un résiduel de X .

4° Résiduel à gauche propre.

Définition. - $\mathcal{P} = X \,\dot{\cdot}\, Y$; $\mathcal{P}$ résiduel à gauche propre $\iff Y \not\subseteq X$.

$U \,\dot{\cdot}\, Y = \mathcal{E}$ n'est jamais un résiduel propre.

PROPOSITION 1. - Pour que $\alpha \in (\mathcal{T})$ soit un résiduel à gauche propre de X , il faut et il suffit que

$$X \,\dot{\cdot}\, (X \,\dot{:}\, \alpha) = \alpha \ , \qquad \text{avec} \quad X \,\dot{:}\, \alpha \supset X \ .$$

PROPOSITION 2. - $X \,\dot{:}\, \alpha \supset X \iff \alpha$ est contenu dans un résiduel à gauche propre de X .

Axiome (D) : Condition de chaîne sur les résiduels : L'ensemble des résiduels à gauche et l'ensemble des résiduels à droite de tout élément X de L vérifient la condition de chaîne ascendante.

Propriété (cf. résiduations successives). - Une condition de chaîne sur les résiduels d'un côté entraîne l'autre condition de chaîne sur les résiduels de l'autre côté.

Exemples : L'axiome (D) est vérifié, en particulier, dans l'un ou l'autre des cas importants suivants :

1° $(\mathcal{T})$ et (L) vérifient la condition de chaîne ascendante ;

2° $(\mathcal{T})$ et (L) vérifient la condition de chaîne descendante ;

3° $(\mathcal{T})$ vérifie les deux conditions de chaîne ;

4° (L) vérifie les deux conditions de chaîne.

Conséquence de l'axiome (D). - Tout élément X de (L) , $X \neq U$, possède au moins un résiduel à gauche propre maximal

$$\mathcal{P} = X \mathbin{{}^{\cdot}{}_{\cdot}} Y \ .$$

Nous verrons plus tard, sous l'hypothèse d'une condition de chaîne pour (L), que les résiduels propres maximaux d'un élément X de (L) sont en nombre fini. La proposition 2 s'écrit alors

$X \mathbin{{}_{\cdot}{}^{\cdot}} \mathfrak{A} \supsetneq X \iff \mathfrak{A}$ est contenu dans un résiduel à gauche propre maximal de X.

II. Théorie tertiaire (cf. [4], p. 66 et suivantes).

A. Radical tertiaire, élément tertiaire.

1. Hypothèse : (H_1) Axiomes (A), (B), (C), (D).

DÉFINITION 1. – Résiduel essentiel :

$\mathcal{P} \in (\mathcal{T})$, $\mathcal{P}$ est un résiduel essentiel de X

$$\iff \exists\, Y \supsetneq X \text{ avec } \mathcal{P} = X \mathbin{{}^{\cdot}{}_{\cdot}} Y \text{ et } X \subset Z \subseteq Y \implies X \mathbin{{}^{\cdot}{}_{\cdot}} Z = X \mathbin{{}^{\cdot}{}_{\cdot}} Y \ .$$

DÉFINITION 2. – Résiduel pseudo-essentiel :

$\mathcal{P} \in (\mathcal{T})$, $\mathcal{P}$ est un résiduel pseudo-essentiel de X

$$\iff \exists\, Y \nsubseteq X \text{ avec } \mathcal{P} = X \mathbin{{}^{\cdot}{}_{\cdot}} Y \text{ et } Z \subseteq Y,\ Z \nsubseteq X \implies X \mathbin{{}^{\cdot}{}_{\cdot}} Z = X \mathbin{{}^{\cdot}{}_{\cdot}} Y \ .$$

2. Existence de tels éléments.

U n'a pas de résiduel essentiel, ni de résiduel pseudo-essentiel.

Pour tout $X \neq U$, l'existence de tels résiduels résulte de la proposition suivante.

PROPOSITION 1.

$\mathcal{P}$ résiduel à gauche propre maximal de $X \implies \mathcal{P}$ résiduel essentiel de X.

$\mathcal{P}$ résiduel essentiel de $X \implies \mathcal{P}$ résiduel pseudo-essentiel de X.

PROPOSITION 2. – Si (L) est modulaire, alors tout résiduel pseudo-essentiel de X est un résiduel essentiel de X.

Exemples : Dans tous les exemples donnés plus haut, (L) est modulaire.

Pour la suite, nous faisons l'hypothèse que la $(\mathcal{T})$-algèbre (L) vérifie la propriété suivante :

3. *Hypothèse* : (H_2) $\mathcal{P}$ *résiduel essentiel de* $X \iff \mathcal{P}$ *résiduel pseudo-essentiel de* X .

THÉORÈME 1. - *Soit* $X \in L$. *On considère les ensembles suivants* :

$$\mathfrak{F} = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{T} \ , \ X \mathbin{.^{\cdot}} \mathfrak{A} \cap \mathcal{C} = X \implies \mathcal{C} = X\} \ ,$$

$$\mathfrak{F}' = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{T} \ , \ X \mathbin{.^{\cdot}} \mathfrak{A} \cap \mathcal{C} \subseteq X \implies \mathcal{C} \subseteq X\} \ ,$$

alors $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ *est une section commençante d'élément maximum*

$$\mathcal{R}_3(X) = \bigcap \text{ résiduels essentiels de } X \ .$$

LEMME. - *Soit* $X \mathbin{^{\cdot}.} \mathcal{C}$ *un résiduel propre, alors il existe* $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ *tel que* $X \mathbin{^{\cdot}.} \mathcal{C}'$ *soit un résiduel essentiel.*

DÉFINITION 3. - L'élément $\mathcal{R}_3(X)$, mis en évidence dans le théorème 1, s'appelle le *radical tertiaire de* X .

PROPOSITION 3. - $\mathcal{R}_3(X_1 \cap \ldots \cap X_n) \supseteq \mathcal{R}_3(X_1) \cap \ldots \cap \mathcal{R}_3(X_n)$, *et, en général, on n'a pas l'égalité.*

DÉFINITION 4. - Soit $Q \in (L)$, $Q \neq U$, Q *est dit tertiaire* s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1° $\mathfrak{A}X \subseteq Q$, $X \not\subseteq Q \implies \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{R}_3(Q)$;
2° $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathcal{R}_3(Q) \implies Q \mathbin{.^{\cdot}} \mathfrak{A} = Q$;
3° $Q \mathbin{.^{\cdot}} \mathfrak{A} \supset Q$ et $(Q \mathbin{.^{\cdot}} \mathfrak{A}) \cap X = Q \implies X = Q$;
4° $Q \mathbin{.^{\cdot}} \mathfrak{A} \supset Q$ et $(Q \mathbin{.^{\cdot}} \mathfrak{A}) \cap X \subseteq Q \implies X \subseteq Q$;
5° Tout résiduel à gauche propre de Q est contenu dans $\mathcal{R}_3(Q)$;
6° Q admet un seul résiduel essentiel $\mathcal{P}$.

Si Q est tertiaire, $\mathcal{P} = \mathcal{R}_3(Q)$, et on dit que Q *est* $\mathcal{P}$-*tertiaire*; U sera dit $\mathcal{E}$-tertiaire.

4. *Existence d'éléments tertiaires.*

PROPOSITION 4. - *Tout élément* $\cap$-*irréductible de* (L) *est tertiaire.*

B. Décompositions tertiaires.

1. Décomposition réduite.

Si $X = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ est une décomposition de $X \in (L)$ en intersection d'éléments Q_i qui soient $\mathcal{P}_i$-tertiaires $(i = 1, \ldots, n)$, cette décomposition est dite réduite si aucun Q_i n'est superflu et si les $\mathcal{P}_i$ sont tous distincts.

2. Existence de décompositions réduites.

Pour obtenir un théorème d'existence, nous supposons que la $(\mathcal{C})$-algèbre (L) vérifie l'hypothèse suivante :

3. Hypothèse : (H_3) (L) vérifie la condition de chaîne ascendante, ou bien; (L) vérifie la condition de chaîne descendante, et L est faiblement $\cap$-continu.

THÉORÈME 2. - Pour tout $X \neq U$, il existe au moins une décomposition réduite comme intersection d'un nombre fini d'éléments tertiaires.

Ce théorème est conséquence des propriétés suivantes :

(a) Proposition II.4 : Tout élément $\cap$-irréductible de (L) est tertiaire.

(b) Si $Q \neq U$, $Q \in L$ et $\mathcal{P} \in (\mathcal{C})$ sont tels que l'on ait

$$\mathfrak{a}X \subseteq Q \ , \quad X \nsubseteq Q \implies \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P} \ ,$$

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}_3(Q) \ ,$$

alors Q est $\mathcal{P}$-tertiaire.

(c) L'intersection d'un nombre fini d'éléments $\mathcal{P}$-tertiaires est $\mathcal{P}$-tertiaire.

4. Unicité des décompositions réduites.

THÉORÈME 3. - Soient deux décompositions réduites d'un même élément $X \in (L)$ comme intersection d'éléments tertiaires

$$X = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n = Q'_1 \cap \ldots \cap Q'_{n'} \ ,$$

on a $n = n'$, et les éléments $\mathcal{P}_i$ associés aux Q_i sont les mêmes que les éléments $\mathcal{P}'_j$ associés aux Q'_j.

LEMME. - Soient Q un élément $\mathcal{P}$-tertiaire, et Q' un élément $\mathcal{P}'$-tertiaire de (L). Si $\mathcal{P} \nsubseteq \mathcal{P}'$, alors la relation

$$A = Q \cap X = Q' \cap X' \quad \underline{\text{entraîne}} \quad A = X \cap X' \ .$$

5. Lien entre les résiduels essentiels d'un élément X de (L) et sa décomposition tertiaire.

THÉORÈME 4. - Les résiduels essentiels de X coïncident avec les éléments $\mathcal{P}_i$ associés aux éléments tertiaires Q_i d'une décomposition réduite de X comme intersection d'éléments tertiaires.

PROPOSITION 5. - Soient $\mathcal{P}$ un résiduel essentiel de X , Y un élément satisfaisant à la définition II.1, et $X = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ une décomposition réduite de X comme intersection d'éléments tertiaires. Il existe un Q_i , et un seul, satisfaisant à

$$X = Q_i \cap Y \ ,$$

et l'on a $\mathcal{P} = \mathcal{P}_i$, si $\mathcal{P}_i$ est le radical tertiaire de Q_i .

COROLLAIRE 1. - Le radical tertiaire de X s'écrit $X = \mathcal{P}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_n$, où les éléments $\mathcal{P}_i$, en nombre fini, sont à la fois les résiduels essentiels de X et les radicaux attachés de manière unique aux décompositions réduites de X en éléments tertiaires.

COROLLAIRE 2. - Tout $X \neq U$ n'a qu'un nombre fini de résiduels propres maximaux.

6. Eléments composant $\mathcal{R}_3(X)$ dans les exemples de $(\mathcal{T})$-algèbres.

EXEMPLE 1 : Soient G un groupe, X un sous-groupe normal de G , (b) le sous-groupe normal engendré par b , $b \in G$;

$$\mathcal{R}_3(X) = \{a \in G \ ; \ b \notin X \implies \exists\, c \in (b) \ \text{tel que} \ c \notin X \ \text{et} \ \big((a) \, , \, (c)\big) \subseteq X\} \ .$$

EXEMPLE 2 : Soient A un anneau non associatif, $\mathfrak{X}$ un idéal bilatère de A ;

$$\mathcal{R}_3(\mathfrak{X}) = \{a \in A \ ; \ b \notin \mathfrak{X} \implies \exists\, c \in (b) \ \text{tel que} \ c \notin \mathfrak{X} \ \text{et} \ (a)(c) \subseteq \mathfrak{X}\} \ .$$

EXEMPLE 3 : Soient A un anneau non associatif, X un idéal à gauche de A ;

$$\mathcal{R}_3(X) = \{a \in A \ ; \ b \notin X \implies \exists\, c \in (b| \ \text{tel que} \ c \notin X \ \text{et} \ (a)(c| \subseteq X\} \ .$$

Pour les démonstrations des exemples 2 et 3, voir [4], p. 71, avec quelques modifications de détail évidentes. Pour l'exemple 1, la démonstration est tout-à-fait parallèle.

Remarque. - On constate que le $\mathcal{R}_3(X)$, trouvé dans l'exemple 1, coïncide exactement avec la définition du radical tertiaire de KURATA [2], d'où la coïncidence pour la notion d'élément tertiaire.

Dans l'exemple 2, le $\mathcal{R}_3(\mathfrak{X})$ coïncide avec la définition du radical tertiaire de [3], et la notion d'élément tertiaire introduite ici, quand les éléments de $(\mathcal{T})$ opèrent à gauche sur (L) , coïncide avec la définition d'élément "tertiaire à gauche" de [3].

Précisons que la théorie tertiaire, dans son ensemble, rend compte de propriétés relatives à la loi $(\mathcal{T}) \times (L)$, et n'a aucun rapport avec les propriétés de la loi $(\mathcal{T}) \times (\mathcal{T})$; en particulier, aucun rapport avec la notion d'élément premier dont nous parlons dans la suite ; ceci, évidemment, dans le cadre le plus général où $(\mathcal{T}) \neq (L)$.

III. Théorie primaire.

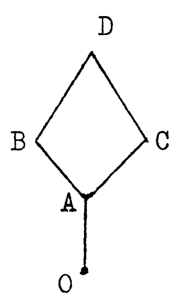
Hypothèse : $(\mathcal{T})$-algèbre (L) vérifiant (A) , (B), (C), (D).

A. Notion d'élément premier. Premières propriétés.

DÉFINITION 1. - $\mathcal{P} \in (\mathcal{T})$, $\mathcal{P}$ premier $\Longleftrightarrow$ $[\mathcal{B}\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{B}$ ou $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}]$.

Existence. - $\mathcal{E}$ est premier.

Exemple (I) : On peut donner un exemple de $(\mathcal{T})$-algèbre où $\mathcal{E}$ est unique élément premier : $(\mathcal{T}) = (L) =$ le treillis à 5 éléments suivant, muni de la table de multiplication



	O	A	B	C	D
O	O	O	O	O	O
A	O	O	O	O	O
B	O	O	A	O	A
C	O	A	A	A	A
D	O	A	A	A	A

.

Dans cet exemple, $\mathcal{E}$ est également unique élément semi-premier, au sens de la définition suivante.

DÉFINITION 2. - $\mathcal{P} \in (\mathcal{T})$, $\mathcal{P}$ semi-premier $\Longleftrightarrow$ $[\mathcal{B}^2 \subseteq \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}]$.

PROPOSITION 1. - $\mathcal{P} \in (\mathcal{T})$, $\mathcal{P}$ <u>premier</u> $\Longrightarrow$ $\mathcal{P}$ <u>semi-premier</u>.

$\mathcal{P}$ est un résiduel propre maximal $\not\Longrightarrow$ $\mathcal{P}$ est premier ,

$\mathcal{P}$ est un résiduel essentiel $\not\Longrightarrow$ $\mathcal{P}$ est premier ,

(et ceci contrairement aux résultats obtenus en supposant l'axiome d'associativité mixte).

<u>Exemple</u> (I) : Les résiduels propres de 0 sont $0 \therefore A = B$, $0 \therefore B = A$, $0 \therefore C = B$, $0 \therefore D = A$.

$B = 0 \therefore C$ est à la fois résiduel propre maximal et résiduel essentiel de 0 , et ce n'est pas un élément premier.

DÉFINITION 3. - $P_p^{\mu}(\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n)$ <u>est un produit de poids</u> p <u>et de type</u> μ :

Etant donnés $\mathfrak{a}_1 , \dots , \mathfrak{a}_n$, n éléments distincts ou non de $(\mathcal{T})$, et p entier $\geqslant n$, on appelle produit de poids p , tout produit obtenu au moyen de p facteurs pris parmi $\mathfrak{a}_1 , \dots , \mathfrak{a}_n$, chaque $\mathfrak{a}_i$ figurant effectivement une fois au moins dans le produit. Pour distinguer entre eux tous les produits de poids p , on associe, par définition, à chacun son type qui rend compte de l'ordre des facteurs et de la disposition des parenthèses.

PROPOSITION 2. - $\mathcal{P}$ <u>premier</u>,

$$P_p^{\mu}(\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n) \subseteq \mathcal{P} \quad ;$$

<u>alors</u>, $\exists\, i$, $i \in \{1 , \dots , n\}$, <u>tel que</u> $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathcal{P}$.

COROLLAIRE. - $\mathfrak{a}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_n \subseteq \mathcal{P} \Longrightarrow \exists\, i$, $i \in \{1 , \dots , n\}$, <u>tel que</u> $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathcal{P}$.

B. Radical primaire.

DÉFINITION 4. - Soit $X \in (L)$; on pose $r(X) = \cap$ éléments premiers contenant $X \therefore U$, et on l'appelle radical primaire de X . Il existe toujours, et peut être égal à $\mathcal{E}$ pour tout $X \in (L)$.

PROPOSITION 3. - $X \subseteq X' \Longrightarrow r(X) \subseteq r(X')$.

PROPOSITION 4. - <u>Quel que soit un nombre fini d'éléments</u> $X_1 , \dots , X_n$ <u>de</u> (L) , <u>on a</u>

$$r(X_1 , \dots , X_n) = r(X_1) \cap \dots \cap r(X_n) \quad .$$

Démonstration.

1° $X_1 \cap \dots \cap X_n \subseteq X_i$ $(\forall\ i = 1 , \dots , n)$ entraîne

$$r(X_1 \cap \dots \cap X_n) \subseteq r(X_1) \cap \dots \cap r(X_n) \quad .$$

2° Soit $\wp$ premier contenant $(X_1 \cap \dots \cap X_n) \ddots U = (X_1 \ddots U) \cap \dots \cap (X_n \ddots U)$, alors $\exists\ i$, $i \in \{1 , \dots , n\}$, tel que $\wp \supseteq X_i \ddots U$, donc

$\wp \supseteq r(X_i) \supseteq r(X_1) \cap \dots \cap r(X_n)$ et $r(X_1 \cap \dots \cap X_n) \supseteq r(X_1) \cap \dots \cap r(X_n)$.

THÉORÈME 1. - *Soit un treillis* $(\mathfrak{T})$ *satisfaisant l'axiome* (A). *Soit* $\mathfrak{J} \in (\mathfrak{T})$. *Alors il existe un élément premier minimal de* $(\mathfrak{T})$ *contenant* $\mathfrak{J}$.

THÉORÈME 1 *bis*. - *Sous les mêmes hypothèses, et avec* $\wp$ *premier*, $\wp \supseteq \mathfrak{J}$, *il existe alors un élément premier minimal* $\wp_0$ *tel que* $\wp \supseteq \wp_0 \supseteq \mathfrak{J}$.

Démonstration. - Les deux théorèmes résultent du fait que l'ensemble $\mathfrak{F}$ suivant est inductif, pour la relation d'inclusion vers le bas $\supseteq$,

$$\mathfrak{F} = \{\text{éléments premiers } \supseteq \mathfrak{J}\} , \qquad \mathfrak{F} \neq \Phi , \text{ car } \mathcal{E} \in \mathfrak{F} \quad .$$

Soit $\mathfrak{S}$ un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{S} = \{\wp_i , \ i \in I\}$.

$$\wp = \bigcap_{i \in I} \wp_i \quad ,$$

qui est la borne inférieure de $\mathfrak{S}$ dans $(\mathfrak{T})$, est aussi borne inférieure de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{F}$. En effet, $\wp$ contient $\mathfrak{J}$, et $\wp$ est premier, car, si $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ sont deux éléments de $(\mathfrak{T})$ tels que $\mathfrak{B} \not\subseteq \wp$, $\mathfrak{C} \not\subseteq \wp$, alors il existe i_1 et $i_2 \in I$ tels que $\mathfrak{B} \not\subseteq \wp_{i_1}$ et $\mathfrak{C} \not\subseteq \wp_{i_2}$. $\wp_{i_1}$ et $\wp_{i_2}$ sont comparables. Supposons, par exemple, $\wp_{i_1} \subseteq \wp_{i_2}$, alors $\mathfrak{B} \not\subseteq \wp_{i_1}$ et $\mathfrak{C} \not\subseteq \wp_{i_1}$, donc $\mathfrak{B}\mathfrak{C} \not\subseteq \wp_{i_1}$, d'où

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C} \not\subseteq \wp = \bigcap_{i \in I} \wp_i \quad .$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - $r(X) = \bigcap$ *éléments premiers minimaux contenant* $X \ddots U$.

THÉORÈME 2. - *Soit* $(\mathfrak{T})$ *un treillis vérifiant l'axiome* (A) *et la condition de chaîne ascendante. Soit* $\mathfrak{J} \in (\mathfrak{T})$, *alors les éléments premiers minimaux contenant* $\mathfrak{J}$ *sont en nombre fini.*

COROLLAIRE. - Soit une $(\mathcal{T})$-algèbre (L) telle que $(\mathcal{T})$ satisfait la condition de chaîne ascendante, alors

$$r(X) = \mathcal{P}_1 \cap \dots \cap \mathcal{P}_n \quad ,$$

où les $\mathcal{P}_i$, $i = 1, \dots, n$, désignent les éléments premiers minimaux contenant $X \cdot\!\!\cdot\, U$.

Démonstration. - Soit

$$\mathfrak{F} = \{\text{éléments premiers minimaux contenant } \mathfrak{J}\} = \{\mathcal{P}_i \, , \quad i \in I\} \quad ,$$

$\mathfrak{F} \neq \Phi$, d'après le théorème 1.

Supposons que $\mathfrak{F}$ admet une infinité d'éléments, alors $\mathfrak{J}$ n'est pas premier, il existe $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ tels que

$$\mathcal{B} \not\subseteq \mathfrak{J} \, , \qquad \mathcal{C} \not\subseteq \mathfrak{J} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{J} \quad .$$

$$(\mathfrak{J} + \mathcal{B})(\mathfrak{J} + \mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{J} \subseteq \mathcal{P}_i \, , \qquad \forall \, i \in I \quad ;$$

l'un au moins des éléments $\mathfrak{J} + \mathcal{B}$, $\mathfrak{J} + \mathcal{C}$ est contenu dans une infinité de $\mathcal{P}_i$, soit $\mathfrak{J}_1$ cet élément. On a $\mathfrak{J} \subsetneq \mathfrak{J}_1$, et les $\mathcal{P}_i$ qui contiennent $\mathfrak{J}_1$ sont exactement les éléments premiers minimaux contenant $\mathfrak{J}_1$, et ils sont une infinité. On recommence de même avec $\mathfrak{J}_1$. On obtient ainsi une chaîne infinie strictement croissante d'éléments de $(\mathcal{T})$, ce qui est impossible.

THÉORÈME 3. - Soit un treillis $(\mathcal{T})$ vérifiant l'axiome (A) et la condition maximale, soit $\mathfrak{J} \in (\mathcal{T})$, soient $\mathcal{P}_1 , \dots , \mathcal{P}_n$ les éléments premiers minimaux contenant $\mathfrak{J}$. Alors, il existe $\mathcal{P}_{i_1} , \dots , \mathcal{P}_{i_m}$, $1 \leqslant i_k \leqslant n$, $m \leqslant n$, et un certain produit

$$P(\mathcal{P}_{i_1} , \dots , \mathcal{P}_{i_m}) \qquad \text{tel que} \qquad P(\mathcal{P}_{i_1} , \dots , \mathcal{P}_{i_m}) \subseteq \mathfrak{J} \quad .$$

Démonstration. - Soit

$$\mathfrak{F} = \{\text{éléments } \mathfrak{J} \text{ de } (\mathcal{T}) \text{ qui ne vérifient pas le théorème}\} \quad .$$

Supposons $\mathfrak{F}$ non vide : il admet donc un élément maximal $\mathfrak{J}$.

$\mathfrak{J}$ n'est pas premier. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ tels que $\mathcal{B} \not\subseteq \mathfrak{J}$, $\mathcal{C} \not\subseteq \mathfrak{J}$, $\mathcal{B}\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{J}$, on a

$$(\mathcal{B} + \mathfrak{J})(\mathcal{C} + \mathfrak{J}) \subseteq \mathfrak{J} \quad .$$

Appliquons le théorème 2 : soient

$\mathcal{P}'_1 , \dots , \mathcal{P}'_r$ les éléments premiers minimaux contenant $\mathcal{B} + \mathfrak{J}$,

$\mathcal{P}''_1 , \dots , \mathcal{P}''_s$ les éléments premiers minimaux contenant $\mathcal{C} + \mathfrak{J}$,

$\mathfrak{J} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{J} + \mathfrak{C}$ n'appartiennent pas à $\mathfrak{F}$, car ils contiennent strictement $\mathfrak{J}$; il existe un produit

$$P'(\mathfrak{P}'_{j_1} , \ldots , \mathfrak{P}'_{j_u}) \subseteq \mathfrak{B} + \mathfrak{J} \quad ,$$

et un produit

$$P''(\mathfrak{P}''_{k_1} , \ldots , \mathfrak{P}''_{k_v}) \subseteq \mathfrak{C} + \mathfrak{J} \quad ,$$

d'où

$$P'(\mathfrak{P}'_{j_1} , \ldots , \mathfrak{P}'_{j_u}) \, P''(\mathfrak{P}''_{k_1} , \ldots , \mathfrak{P}''_{k_v}) \subseteq \mathfrak{J} \quad .$$

D'autre part, $\mathfrak{P}'_{j_x}$ et $\mathfrak{P}''_{k_y}$ sont des éléments premiers de $(\mathfrak{T})$ contenant $\mathfrak{J}$, ils contiennent donc des éléments premiers minimaux contenant $\mathfrak{J}$, soit $\mathfrak{P}_{j_x}$ et $\mathfrak{P}_{k_y}$ $(x = 1 , \ldots , u , \; y = 1 , \ldots , v)$, et, pour ces éléments, on a

$$P'(\mathfrak{P}_{j_1} , \ldots , \mathfrak{P}_{j_u}) \, P''(\mathfrak{P}_{k_1} , \ldots , \mathfrak{P}_{k_v}) \subseteq \mathfrak{J} \quad ,$$

ce qui contredit l'hypothèse que $\mathfrak{J} \in \mathfrak{F}$, donc $\mathfrak{F} = \Phi$.

THÉORÈME 4 (Corollaire du théorème 3). - Soit une $(\mathfrak{T})$-algèbre (L) , telle que $(\mathfrak{T})$ satisfait la condition maximale. Soit $X \in (L)$, alors il existe une certaine puissance de $r(X)$ contenue dans $X \,\dot{.}\, U$,

$$P_p^{\mu}[r(X)] \subseteq X \,\dot{.}\, U \quad .$$

On peut préciser le théorème 4 en introduisant un type particulier de puissance dans $(\mathfrak{T})$: $\mathfrak{a}^{(n)}$, " $\mathfrak{a}$ dérivé d'ordre n ", puissance de $\mathfrak{a}$ de poids 2^n , défini par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathfrak{a}^{(0)} = \mathfrak{a} \quad , \\ \mathfrak{a}^{(n)} = \mathfrak{a}^{(n-1)} \, \mathfrak{a}^{(n-1)} \quad . \end{cases}$$

THÉORÈME 4 bis. - Sous les mêmes hypothèses, et avec $X \in (L)$, il existe alors n tel que $[r(X)]^{(n)} \subseteq X \,\dot{.}\, U$.

Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante.

PROPOSITION 5. - Tout produit de poids $n \geqslant 1$, $P_n(\mathfrak{a})$, contient $\mathfrak{a}^{(n-1)}$.

Démonstration. - Elle se fait par récurrence sur n .

Si $n = 1$, la propriété est trivialement vérifiée.

On suppose la propriété vraie pour tout produit de poids $\leqslant n - 1$, alors tout produit de poids n s'écrit

$$P_n(\mathfrak{a}) = \mathcal{P}_{n_1}(\mathfrak{a})\, \mathcal{P}_{n_2}(\mathfrak{a}) \ , \qquad \text{où } n_1 + n_2 = n \ , \quad n_1 \geqslant 1 \ , \quad n_2 \geqslant 1 \ .$$

Supposons, par exemple, $n_1 \leqslant n_2$; alors,

$$\mathcal{P}_{n_1}(\mathfrak{a})\, \mathcal{P}_{n_2}(\mathfrak{a}) \supseteq \mathfrak{a}^{(n_1-1)}\, \mathfrak{a}^{(n_2-1)} \supseteq \mathfrak{a}^{(n_2-1)}\, \mathfrak{a}^{(n_2-1)} = \mathfrak{a}^{(n_2)} \supseteq \mathfrak{a}^{(n-1)} \ .$$

THÉORÈME 5. - Soit une $(\mathcal{C})$-algèbre (L) , telle que $(\mathcal{C})$ vérifie la condition maximale. Soit $X \in (L)$. Alors

$$\mathfrak{F} = \{\mathfrak{a} \in (\mathcal{C}) \ , \ \exists\, n \ \text{tel que} \ \mathfrak{a}^{(n)} \subseteq X \,\dot{\cdot}\, U\}$$

est une section commençante d'élément maximum $r(X)$.

Démonstration.

1° $\mathfrak{a} \subseteq r(X) \implies \exists\, n$ tel que $\mathfrak{a}^{(n)} \subseteq [r(X)]^{(n)} \subseteq X \,\dot{\cdot}\, U$.

2° Soit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$. Soit p tel que $\mathfrak{a}^{(p)} \subseteq X \,\dot{\cdot}\, U \subseteq r(X) = \mathcal{P}_1 \cap \dots \cap \mathcal{P}_n$. Pour $i = 1 , \dots , n$, on a

$$\mathfrak{a}^{(p)} \subseteq \mathcal{P}_i \implies \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P}_i \ ,$$

d'où $\mathfrak{a} \subseteq r(X)$.

C. Eléments primaires. Décompositions primaires.

DÉFINITION 5. - $Q \in L$, Q primaire $\iff$ Q vérifie une des propriétés équivalentes suivantes :

1° $\mathfrak{a}X \subseteq Q$, $X \nsubseteq Q \implies \mathfrak{a} \subseteq r(Q)$;

2° $\mathfrak{a} \nsubseteq r(Q) \implies Q \,\dot{:}\, \mathfrak{a} = Q$;

3° Tous les résiduels propres de Q sont contenus dans $r(Q)$.

Si $(\mathcal{C})$ vérifie la condition maximale, on a encore la propriété équivalente suivante :

4° $\mathfrak{a}X \subseteq Q$, $X \nsubseteq Q \implies \exists\, n$ tel que $\mathfrak{a}^{(n)} \subseteq Q \,\dot{\cdot}\, U$.

Dans tous les cas, on dit que Q est $r(Q)$-primaire.

Dans l'exemple (I), tout élément est $\mathcal{E}$-primaire.

PROPOSITION 6. - Si $Q \in (L)$ est primaire, alors $\mathcal{R}_3(Q) \subseteq r(Q)$.

En général, cette inclusion est stricte. De plus, pour un élément quelconque X de (L) , on ne peut donner aucune loi générale liant $\mathcal{R}_3(X)$ et $r(X)$.

PROPOSITION 7. - L'intersection d'un nombre fini d'éléments $\mathcal{P}$-primaires est $\mathcal{P}$-primaire.

Démonstration. - Soient Q_1 et Q_2 deux éléments $\mathcal{P}$-primaires, soit

$$Q = Q_1 \cap Q_2 , \qquad r(Q) = r(Q_1 \cap Q_2) = \mathcal{P} .$$

Soient $\mathfrak{a}$ et X tels que $\mathfrak{a}X \subseteq Q$ et $X \not\subseteq Q$. Soit i tel que $X \not\subseteq Q_i$; alors $\mathfrak{a}X \subseteq Q_i$, $X \not\subseteq Q_i$ entraîne $\mathfrak{a} \subseteq r(Q_i) = \mathcal{P}$, donc Q est bien $\mathcal{P}$-primaire.

DÉFINITION 6. - On appelle élément décomposable, tout élément X de (L) tel que X s'écrit comme intersection finie d'éléments primaires.

DÉFINITION 7. - La définition de la décomposition réduite est analogue à la définition tertiaire.

COROLLAIRE de la proposition 7. - Tout élément décomposable admet une décomposition réduite.

Nous nous proposons maintenant de démontrer les théorèmes suivants :

1° Unicité (en un certain sens) pour les décompositions primaires (Théorème 6).

2° Unicité des composants **fortement isolés** (Théorème 7).

3° Pour un élément X de (L) , supposé décomposable, lien entre les premiers minimaux de $(\mathcal{C})$, contenant $X \therefore U$, et les radicaux $r(Q_i)$, attachés à toute décomposition primaire de X (Théorème 8).

4° Condition nécessaire et suffisante pour que tout élément X de L soit décomposable (Théorème 9).

En attendant de pouvoir les démontrer, dans leur ensemble, dans le cas plus général d'une $(\mathcal{C})$-algèbre (L) , nous allons les démontrer dans le cas particulier de $(\mathcal{C})$-algèbre (L) , où $(\mathcal{C}) = (L)$.

Donc, à partir de maintenant, nous supposons partout que $(\mathcal{C}) = (L)$.

Un produit AB peut être considéré : soit comme un produit de deux éléments de $(\mathcal{C})$, soit comme le produit d'un élément de $(\mathcal{C})$ par un élément de (L) . Il vérifie toujours $AB \subseteq A \cap B$, d'où

$$A \subseteq A \therefore B , \qquad \forall B .$$

En particulier, $X \subseteq X \therefore U$, donc

$$X \subseteq r(X) .$$

De plus, les notions introduites présentent une symétrie parfaite, et on peut énoncer des résultats parallèles à gauche et à droite.

Nous garderons partout le point de vue d'éléments de $(\mathcal{C})$ opérant à gauche sur les éléments de (L) . D'où la notion de résiduel à gauche propre, d'élément primaire à gauche, etc.

PROPOSITION 8. - _Soient_ $X \in (L)$, $P \in (\mathcal{C}) = (L)$, $\mathcal{P}$ _premier, alors_

$$\mathcal{P} \supseteq X \iff \mathcal{P} \supseteq X \therefore U .$$

Démonstration.

1° $\mathcal{P} \supseteq X \therefore U \supseteq X$.

2° Posons $X \therefore U = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}U \subseteq X \subseteq \mathcal{P}$ premier, d'où $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}$.

COROLLAIRE 1.

$r(X)$ _est l'intersection des éléments premiers contenant_ $X \therefore U$.

$r(X)$ _est l'intersection des éléments premiers contenant_ X .

$r(X)$ _est le plus grand élément tel que_ : $\exists\, n$, $\mathfrak{A}^{(n)} \subseteq X \subseteq X \therefore U$.

COROLLAIRE 2. - _L'application_ $X \to r(X)$: $(L) \to (L)$ _vérifie les propriétés suivantes_ :

1° $r(X) \supseteq X$;

2° $X \subseteq Y \implies r(X) \subseteq r(Y)$;

3° $r(r(X)) = r(X)$;

4° $r(XY) = r(X \cap Y) = r(X) \cap r(Y)$.

LEMME. - X _admet une décomposition réduite_ $X = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ _où_ $n \geqslant 2$, _alors_ X _n'est pas primaire_.

Démonstration. - Pour tout $j \in \{1 , \dots , n\}$, nous avons

$$Q_j . \bigcap_{k \neq j} Q_k \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} Q_i = X .$$

La décomposition étant réduite,

$$\bigcap_{k \neq j} Q_k \not\subseteq Q_j ,$$

d'où

$$\bigcap_{k\neq j} Q_k \not\subseteq X \ .$$

Supposons X primaire, alors $Q_j \subseteq r(X)$, d'où

$$r(Q_j) \subseteq r(r(X)) = r(X) = \bigcap_{i=1}^{n} r(Q_i) \quad ,$$

d'où $r(Q_j) \subseteq r(Q_i)$, pour tout i et tout $j \in \{1 , \ldots , n\}$, ce qui est impossible, car les $r(Q_i)$ sont deux à deux distincts.

Remarque. - Cette technique de démonstration utilise très explicitement l'hypothèse $(\mathcal{E}) = (L)$.

THÉORÈME 6 (Théorème d'unicité). - Soient X un élément décomposable de (L) , et

$$X = Q_1 \cap \ldots \cap Q_m = Q'_1 \cap \ldots \cap Q'_n$$

deux décompositions réduites de X . Alors $n = m$, et il est possible de numéroter les composants de manière que $r(Q_i) = r(Q'_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant m = n$.

Démonstration par récurrence sur $\inf(m , n)$.

$m = 1$. Alors $Q_1 = Q'_1 \cap \ldots \cap Q'_n$ implique, grâce au lemme, $n = 1$. De même, $n = 1$ implique $m = 1$ et, dans ce cas, le théorème est trivialement vérifié.

$m > 1$, $n > 1$. Parmi les radicaux $r(Q_1) , \ldots , r(Q_m)$, $r(Q'_1) , \ldots , r(Q'_n)$, il existe un élément maximal, supposons par exemple que ce soit $r(Q_1)$, alors $r(Q_1) \neq r(Q_i)$, $\forall\, i = 2 , \ldots , m$, car la décomposition est réduite.

Supposons

$$r(Q_1) \neq r(Q'_j) , \qquad \forall\, j = 1 , \ldots , n \ .$$

Alors

$$Q_1 \not\subseteq r(Q_i) , \qquad i = 2 , \ldots , m \qquad (\text{sinon } r(Q_1) \subseteq r(r(Q_i)) = r(Q_i)\ ) \quad ,$$

de même

$$Q_1 \not\subseteq r(Q'_j) , \qquad j = 1 , \ldots , n \quad ,$$

d'où, puisque les Q_i et Q'_j sont primaires,

$$Q_i \mathrel{\dot{:}} Q_1 = Q_i , \qquad \forall\, i = 2 , \ldots , m \quad ,$$

$$Q'_j \mathrel{\dot{:}} Q_1 = Q'_j , \qquad \forall\, j = 1 , \ldots , n \quad ,$$

d'où

$$\begin{cases} X \mathbin{.\!\!\cdot} Q_1 = (Q_1 \cap \dots \cap Q_m) \mathbin{.\!\!\cdot} Q_1 = Q_2 \cap \dots \cap Q_m & (\text{car } Q_1 \mathbin{.\!\!\cdot} Q_1 = U)\ , \\ X \mathbin{.\!\!\cdot} Q_1 = (Q'_1 \cap \dots \cap Q'_n) \mathbin{.\!\!\cdot} Q_1 = Q'_1 \cap \dots \cap Q'_n = X\ . \end{cases}$$

Ceci contredit l'hypothèse que Q_1 n'est pas superflu.

Donc il existe un indice j , $j \in \{1, \dots, n\}$, tel que $r(Q_1) = r(Q'_j)$, et on peut supposer que $j = 1$, d'où

$$r(Q_1) = r(Q'_1)\ .$$

Supposons le théorème d'unicité vérifié pour les décompositions primaires dont le nombre de composants est $< \inf(m, n)$, et supposons par exemple $m \leqslant n$. Posons $Q = Q_1 \cap Q'_1$, Q est primaire de radical $r(Q) = r(Q_1) = r(Q'_1)$ (proposition 7), d'où, comme précédemment,

$$Q \not\geq r(Q_i)\ , \qquad i = 2, \dots, m\ ,$$

$$Q \not\geq r(Q'_j)\ , \qquad j = 2, \dots, n\ ,$$

et

$$Q_2 \cap \dots \cap Q_m = X \mathbin{.\!\!\cdot} Q = Q'_2 \cap \dots \cap Q'_n\ ,$$

d'où

$$Q_2 \cap \dots \cap Q_m = Q'_2 \cap \dots \cap Q'_n\ ,$$

et les deux décompositions sont réduites, d'où, par hypothèse de récurrence, $m - 1 = n - 1$ (d'où $m = n$) et, après un numérotage convenable,

$$r(Q_i) = r(Q'_i)\ , \qquad \text{pour } i = \{2, \dots, m = n\}\ ,$$

d'où le théorème, puisque nous avons déjà $r(Q_1) = r(Q'_1)$.

PROPOSITION 9. - Soit $X = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ une décomposition réduite d'un élément X de (L) décomposable. Soit

$$r(Q_i) = \bigcap_{k=1}^{n_i} P_{ik} = \cap \text{ éléments premiers minimaux} \supseteq Q_i \qquad (i = 1, \dots, n)\ ,$$

alors on a les implications suivantes

$$X \text{ vérifie } (1) \implies X \text{ vérifie } (2) \implies X \text{ vérifie } (3)\ ,$$

où (1), (2), (3) sont les propriétés suivantes :

(1) Pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe au moins un élément $P_{ik_i} = P^*_i$ tel que P^*_i ne contienne pas P_{jk} , et ceci pour tout $j \in \{m+1, \dots, n\}$ et tout k ;

(2) $\forall\, i \in \{1, \dots, m\}$, $r(Q_i)$ ne contient pas $Q_{m+1} \cap \dots \cap Q_n$;

(3) $\forall\, j \in \{m+1, \dots, n\}$, $r(Q_j) \not\subseteq r(Q_i)$, et ceci pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

DÉFINITION 8. – X vérifie (1) $\Longleftrightarrow$ $\{r(Q_1), \dots, r(Q_m)\}$ est un ensemble fortement isolé dans l'ensemble des radicaux associé à toute décomposition de l'élément X de (L) supposé décomposable (on dit plus brièvement un ensemble fortement isolé de X).

X vérifie (3) $\Longleftrightarrow$ $\{r(Q_1), \dots, r(Q_m)\}$ est un ensemble isolé de X.

Démonstration de la proposition 9.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : Supposons que X vérifie (1) et non (2). Soit i appartenant à $\{1, \dots, m\}$ tel que

$$r(Q_i) \supseteq Q_{m+1} \cap \dots \cap Q_n , \qquad r(Q_i) = P_{i1} \cap P_{i2} \cap \dots \cap P_{in_i} ,$$

et, par hypothèse, il existe $P_{ik_i} = P_i^*$ tel que P_i^* ne contienne aucun P_{jk}, $j \in \{m+1, \dots, n\}$.

Considérons P_i^* :

$$P_i^* \supseteq r(Q_i) \supseteq Q_{m+1} \cap \dots \cap Q_n ,$$

$$P_i^* \supseteq r(Q_i) \supseteq r(Q_{m+1} \cap \dots \cap Q_n) = r(Q_{m+1}) \cap \dots \cap r(Q_n) ,$$

$$P_i^* \supseteq \bigcap_{j=m+1}^{n} \Big(\bigcap_{k=1}^{n_j} P_{jk} \Big) , \qquad \text{avec } P_i^* \text{ premier} ,$$

donc $\exists\, j \in \{m+1, \dots, n\}$ et k tels que $P_i^* \supseteq P_{jk}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : Supposons que X vérifie (2) et non (3). Soient j appartenant à $\{m+1, \dots, n\}$ et i appartenant à $\{1, \dots, m\}$ tels que

$$r(Q_j) \subseteq r(Q_i) , \qquad r(Q_i) \supseteq r(Q_j) \supseteq Q_j \supseteq Q_{m+1} \cap \dots \cap Q_n ,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse que X vérifie (2).

THÉORÈME 7 (Unicité des composants fortement isolés). – Soient X un élément décomposable de (L), $X = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ une décomposition réduite,

$$\{r(Q_1), \dots, r(Q_m)\}$$

un ensemble fortement isolé de X. Alors $Q_1 \cap \dots \cap Q_m$ ne dépend que de $\{r(Q_1), \dots, r(Q_m)\}$, et non de la décomposition réduite particulière de X.

Démohstration. - Soient $X = Q_1 \cap \dots \cap Q_n = Q'_1 \cap \dots \cap Q'_n$, deux décompositions réduites avec $r(Q_i) = r(Q'_i)$, $i = 1 , \dots , n$. $\{(r(Q_1) , \dots , r(Q_m))\}$ vérifie (1), donc (2). Posons

$$Q = Q_{m+1} \cap \dots \cap Q_n \not\subseteq r(Q_i) = r(Q'_i) , \qquad \forall\, i = 1 , \dots , m ,$$

$$Q' = Q'_{m+1} \cap \dots \cap Q'_n \not\subseteq r(Q_i) , \qquad \forall\, i = 1 , \dots , m ,$$

d'où

$$Q_i \mathbin{.\!\!\raisebox{0.5ex}{.}} Q = Q_i , \qquad Q'_i \mathbin{.\!\!\raisebox{0.5ex}{.}} Q = Q'_i , \qquad \forall\, i = 1 , \dots , m ,$$

mais $Q_j \supseteq Q$, $\forall\, j = m + 1 , \dots , n$, donc $Q_j \mathbin{.\!\!\raisebox{0.5ex}{.}} Q = U$. D'où

$$X \mathbin{.\!\!\raisebox{0.5ex}{.}} Q = (Q_1 \cap \dots \cap Q_n) \mathbin{.\!\!\raisebox{0.5ex}{.}} Q = Q_1 \cap \dots \cap Q_m ,$$

$$X \mathbin{.\!\!\raisebox{0.5ex}{.}} Q = (Q'_1 \cap \dots \cap Q'_n) \mathbin{.\!\!\raisebox{0.5ex}{.}} Q = (Q'_1 \cap \dots \cap Q'_m) \cap (Q' \mathbin{.\!\!\raisebox{0.5ex}{.}} Q) ,$$

d'où

$$Q_1 \cap \dots \cap Q_m \subseteq Q'_1 \cap \dots \cap Q'_m ,$$

il en est de même de l'inclusion inverse en considérant $X \mathbin{.\!\!\raisebox{0.5ex}{.}} Q'$, d'où le théorème.

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> X <u>un élément décomposable de</u> (L) , <u>et</u>

$$r(Q_i) = \bigcap_{k=1}^{n_i} P_{ik}$$

<u>les radicaux associés à</u> X . <u>Soit</u> $P_{i_1k_1}$ <u>un élément minimal dans l'ensemble des</u> P_{ik} , <u>et soient</u> $P_{i_2k_2} , \dots , P_{i_pk_p}$ <u>les autres éléments</u> P_{ik} <u>éventuellement égaux à</u> $P_{i_1k_1}$.

<u>Alors</u>

$\{r(Q_{i_1}) , \dots , r(Q_{i_p})\}$ <u>est un ensemble fortement isolé de</u> X ,

<u>et</u>

$Q_{i_1} \cap \dots \cap Q_{i_p}$ <u>est indépendant de la décomposition réduite de</u> X .

THÉORÈME 8 (<u>Lien entre les éléments premiers minimaux de</u> $(\mathcal{T}) = (L)$ <u>contenant</u> X <u>décomposable, et les radicaux</u> $r(Q_i)$ <u>attachés à toute décomposition primaire de</u> X). - <u>Soient</u> X <u>un élément décomposable de</u> (L) , $r(Q_1) , \dots , r(Q_n)$ <u>les radicaux associés à</u> X <u>avec</u>

$$r(Q_i) = \bigcap_{k=1}^{n_i} P_{ik} , \qquad \forall\, i = 1 , \dots , n .$$

Les éléments premiers minimaux de (L) contenant X sont les éléments P_{ik} minimaux dans l'ensemble de tous les P_{ik} .

Démonstration. - Il existe un certain produit $\mathcal{P}_1 \dots \mathcal{P}_n \subseteq X$, où

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i(P_{i1} \dots P_{in_i}) \subseteq Q_i \ , \qquad \forall\, i = 1 , \dots , n \ ;$$

$\mathcal{P}_1 \dots \mathcal{P}_n$ est contenu dans X et fabriqué avec les P_{ik} .

Soit P premier $\supseteq X$, alors P contient un P_{ik} au moins, soit P_{rs} .

Soit P premier minimal $\supseteq X$, $P \supseteq P_{rs} \supseteq X$, avec P_{rs} premier, donc $P = P_{rs}$. De plus, P_{rs} est minimal dans l'ensemble des P_{ik} .

Réciproquement, soit P_{rs} minimal dans l'ensemble des P_{ik} . Alors

$$P_{rs} \supseteq r(Q_r) \supseteq Q_r \supseteq X \ .$$

De plus, P_{rs} est premier minimal contenant X (sinon,

$$P_{rs} \text{ premier non minimal } \supseteq X \implies P_{rs} \supset \text{premier minimal} \supseteq X \ ,$$

et ce premier minimal, d'après la partie directe, est un P_{uv} particulier).

THÉORÈME 9 (Condition nécessaire et suffisante pour que tout élément X de (L) soit décomposable). - Soit $(\mathcal{C}) = (L)$ satisfaisant la condition maximale. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Tout élément de (L) peut s'écrire comme l'intersection d'un nombre fini d'éléments primaires ;

(2) (L) possède la propriété d'Artin-Rees ;

(3) (L) possède la propriété P ;

(4) Tout élément tertiaire de (L) est primaire ;

(5) Tout élément $\cap$-irréductible est primaire,

avec les définitions suivantes.

DÉFINITION 8. - (L) possède la propriété d'Artin-Rees, si, pour deux éléments A et B de $(\mathcal{C})$ et tout entier $n \geqslant 0$, il existe un entier $h(n) \geqslant 0$ tel que

$$A^{(h(n))} \cap B \subseteq A^{(n)} B \ .$$

(L) possède la propriété P , si, pour deux éléments A et B de $(\mathcal{C})$, il existe un entier h tel que

$$A^{(h)} \cap B \subseteq AB \ .$$

(a) PROPOSITION 10. - $(\mathcal{T})$ <u>possède la propriété</u> P $\Longrightarrow$ <u>tout élément tertiaire de</u> (L) <u>est primaire</u>.

<u>Démonstration</u>. - Q <u>étant élément tertiaire de</u> (L), soit $\mathfrak{a}X \subseteq Q$, $X \nsubseteq Q$. Nous allons montrer que, pour un h convenable, $\mathfrak{a}^{(h)} \subseteq Q$ [d'où $\mathfrak{a} \subseteq r(Q)$, c'est-à-dire Q est $r(Q)$-primaire].

$$\mathfrak{a}X \subseteq Q\ ,\quad X \nsubseteq Q \Longrightarrow Q \mathbin{.\!\!:} \mathfrak{a} \supset Q \qquad (\text{car } X \subseteq Q \mathbin{.\!\!:} \mathfrak{a})\ .$$

On considère alors $Q \mathbin{.\!\!:} \mathfrak{a}$; d'après la propriété P, il existe h tel que

$$\mathfrak{a}^{(h)} \cap (Q \mathbin{.\!\!:} \mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}.(Q \mathbin{.\!\!:} \mathfrak{a}) \subseteq Q\ ,$$

Q étant tertiaire, on en déduit $\mathfrak{a}^{(h)} \subseteq Q$.

C. Q. F. D.

(b) PROPOSITION 11. - $(\mathcal{T}) = (L)$ <u>satisfait la condition maximale et tout élément est décomposable, alors</u> (L) <u>vérifie la propriété d'Artin-Rees</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soient A et B deux éléments de (L), et n un entier. On considère la décomposition primaire réduite,

$$A^{(n)}\,B = Q_1 \cap \dots \cap Q_m\ .$$

Si $B \subseteq Q_i$, pour $i = 1, \dots, m$, la proposition est trivialement vérifiée, car

$$A^{(n)} \cap B \subseteq B \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} Q_i = A^{(n)}\,B\ .$$

D'autre part, si pour au moins un i, on a $B \nsubseteq Q_i$, alors on peut supposer qu'il existe m' $(\leqslant m)$ tel que $B \nsubseteq Q_i$, pour $i \in \{1, \dots, m'\}$, et

$$A^{(n)}\,B = Q_1 \cap \dots \cap Q_{m'} \cap B\ ,$$

$$A^{(n)}\,B \subseteq Q_i\ , \qquad \forall\, i \in \{1, \dots, m'\}\ ,$$

où Q_i est primaire, donc pour tout i, il existe s_i tel que

$$[A^{(n)}]^{(s_i)} \subseteq Q_i\ .$$

Si on pose $s = \sup\{s_1, \dots, s_{m'}\}$, nous avons

$$A^{(n+s)} = (A^{(n)})^{(s)} \subseteq Q_i\ , \qquad \forall\, i = 1, \dots, m'\ ,$$

d'où

$$A^{(n+s)} \cap B \subseteq Q_1 \cap \dots \cap Q_{m'} \cap B = A^{(n)}\,B\ .$$

C. Q. F. D.

<u>Remarques sur le cas</u> $(\mathcal{C}) = (L)$.

(α) Tout élément premier $\mathcal{P}$ est à la fois $\mathcal{P}$-primaire et $\mathcal{P}$-tertiaire.

(β) Dans le cas où $\mathcal{E} = U$ **est seul élément** premier : tout élément est $\mathcal{E}$-primaire, et le théorème 9 est trivialement vérifié.

(γ) Dans le cas de $(\mathcal{C}) = (L)$ satisfaisant le théorème 9 : tout élément tertiaire est primaire ; une décomposition tertiaire réduite d'un élément X est aussi une décomposition primaire, mais celle-ci n'est pas nécessairement réduite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEHRENS (E.-A.). - Zur additiven Idealtheorie in nichtassoziativen Ringen, Math. Z., t. 64, 1956, p. 169-182.

[2] KURATA (Y.). - A decomposition of normal subgroups in a group, Osaka J. of Math., t. 1, 1964, p. 201-229.

[3] KURATA (Y.). - On an additive ideal theory in a non-associative ring, Math. Z., t. 88, 1965, p. 129-135.

[4] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).