Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Claude Joulain

Sur une décomposition des sous-groupes normaux dans un groupe, d'après Y. Kurata

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, n° 1 (1966-1967), exp. n° 6, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_1_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
20e année, 1966/67, n° 6

19 décembre 1966

SUR UNE DÉCOMPOSITION DES SOUS-GROUPES NORMAUX DANS UN GROUPE, D'APRÈS Y. KURATA

par Claude JOULAIN

Dans [1], Y. KURATA établit, pour les sous-groupes normaux d'un groupe satisfaisant à la condition maximale (pour les sous-groupes normaux), des résultats analogues à ceux obtenus par L. LESIEUR et R. CROISOT dans [2], [3] et [5] pour les idéaux bilatères d'un anneau noethérien. Dans le treillis des sous-groupes normaux d'un groupe, le produit AB et le commutateur $[A , B]$ de deux sous-groupes normaux jouent le rôle, respectivement, de la somme et du produit des idéaux bilatères dans un anneau. On a :

$$[A , BC] = [A , B][A , C] \qquad \text{et} \qquad [A , B] \subseteq A \cap B ,$$

mais l'associativité n'est pas vérifiée pour le commutateur et, contrairement au cas des idéaux bilatères d'un anneau, on n'obtient pas ici un demi-groupe réticulé. Néanmoins, certains résultats de la théorie noethérienne des anneaux sont conservés.

Y. KURATA introduit les notions de sous-groupe premier, de radical, de sous-groupe primaire, de radical tertiaire et de sous-groupe tertiaire. Dans le cas des groupes satisfaisant à la condition maximale (pour les sous-groupes normaux), il établit l'existence d'une décomposition tertiaire pour les sous-groupes normaux et, en appliquant la notion de propriété d'Artin-Rees de J. A. RILEY [7], il donne une condition nécessaire et suffisante pour que tout sous-groupe normal admette une décomposition primaire. Les trois dernières parties de [1] contiennent des théorèmes d'unicité pour les décompositions primaires et tertiaires.

1. Sous-groupes premiers. Radical.

On désignera par (a) le sous-groupe normal du groupe G, engendré par l'élément a de G.

DÉFINITION 1.1. - Un sous-groupe normal P de G est dit premier dans le groupe G s'il vérifie la propriété :

$$[(a) , (b)] \subseteq P \implies a \in P \quad \text{ou} \quad b \in P .$$

Une définition équivalente d'un sous-groupe premier est fournie par la propriété suivante, portant sur le commutateur de deux sous-groupes normaux.

PROPRIÉTÉ 1.1. - Pour qu'un sous-groupe normal P de G soit premier, il faut et il suffit qu'on ait :

$$[A , B] \subseteq P \implies A \subseteq P \text{ ou } B \subseteq P .$$

De cette propriété, on déduit, par récurrence sur le poids des commutateurs :

PROPRIÉTÉ 1.2. - Soient $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$, n sous-groupes normaux de G , et $C[A_1 , A_2 , \ldots , A_n]$ un commutateur de poids m , de composantes $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$. Si le sous-groupe premier P contient $C[A_1 , A_2 , \ldots , A_n]$, il contient l'un au moins des sous-groupes A_i .

COROLLAIRE. - Si le sous-groupe premier P contient l'intersection :

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

des sous-groupes normaux A_i , il contient l'un au moins des A_i .

Si P est un sous-groupe premier de G , son complémentaire $\complement(P)$ dans G est un m-système, conformément à la définition suivante :

DÉFINITION 1.2. - Un sous-ensemble M non vide de G est un m-système s'il vérifie la propriété :

$$m_1 \in M , \quad m_2 \in M \implies \exists\, m'_1 \in (m_1) , \quad m'_2 \in (m_2) \quad \text{avec} \quad [m'_1 , m'_2] \in M .$$

L'ensemble vide sera considéré comme m-système.

Il est évident qu'un sous-groupe normal de G est premier si, et seulement si, son complémentaire $\complement(P)$ dans G est un m-système.

DÉFINITION 1.3. - On appelle sous-groupe premier minimal contenant le sous-groupe normal A , un sous-groupe premier minimal dans l'ensemble des sous-groupes premiers contenant A .

LEMME 1.1. - Soient A un sous-groupe normal de G , et M un m-système ne rencontrant pas A . Il existe un sous-groupe premier P contenant A et ne rencontrant pas M .

Démonstration. - Si M est vide, il suffit de prendre $P = G$; on supposera donc M non vide. L'ensemble des sous-groupes normaux contenant A et ne rencontrant pas M n'est pas vide et c'est un ensemble inductif ; cet ensemble possède donc un élément maximal P ; montrons que P est premier.

Il suffit de démontrer que si B et C sont deux sous-groupes normaux de G, non contenus dans P, le sous-groupe normal $[PB , PC]$ n'est pas contenu dans P ; en effet, on a :

$$[PB , PC] = [P , P][P , C][B , P][B , C] .$$

B et C n'étant pas contenus dans P, on a $PB \supset P$ et $PC \supset C$; d'après le choix de P, il existe donc $b \in PB \cap M$ et $c \in PC \cap M$. M étant un m-système, il existe $b' \in (b)$ et $c' \in (c)$ tels que : $[b' , c'] \in M$ et, par suite, tels que $[b' , c'] \notin P$. Or, on a :

$$[b' , c'] \in [(b) , (c)] \subseteq [PB , PC] ;$$

il en résulte

$$[PB , PC] \not\subseteq P .$$

PROPRIÉTÉ 1.3. - <u>Pour qu'un sous-ensemble</u> P <u>du groupe</u> G <u>soit un sous-groupe premier minimal contenant le sous-groupe normal</u> A, <u>il faut et il suffit que son complémentaire</u> $\complement(P)$ <u>soit un</u> m-<u>système maximal dans l'ensemble des</u> m-<u>systèmes ne rencontrant pas</u> A.

<u>Démonstration</u>. - Supposons $M = \complement(P)$ maximal dans l'ensemble des m-systèmes ne rencontrant pas A. Si M est vide, $P = G$ est premier, et un sous-groupe premier distinct de G ne peut contenir A puisque son complémentaire est alors un m-système non vide rencontrant A. On peut donc supposer $M = \complement(P)$ non vide. D'après le lemme 1.1, A est contenu dans un sous-groupe premier P^* ne rencontrant pas M ; $\complement(P^*)$ est alors un m-système ne rencontrant pas A et contenant M. Le caractère maximal de M implique $M = \complement(P^*)$, et par conséquent $P = P^*$ est un sous-groupe premier contenant A. Montrons que P est minimal. Si P' est un sous-groupe premier tel que : $A \subseteq P' \subseteq P$, $\complement(P')$ est un m-système contenant $M = \complement(P)$ et ne rencontrant pas A ; il en résulte

$$\complement(P') = M \quad \text{et} \quad P' = P ;$$

Réciproquement, soit P un sous-groupe premier minimal contenant A. $M = \complement(P)$ est un m-système ne rencontrant pas A. L'ensemble des m-systèmes ne rencontrant pas A n'est pas vide, et c'est un ensemble inductif ; M est donc contenu dans un m-système M^* maximal parmi ceux qui ne rencontrent pas A. D'après la première partie de la démonstration, $P^* = \complement(M^*)$ est un sous-groupe premier contenant A, et $M \subseteq M^*$ entraine $P \supseteq P^*$, donc $P = P^*$. Il en résulte $M = M^*$.

Remarque. - A étant un sous-groupe normal de G, et P un sous-groupe premier contenant A, $\complement(P) = M$ est contenu dans un m-système M^*, maximal parmi ceux qui ne rencontrent pas A. $\complement(M^*) = P^*$ est un sous-groupe premier minimal contenant A et contenu dans P. On en déduit, en particulier, que pour tout sous-groupe normal A de G, il existe un sous-groupe premier minimal contenant A ce qui justifie la définition suivante :

DÉFINITION 1.4. - On appelle radical du sous-groupe normal A, et on note $r(A)$, l'intersection de tous les sous-groupes premiers minimaux contenant A. Si $r(A) = A$, on dit que A est un radical. Le radical de G est le radical du sous-groupe unité E de G.

En particulier, tout sous-groupe premier est un radical.

Il résulte immédiatement de la remarque précédente :

PROPRIÉTÉ 1.4. - Le radical $r(A)$ du sous-groupe normal A est l'intersection de tous les sous-groupes premiers contenant A.

Enfin, le radical $r(A)$ peut être caractérisé par ses éléments, grâce à la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 1.5. - Le radical $r(A)$ du sous-groupe normal A est l'ensemble des éléments x de G tels que tout m-système contenant x rencontre A.

Démonstration. - Soit $x \in r(A)$, et supposons qu'il existe un m-système contenant x et ne rencontrant pas A. M est contenu dans un m-système M^* maximal parmi ceux qui ne rencontrent pas A et $P^* = \complement(M^*)$ est un sous-groupe premier minimal contenant A (proposition 1.3.). On a $x \in M^*$, et par conséquent $x \notin P^*$, ce qui est contraire à $x \in r(A)$.

Réciproquement, soit $x \in G$ tel que tout m-système contenant x rencontre A et soit P un sous-groupe premier contenant A. $\complement(P)$ est un m-système ne rencontrant pas A ; il en résulte $x \notin \complement(P)$, d'où $x \in P$ et $x \in r(A)$.

Notons que la notion de radical d'un sous-groupe normal A d'un groupe G, ainsi définie par KURATA, est analogue à celle de radical d'un idéal bilatère d'un anneau, introduite par N. H. McCOY dans [6].

L'application $A \to r(A)$ vérifie les propriétés suivantes qu'on déduit facilement de la propriété 1.5 :

$$A \subseteq r(A) .$$

$$A \subseteq B \implies r(A) \subseteq r(B) .$$

$$r(r(A)) = r(A) .$$

$$r([A , B]) = r(A \cap B) = r(A) \cap r(B) .$$

Il résulte du corollaire de la propriété 1.2 qu'un sous-groupe premier est $\cap$-irréductible ([1]). Réciproquement, tout sous-groupe normal $\cap$-irréductible, égal à son radical, est premier ; en effet, soit $[B , C] \subseteq P$; alors :

$$[PB , PC] = [P , P][P , C][B , P][B , C] \subseteq P \subseteq PB \cap PC$$

et, d'après les propriétés de l'application $A \to r(A)$:

$$P = r(P) \subseteq r(PB \cap PC) = r([PB , PC]) \subseteq r(P) .$$

Il en résulte :

$$P = r(PB \cap PC) \supseteq PB \cap PC \supseteq P ,$$

d'où

$$P = PB \cap PC .$$

P étant $\cap$-irréductible, on a $PB = P$ ou $PC = P$, donc $B \subseteq P$ ou $C \subseteq P$.

Dans [8], E. SCHENKMAN définit le radical Rad A d'un sous-groupe normal A comme sous-groupe réunion des sous-groupes normaux B de G pour lesquels il existe un entier $n \geq 0$ tel que : $B^{(n)} \subseteq A$ ($B^{(n)}$ désignant la n-ième sous-groupe dérivé de B). Il résulte de la propriété 1.2 que le radical de Schenkman d'un sous-groupe normal A est contenu dans le radical $r(A)$. Nous verrons dans la troisième partie, que, si G satisfait à la condition maximale pour les sous-groupes normaux, le radical de Schenkman coïncide avec le radical $r(A)$.

2. Sous-groupes primaires.

DÉFINITION 2.1. - Un sous-groupe normal Q de G est dit primaire s'il vérifie la propriété :

$$[(a) , (b)] \subseteq Q , \quad a \notin Q \implies b \in r(Q) .$$

Une définition équivalente est fournie par la propriété suivante, où A et B représentent deux sous-groupes normaux de G.

PROPRIÉTÉ 2.1. - Pour que le sous-groupe normal Q soit primaire, il faut et

---

([1]) Le sous-groupe normal A est dit $\cap$-irréductible si l'égalité $A = B \cap C$, où B et C sont des sous-groupes normaux, entraîne $A = B$ ou $A = C$.

il suffit qu'il vérifie la propriété :

$$[A , B] \subseteq Q , \quad A \not\subseteq Q \implies B \subseteq r(Q) .$$

Remarque. - Si P est un sous-groupe normal égal à son radical, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° P est premier.

2° P est primaire.

3° P est $\cap$-irréductible.

PROPRIÉTÉ 2.2. - Si Q_1 et Q_2 sont deux sous-groupes primaires tels que $r(Q_1) = r(Q_2)$, $Q = Q_1 \cap Q_2$ est un sous-groupe primaire de radical :

$$r(Q) = r(Q_1) = r(Q_2) .$$

C'est une conséquence immédiate de la définition 2.1.

Si le sous-groupe normal A s'écrit $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$, les Q_i étant des sous-groupes primaires, on dit que A admet une décomposition primaire et les Q_i sont appelés les composants primaires de cette décomposition. Une décomposition primaire dans laquelle aucun composant n'est superflu, c'est-à-dire telle que, pour chaque i ,

$$Q_i \not\supseteq \bigcap_{k \neq i} Q_k ,$$

est appelée une décomposition primaire réduite.

PROPRIÉTÉ 2.3. - Soit A un sous-groupe normal de G . Si

$$A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$$

est une décomposition primaire réduite de A dans laquelle les composants primaires Q_i n'ont pas tous le même radical, le sous-groupe A n'est pas primaire.

Démonstration. - Quel que soit j , $(1 \leq j \leq n)$, on a

$$[\bigcap_{k \neq j} Q_k , Q_j] \subseteq (\bigcap_{k \neq j} Q_j) \cap Q_j \subseteq A .$$

La décomposition primaire étant réduite, on a :

$$\bigcap_{k \neq j} Q_k \not\subseteq Q_j$$

et par conséquent

$$\bigcap_{k \neq j} Q_k \not\subseteq A .$$

Si A était primaire, on aurait donc (propriété 2.1) : $Q_j \subseteq r(A)$, d'où

$$r(Q_j) \subseteq r(r(A)) = r(A) \subseteq r(Q_i) ,$$

quels que soient i et j , ce qui est contraire à l'hypothèse.

DÉFINITION 2.2. - A et B étant deux sous-groupes normaux de G , on appelle <u>quotient résiduel</u> de A par B , et on note $A:B$, l'ensemble des $x \in G$ tels que $[(x) , B] \subseteq A$.

$A:B$ est un <u>quotient résiduel propre</u>, si B n'est pas contenu dans A .

LEMME 2.1. - <u>Le quotient résiduel de</u> A <u>par</u> B <u>est un sous-groupe normal de</u> G , <u>contenant</u> A .

<u>Démonstration</u>. - Soit $x \in A:B$ et $y \in A:B$; on a

$$[(xy) , B] \subseteq [(x)(y) , B] = [(x) , B][(y) , B] \subseteq A \Longrightarrow xy \in A:B .$$

D'autre part, $\forall\ c \in G$,

$$(cxc^{-1}) = (x) = (x^{-1}) ;$$

il en résulte que $A:B$ est un sous-groupe normal de G .

Enfin, si $a \in A$,

$$[(a) , B] \subseteq (a) \subseteq A ,$$

ce qui montre que $A \subseteq A:B$.

<u>Remarque</u>. - Il résulte de la définition 2.2 :

(1) $$[A:B , B] \subseteq A .$$

(2) $$(\bigcap_i A_i):B = \bigcap_i (A_i:B) .$$

La propriété suivante permet de caractériser les sous-groupes premiers ainsi que les sous-groupes primaires à l'aide des quotients résiduels.

PROPRIÉTÉ 2.4.

1° <u>Pour qu'un sous-groupe normal</u> P <u>de</u> G <u>soit premier, il faut et il suffit qu'on ait</u> $P:A = P$, <u>pour tout sous-groupe normal</u> $A \not\subseteq P$.

2° <u>Pour qu'un sous-groupe normal</u> Q <u>de</u> G <u>soit primaire, il faut et il suffit qu'on ait</u> $Q:A = Q$ <u>pour tout sous-groupe normal</u> $A \not\subseteq r(Q)$.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de démontrer le 2°.

Supposons Q primaire, et soit A un sous-groupe normal non contenu dans $r(Q)$; on a

$$[Q:A\ ,\ A] \subseteq Q \implies Q:A \subseteq Q$$

et, d'après le lemme 2.1, il en résulte

$$Q:A = Q\ .$$

Réciproquement, soit $Q:A = Q$ pour tout sous-groupe normal $A \not\subseteq r(Q)$, et soit $[(a)\ ,\ (b)] \subseteq Q$ avec $b \notin r(Q)$. On a

$$a \in Q:(b) \qquad \text{et} \qquad (b) \not\subseteq r(Q)\ ,$$

d'où $Q:(b) = Q$ et $a \in Q$; il en résulte que Q est primaire.

3. Radical tertiaire. Sous-groupes tertiaires.

DÉFINITION 3.1. - Le radical tertiaire d'un sous-groupe normal A de G est l'ensemble $t(A)$ des $x \in G$ qui satisfont à la condition :

$$b \notin A \implies \exists\ c \in (b)\ ,\ \ c \notin A \ \text{ tel que } [(x)\ ,\ (c)] \subseteq A\ .$$

LEMME 3.1. - *Le radical tertiaire* $t(A)$ *du sous-groupe normal* A , *est un sous-groupe normal de* G , *contenant* A .

Démonstration. - Soit $x_1 \in t(A)$, $x_2 \in t(A)$ et $b \notin A$. Il existe $c_1 \in (b)$, $c_1 \notin A$, tel que $[(x_1)\ ,\ (c_1)] \subseteq A$. De plus, puisque $c_1 \notin A$, il existe $c_2 \in (c_1)$, $c_2 \notin A$, tel que $[(x_2)\ ,\ (c_2)] \subseteq A$. On a alors :

$$[(x_1\ x_2)\ ,\ (c_2)] \subseteq [(x_1)(x_2)\ ,\ (c_2)] \subseteq [(x_1)\ ,\ (c_1)][(x_2)\ ,\ (c_2)] \subseteq A\ ;$$

d'où :

$$x_1\ x_2 \in t(A)\ .$$

D'autre part, $(x^{-1}) = (x) = (cxc^{-1})$, $\forall\ c \in G$; il en résulte que $t(A)$ est un sous-groupe normal de G .

Enfin, soit $a \in A$ et $b \notin A$, on a

$$[(a)\ ,\ (b)] \subseteq (a) \subseteq A\ ,$$

d'où

$$a \in t(A)\ .$$

DÉFINITION 3.2. - Un sous-groupe normal T de G est dit <u>tertiaire</u> s'il vérifie la propriété :

$$[(a)\ ,\ (b)] \subseteq T\ ,\quad a \notin T \implies b \in t(T)\ .$$

Il résulte immédiatement de cette définition les deux propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ 3.1. - <u>Pour que le sous-groupe normal</u> T <u>soit tertiaire, il faut et il suffit qu'on ait</u> (A <u>et</u> B <u>étant deux sous-groupes normaux de</u> G) :

$$[A\ ,\ B] \subseteq T\ ,\quad A \nsubseteq T \implies B \subseteq t(T)\ .$$

PROPRIÉTÉ 3.2. - <u>Si</u> T_1 <u>et</u> T_2 <u>sont deux sous-groupes tertiaires ayant le même radical tertiaire,</u> $T = T_1 \cap T_2$ <u>est un sous-groupe tertiaire dont le radical tertiaire est</u> $t(T) = t(T_1) = t(T_2)$.

PROPRIÉTÉ 3.3. - <u>Tout sous-groupe normal</u> $\cap$-<u>irréductible est tertiaire</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit A un sous-groupe normal $\cap$-irréductible ; supposons A non tertiaire. Alors, il existe $a \notin A$ et $b \notin t(A)$ tels que $[(a)\ ,\ (b)] \subseteq A$. Puisque $b \notin t(A)$, il existe $c \notin A$ tel que

$$[(b)\ ,\ (c')] \subseteq A \ \text{ et }\ c' \in (c) \implies c' \in A\ .$$

Considérons le sous-groupe normal $A' = A(a) \cap A(c)$; on a évidemment $A \subseteq A'$; démontrons que $A' \subseteq A$.

Soit $x \in A'$, $x = a_1\, a' = a_2\, c'$, avec $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $a' \in (a)$, $c' \in (c)$. On a $c' = a_3\, a'$, avec $a_3 \in A$. De plus,

$$[(b)\ ,\ (c')] \subseteq [(b)\ ,\ (a_3)][(b)\ ,\ (a')] \subseteq [(b)\ ,\ (a_3)][(b)\ ,\ (a)] \subseteq A\ ;$$

or $b \notin t(A)$ et $c' \in (c)$ entraîne $c' \in A$ et $x = a_2\, c' \in A$, ce qui établit donc $A' \subseteq A$.

On a alors

$$A = A(a) \cap A(c) \qquad A \subset A(a) \ \text{ et }\ A \subset A(c)\ ,$$

ce qui est contraire à A $\cap$-irréductible.

Par la méthode habituelle, on démontre que si le groupe G satisfait à la condition maximale pour les sous-groupes normaux, tout sous-groupe normal est décomposable en une intersection d'un nombre fini de sous-groupes normaux $\cap$-irréductibles. On en déduit, en appliquant la propriété 3.3 :

PROPRIÉTÉ 3.4. - Dans un groupe G satisfaisant à la condition maximale pour les sous-groupes normaux, tout sous-groupe normal est décomposable en une intersection d'un nombre fini de sous-groupes tertiaires :

$$A = T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_n .$$

Une telle décomposition est appelée décomposition tertiaire de A ; les T_i sont les composants tertiaires de la décomposition. Si la décomposition est réduite, c'est-à-dire sans composants superflus, et si les radicaux tertiaires des composants T_i sont tous distincts, la décomposition tertiaire est dite normale. Il résulte de la propriété 3.2 que toute décomposition tertiaire peut être raffinée en une décomposition normale. Finalement, en appliquant la propriété 3.4, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. - Si le groupe G satisfait à la condition maximale pour les sous-groupes normaux, tout sous-groupe normal de G admet une décomposition tertiaire normale.

4. La condition maximale pour les sous-groupes normaux.

Dans toute cette partie, nous supposerons que le groupe G satisfait à la condition maximale pour les sous-groupes normaux.

PROPRIÉTÉ 4.1. - Si A est un sous-groupe normal de G, il existe un nombre fini de sous-groupes premiers minimaux contenant A, et par conséquent, le radical $r(A)$ est l'intersection d'un nombre fini de sous-groupes premiers minimaux contenant A.

Démonstration. - Si A est premier, le résultat est évident ; supposons donc A non premier ; alors il existe $a \notin A$, $b \notin A$ tels que $[(a), (b)] \subseteq A$. Supposons qu'il existe une infinité de sous-groupes premiers minimaux contenant A. On a

$$[A(a) , A(b)] = [A , A][A , (b)][(a) , A][(a) , (b)] \subseteq A ;$$

il en résulte que l'un au moins des sous-groupes normaux $A(a)$, $A(b)$ est contenu dans une infinité de sous-groupes premiers minimaux contenant A ; on peut supposer qu'il s'agit de $A(a)$. Remarquons qu'un sous-groupe premier minimal contenant A, qui contient $A(a)$, est un sous-groupe premier minimal contenant $A(a)$. Il existe donc une infinité de sous-groupes premiers minimaux contenant $A(a)$, et $A(a)$ n'est pas premier. De plus, on a

$$A \subset A(a) \quad \text{puisque} \quad a \notin A .$$

En répétant ce raisonnement, on pourrait donc construire une chaine infinie strictement croissante :

$$A \subset A(a_1) \subset A(a_1)(a_2) \subset \dots \subset A(a_1)\dots(a_n) \subset \dots$$

ce qui est contraire à la condition maximale pour les sous-groupes normaux.

PROPRIÉTÉ 4.2. - <u>A étant un sous-groupe normal de G, et $P_1, P_2, \dots, P_n$ étant les sous-groupes premiers minimaux contenant A, il existe des sous-groupes premiers minimaux contenant A</u>

$$P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m} \qquad (1 \leqslant i_k \leqslant n)$$

<u>et un commutateur $C[P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}]$ tels que</u>

$$C[P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}] \subseteq A .$$

<u>Démonstration</u>. - On suppose que l'ensemble des sous-groupes normaux de G ne vérifiant pas cette propriété n'est pas vide ; alors, cet ensemble possède un élément maximal A qui n'est pas premier. Il existe $a \notin A$ et $b \notin A$ tels que

$$[(a), (b)] \subseteq A .$$

On a

$$A \subset A(a) \qquad \text{et} \qquad A \subset A(b)$$

et d'après le caractère maximal de A, les deux sous-groupes normaux $A(a)$ et $A(b)$ vérifient la propriéré 4.2.

Soient $P'_1, P'_2, \dots, P'_r$ les sous-groupes premiers minimaux contenant $A(a)$, et $P''_1, P''_2, \dots, P''_s$ les sous-groupes premiers minimaux contenant $A(b)$ (propriété 4.1). Il existe $P'_{j_1}, \dots, P'_{j_u}$ $(1 \leqslant j_k \leqslant r)$, et $P''_{h_1}, \dots, P''_{h_v}$ $(1 \leqslant h_t \leqslant s)$, ainsi que deux commutateurs

$$C'[P'_{j_1}, \dots, P'_{j_u}] \subseteq A(a) \qquad \text{et} \qquad C''[P''_{h_1}, \dots, P''_{h_v}] \subseteq A(b) .$$

On en déduit :

$$[C'[P'_{j_1}, \dots, P'_{j_u}], C''[P''_{h_1}, \dots, P''_{h_v}]] \subseteq [A(a), A(b)] \subseteq A .$$

Les P'_{j_k} et les P''_{h_t} sont des sous-groupes premiers contenant $A(a)$ et $A(b)$, donc contenant A ; chacun de ces sous-groupes contient un sous-groupe premier minimal contenant A , c'est-à-dire un P_{j_k} ou un P_{h_t} , et on a

$$[C'[P_{j_1}, \ldots, P_{j_u}], C''[P_{h_1}, \ldots, P_{h_v}]] \subseteq [C'[P'_{j_1}, \ldots, P'_{j_u}], C''[P''_{h_1}, \ldots, P''_{h_v}]] \subseteq A ;$$

soit

$$C[P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_m}] \subseteq A .$$

Ce résultat est contraire au choix de A , ce qui démontre la propriété 4.2 pour tout sous-groupe normal.

COROLLAIRE. - Il existe un commutateur $C[r(A)]$, de composant $r(A)$, tel que $C[r(A)] \subseteq A$.

LEMME 4.1. - Tout commutateur $C[A]$ de poids $n \geqslant 1$, de composant A , contient le $(n-1)$-ième sous-groupe dérivé $A^{(n-1)}$.

Démonstration. - On raisonne par récurrence sur le poids du commutateur $C[A]$. Si $n = 1$, on a

$$C[A] = A = A^{(0)} .$$

Supposons le lemme établi pour les commutateurs de poids $< n$. Un commutateur $C[A]$ de poids n s'écrit

$$C[A] = [C'[A], C''[A]] ,$$

où $C'[A]$ et $C''[A]$ sont des commutateurs de poids n_1 et n_2 tels que

$$n_1 + n_2 = n .$$

On peut supposer $n_1 \leqslant n_2$; alors

$$[C'[A], C''[A]] \supseteq [A^{(n_1-1)}, A^{(n_2-1)}] \supseteq [A^{(n_2-1)}, A^{(n_2-1)}] = A^{(n_2)} \supseteq A^{(n-1)}$$

et

$$C[A] \supseteq A^{(n-1)} .$$

On déduit de ce lemme et du corollaire de la propriété 4.2 :

PROPRIÉTÉ 4.3. - Pour tout sous-groupe normal A , il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $r(A)^{(n)} \subseteq A$.

Nous avons remarqué dans la première partie que Rad $A \subseteq r(A)$, Rad A étant le radical de Schenkman. De la proposition 4.3, il résulte que $r(A) \subseteq$ Rad A . Par conséquent, dans un groupe satisfaisant à la condition maximale pour les sous-groupes normaux, le radical $r(A)$ défini par KURATA coïncide avec le radical de Schenkman.

Dans un groupe satisfaisant à la condition maximale pour les sous-groupes normaux, on peut caractériser les sous-groupes tertiaires en appliquant la notion de résiduel essentiel définie par L. LESIEUR dans [4].

DÉFINITION 4.1. - Si A est un sous-groupe normal de G , le sous-groupe normal R de G est dit résiduel essentiel de A , s'il existe un sous-groupe normal $B \supset A$ tel que $R = A:B$ et si

$$A \subset C \subseteq B \implies A:C = A:B \text{ .}$$

La propriété suivante fournit des définitions équivalentes d'un résiduel essentiel.

PROPRIÉTÉ 4.4. - A étant un sous-groupe normal de G , les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) R est un résiduel essentiel de A .

(2) Il existe un sous-groupe normal $B \nsubseteq A$ tel que :

$$R = A:B \text{ et } C \subseteq B \text{ , } C \nsubseteq A \implies A:C = A:B \text{ ;}$$

(3) Il existe un élément $b \notin A$ tel que :

$$R = A:(b) \text{ et } c \in (b) \text{ , } c \notin A \implies A:(c) = A:(b) \text{ .}$$

Il résulte de (2) qu'un quotient résiduel propre maximal est un résiduel essentiel.

Les sous-groupes tertiaires de G sont alors caractérisés de la façon suivante :

PROPRIÉTÉ 4.5. - Pour qu'un sous-groupe normal A de G soit tertiaire, il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel essentiel.

Démonstration. - Remarquons d'abord que, A étant un sous-groupe normal quelconque, si R est un résiduel essentiel de A , on a

$$t(A) \subseteq R \text{ .}$$

En effet, soit $R = A:(b)$, $b \notin A$ (propriété 4.4 (3)) et soit $a \in t(A)$.

$$b \notin A \implies \exists\, c \in (b) \text{ , } c \notin A \text{ tel que } [(a) \text{ , } (c)] \subseteq A \text{ ,}$$

d'où $a \in A:(c)$; or, $A:(c) = A:(b)$ (propriété 4.4 (3)) ; il en résulte

$$a \in A:(b) = R .$$

Supposons que A soit un sous-groupe tertiaire et soit $R = A:(b)$ un résiduel essentiel de A. Si $a \in R$, on a

$$[(a) , (b)] \subseteq A \qquad \text{avec} \quad b \notin A ,$$

donc $a \in t(A)$; il en résulte $R \subseteq t(A)$ et d'après ce qui précède $R = t(A)$; $t(A)$ est le seul résiduel essentiel de A.

Réciproquement, soit A un sous-groupe normal de G admettant un seul résiduel essentiel, et soit $[(a) , (b)] \subseteq A$ avec $b \notin A$. Supposons que $a \notin t(A)$; alors, d'après la définition du radical tertiaire, il existe $c \notin A$ tel que :

(I) $$[(a) , (c')] \subseteq A \quad \text{et} \quad c' \in (c) \implies c' \in A .$$

Considérons l'ensemble des quotients résiduels de A de la forme $A:(x)$, où $x \in (c)$, $x \notin A$. Cet ensemble possède un élément maximal $A:(b_0)$. On vérifie sans peine que $A:(b_0)$ est un résiduel essentiel de A.

Puisque $[(a) , (b)] \subseteq A$ et $b \notin A$, $A:(b)$ est un quotient résiduel propre de A et $a \in A:(b)$. $A:(b)$ est contenu dans un quotient résiduel maximal (en tant que quotient résiduel propre) donc dans un résiduel essentiel de A qui ne peut être que $A:(b_0)$. On a

$$a \in A:(b) \subseteq A:(b_0)$$

d'où

$$[(a) , (b_0)] \subseteq A \quad \text{et} \quad b_0 \in (c) \implies b_0 \in A ,$$

d'après la condition (I). Ceci est contraire à la définition de b_0. Il en résulte $a \in t(A)$ et A est un sous-groupe tertiaire.

<u>Remarque</u>. - Il résulte en particulier de cette démonstration que dans un groupe satisfaisant à la condition maximale pour les sous-groupes normaux, le radical tertiaire d'un sous-groupe tertiaire A est un résiduel essentiel de A. Il s'agit là d'un résultat analogue à celui obtenu pour les idéaux tertiaires d'un anneau noethérien. Dans un anneau, tout résiduel essentiel est premier, et par conséquent, dans un anneau noethérien, le radical tertiaire d'un idéal bilatère tertiaire est un idéal bilatère premier. Cette propriété, dont la démonstration utilise l'associativité du produit des idéaux, ne semble pas subsister ici. De même, dans un anneau noethérien, le radical (primaire) d'un idéal primaire est premier ; ce résultat ne semble pas être conservé dans le cas étudié par Y. KURATA.

5. La propriété d'Artin-Rees.

Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que, dans un groupe G satisfaisant à la condition maximale pour les sous-groupes normaux, tout sous-groupe normal admette une décomposition primaire.

DÉFINITION 5.1. - Un groupe G possède la propriété d'Artin-Rees, pour les sous-groupes normaux, si quels que soient les sous-groupes normaux A et B et l'entier $n \geqslant 0$, il existe un entier $h(n) \geqslant 0$ tel que :

$$A^{(h(n))} \cap B \subseteq [A^{(n)} , B] .$$

En particulier, on dira que G possède la propriété (P) pour les sous-groupes normaux, si quels que soient les sous-groupes normaux A et B , il existe un entier $h \geqslant 0$ tel que :

$$A^{(h)} \cap B \subseteq [A , B] .$$

THÉORÈME 5.1. - Soit G un groupe satisfaisant à la condition maximale pour les sous-groupes normaux. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Tout sous-groupe normal est décomposable en une intersection finie de sous-groupes primaires.

(2) G possède la propriété d'Artin-Rees pour les sous-groupes normaux.

(3) G possède la propriété (P) pour les sous-groupes normaux.

(4) Tout sous-groupe tertiaire est primaire.

(5) Tout sous-groupe $\cap$-irréductible est primaire.

Démonstration.

(1) $\Longrightarrow$ (2). - Soient A et B deux sous-groupes normaux et n un entier $\geqslant 0$. On a

$$[A^{(n)} , B] = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m ,$$

où les Q_i sont des sous-groupes primaires. Si $B \subseteq Q_i$ pour $i = 1 , 2 , \dots , m$, le résultat est immédiat puisque $A^{(n)} \cap B = B = [A^{(n)} , B]$. On peut donc supposer qu'il existe $m' \leqslant m$ tel que $B \nsubseteq Q_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m'$ et

$$[A^{(n)} , B] = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_{m'} \cap B .$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant m'$,

$$[A^{(n)} , B] \subseteq Q_i , \qquad B \nsubseteq Q_i \Longrightarrow A^{(n)} \subseteq r(Q_i)$$

puisque Q_i est primaire. On a $A^{(n)} \subseteq \mathbf{Rad}\,(Q_i)$ et il existe un entier $s_i \geqslant 0$ tel que $(A^{(n)})^{(s_i)} = A^{(n+s_i)} \subseteq Q_i$. Si l'on pose $s = \max\{s_1 , s_2 , \dots , s_{m'}\}$, on a

$$A^{(n+s)} \subseteq A^{(n+s_i)} \subseteq Q_i \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m' ,$$

d'où

$$A^{(n+s)} \cap B \subseteq Q_1 \cap \dots \cap Q_{m'} \cap B = [A^{(n)} , B] .$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) est évident.

(3) $\Longrightarrow$ (4). - Soit T un sous-groupe tertiaire de G et soit $[(a) , (b)] \subseteq T$ avec $a \notin T$; alors $b \in t(T)$. Considérons le quotient résiduel $T:(b)$. D'après la propriété (P), il existe un entier $h \geqslant 0$ tel que :

$$(b)^{(h)} \cap T:(b) \subseteq [(b) , T:(b)] .$$

Supposons $(b)^{(h)} \not\subseteq T$; alors, il existe $b_1 \in (b)^{(h)}$, $b_1 \notin T$. Puisque $b \in t(T)$ et $b_1 \notin T$, il existe $b_2 \in (b_1)$, $b_2 \notin T$ tel que : $[[(b) , (b_2)] \subseteq T$ soit $b_2 \in T:(b)$; or $b_2 \in (b)^{(h)}$, il en résulte

$$b_2 \in (b)^{(h)} \cap (T:b) \subseteq [(b) , T:(b)] \subseteq T ,$$

ce qui est contraire à $b_2 \notin T$. On a démontré que $(b)^{(h)} \subseteq T$, soit

$$b \in \mathbf{Rad}\, T \subseteq r(T)$$

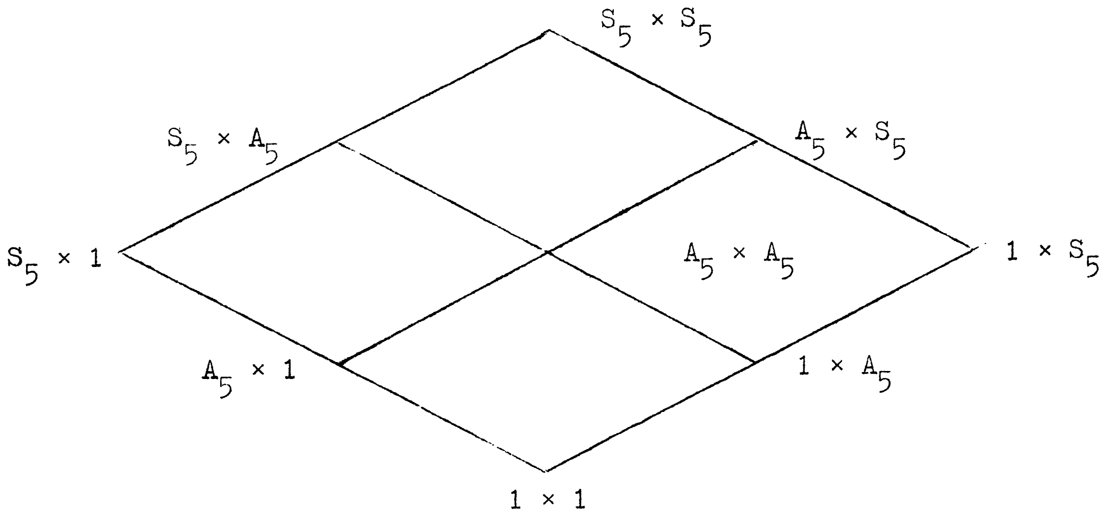
et T est primaire.

Remarquons que la condition maximale n'est pas utilisée dans cette démonstration et que, par conséquent, (3) $\Longrightarrow$ (4) dans un groupe G quelconque.

(4) $\Longrightarrow$ (5) résulte de la propriété 3.3.

(5) $\Longrightarrow$ (1) résulte immédiatement de la condition maximale pour les sous-groupes normaux de G .

EXEMPLE. - Prenons pour G le produit direct $S_5 \times S_5$ du groupe symétrique S_5 par lui-même. A_5 étant le groupe alterné, le treillis des sous-groupes normaux de G est le suivant :



Le groupe G possède la propriété d'Artin-Rees pour les sous-groupes normaux. Par exemple, le sous-groupe normal $A_5 \times 1$ admet les décompositions primaires :

$$A_5 \times 1 = (S_5 \times 1) \cap (A_5 \times S_5) = (S_5 \times 1) \cap (A_5 \times A_5) .$$

On déduit immédiatement du théorème 5.1 la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 5.1. - Soit G un groupe satisfaisant à la condition maximale pour les sous-groupes normaux et à l'une des conditions équivalentes du théorème 5.1. Si A est un sous-groupe normal de G et si $B = \bigcap\limits_{n\geq 0} A^{(n)}$, on a $[A , B] = B$. Si, en particulier, A est contenu dans le radical de G, on a

$$\bigcap_{n\geq 0} A^{(n)} = E ,$$

(E étant le sous-groupe unité de G).

6. Théorème d'unicité pour les décompositions primaires.

Soit A un sous-groupe normal de G, admettant une décomposition primaire :

$$A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n .$$

Si les radicaux des composants primaires Q_i sont tous distincts et si la décomposition est réduite, on dit qu'on a une décomposition primaire normale. Il résulte de la propriété 2.2 que toute décomposition primaire peut être raffinée en une décomposition normale. Nous allons montrer que le nombre des composants d'une décomposition primaire normale de A, ainsi que les radicaux $r(Q_i)$ des composants dépendent seulement de A et non de la décomposition normale particulière considérée. Ce résultat constitue une généralisation d'un théorème dû à SCHENKMAN [8].

THÉORÈME 6.1. - _Soit_ A _un sous-groupe normal de_ G _admettant une décomposition primaire et soit_ :

$$A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m = Q'_1 \cap Q'_2 \cap \dots \cap Q'_n ,$$

deux décompositions primaires normales de A .

_On a_ $m = n$ _et les radicaux_ $r(Q_i)$ _sont égaux aux radicaux_ $r(Q'_j)$.

Démonstration. - On raisonne par récurrence sur le nombre m des composants primaires. Si $m = 1$, on a

$$Q_1 = Q'_1 \cap \dots \cap Q'_n ;$$

alors, Q_1 étant primaire, il résulte de la propriété 2.3 que $n = 1$. Les sous-groupes primaires $Q_1 , \dots , Q_m , Q'_1 , \dots , Q'_n$ sont des sous-groupes propres ; dans l'ensemble des radicaux $r(Q_1) , \dots , r(Q_m) , r(Q'_1) , \dots , r(Q'_n)$, il existe un élément qui n'est contenu strictement dans aucun des autres ; on peut supposer qu'il s'agit de $r(Q_1)$. Nous allons démontrer que $r(Q_1)$ est égal à l'un des radicaux $r(Q'_j)$.

Supposons que $r(Q_1)$ ne soit égal à aucun des radicaux $r(Q'_j)$ $(1 \leq j \leq n)$, et considérons le quotient résiduel de A par Q_1 :

$$A:Q_1 = (Q_1:Q_1) \cap (Q_2:Q_1) \cap \dots \cap (Q_m:Q_1) = (Q'_1:Q_1) \cap (Q'_2:Q_1) \cap \dots \cap (Q'_n:Q_1) .$$

Pour $1 < i \leq m$, on a $Q_1 \not\subset r(Q_i)$, sinon on aurait $r(Q_1) \subset r(Q_i)$ ce qui est contraire au choix de Q_1 . Pour la même raison, on a

$$Q_1 \not\subset r(Q'_j) , \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq n .$$

En utilisant la propriété 2.4 et en remarquant que $Q_1:Q_1 = G$, on a

$$A:Q_1 = Q_2 \cap Q_3 \cap \dots \cap Q_m = Q'_1 \cap Q'_2 \cap \dots \cap Q'_n = A ,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse : $Q_1 \cap \dots \cap Q_m$ décomposition réduite de A .

$r(Q_1)$ est donc égal à un $r(Q'_j)$; on peut supposer que :

$$r(Q_1) = r(Q'_1) .$$

Supposons le théorème d'unicité vérifié pour les décompositions primaires dont le nombre de composants est $< m$.

Posons $Q = Q_1 \cap Q'_1$; Q est primaire, et $r(Q) = r(Q_1) = r(Q'_1)$ (propriété 2.2). On en déduit : $Q \not\subseteq r(Q_i)$ pour $1 < i \leqslant m$ et $Q \not\subseteq r(Q'_j)$ pour $1 < j \leqslant n$; de plus,

$$Q \subseteq Q_1 \qquad \text{et} \qquad Q \subseteq Q'_1 .$$

D'où :

$$A:Q = Q_2 \cap Q_3 \cap \ldots \cap Q_m = Q'_2 \cap \ldots \cap Q'_n ,$$

et d'après l'hypothèse d'induction

$$m - 1 = n - 1 \qquad \text{et} \qquad r(Q_i) = r(Q'_i) \qquad \text{pour} \quad 2 \leqslant i \leqslant m = n$$

(en changeant éventuellement l'ordre des Q'_j $(2 \leqslant j \leqslant n)$. Le théorème en résulte.

7. Théorème d'unicité pour les décompositions tertiaires.

LEMME 7.1. - *Si* $A = T \cap B = T' \cap B'$, *où* T *et* T' *sont deux sous-groupes tertiaires de* G *tels que* $t(T) \neq t(T')$, *et où* B *et* B' *sont deux sous-groupes normaux de* G , *on a* :

$$A = B \cap B' .$$

Démonstration. - Il suffit de démontrer que $B \cap B' \subseteq A$. Soit $a \in B \cap B'$; supposons que $a \notin A$. On a, par exemple, $t(T) \not\subseteq t(T')$ et il existe donc $b \in t(T)$ tel que $b \notin t(T')$.

$a \notin A \Longrightarrow a \notin T$ et il existe $a' \in (a)$, $a' \notin T$ tel que $[(b) , (a')] \subseteq T$; d'où

$$[(\ ) , (a')] \subseteq T \cap B = T' \cap B' \subseteq T' .$$

De plus $a' \notin T'$, sinon on aurait

$$a' \in T' \cap B' = T \cap B \subsetneq T ;$$

il en résulte, puisque T' est tertiaire : $b \in t(T')$; ce qui est contraire au choix de b . D'où $a \in A$ et le lemme en résulte.

THÉORÈME 7.1. - *Soit* A *un sous-groupe normal de* G *et*

$$A = T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_m = T'_1 \cap T'_2 \cap \ldots \cap T'_n$$

deux décompositions tertiaires normales de A .

<u>On a</u> $m = n$, <u>et les radicaux tertiaires</u> $t(T_i)$ <u>sont égaux aux radicaux tertiaires</u> $t(T'_j)$.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de montrer que $t(T_1)$, par exemple, est égal à un $t(T'_j)$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, alors on a les relations :

(1) $$t(T_1) \neq t(T'_1) ,$$

(2) $$t(T_1) \neq t(T'_2) ,$$

.
.
. $$\ldots$$

(n) $$t(T_1) \neq t(T'_n) .$$

La relation (1) entraîne, d'après le lemme 7.1 :

$$A = T'_2 \cap T'_3 \cap \ldots \cap T'_n \cap T_2 \cap T_3 \cap \ldots \cap T_m .$$

La relation (2) et l'égalité :

$$A = T'_2 \cap \ldots \cap T'_n \cap T_2 \cap \ldots \cap T_m = T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_m$$

entraînent :

$$A = T'_3 \cap \ldots \cap T'_n \cap T_2 \cap \ldots \cap T_m .$$

En répétant le raisonnement, on obtient, après application des relations (1) , (2) , ... , (n) :

$$A = T_2 \cap T_3 \cap \ldots \cap T_m ,$$

ce qui contredit le fait que le composant T_1 n'est pas superflu.

8. Les composants isolés d'un sous-groupe normal.

DÉFINITION 8.1. - Soient A un sous-groupe normal de G , et M un m-système. Si M n'est pas vide, on appelle <u>composant isolé de</u> A <u>associé à</u> M ou, plus simplement, M-<u>composant</u> de A , l'ensemble A_M des $x \in G$ tels qu'il existe $c \in M$ avec $[(x) , (c)] \subseteq A$. Si $M = \emptyset$, on pose $A_M = A$.

On démontre sans difficulté le lemme suivant.

LEMME 8.1. - <u>Le</u> M-<u>composant de</u> A <u>est un sous-groupe normal de</u> G <u>contenant</u> A .

On peut caractériser les sous-groupes primaires par leurs composants isolés.

PROPRIÉTÉ 8.1. - Pour que le sous-groupe normal Q soit primaire, il faut et il suffit qu'on ait, pour tout m-système M :

$$Q_M = Q \quad \text{ou} \quad Q_M = G .$$

Démonstration. - Supposons que, pour tout m-système M, on ait $Q_M = Q$ ou $Q_M = G$, et supposons que Q ne soit pas primaire ; alors, il existe $b \notin Q$ et $c \notin r(Q)$ tels que $[(b), (c)] \subseteq Q$. Puisque $c \notin r(Q)$, il existe un sous-groupe premier P contenant Q tel que $c \notin P$. $M = C(P)$ est un m-système qui contient c ; il en résulte :

$$[(b), (c)] \subseteq Q \implies b \in Q_M .$$

Mais : $b \notin Q \implies Q_M = G$. On a $c \in Q_M = G$ et il existe $d \in M$ tel que

$$[(c), (d)] \subseteq Q \subseteq P ;$$

$$d \in M \implies d \notin P \implies c \in P ;$$

puisque P est premier ; ce qui est contraire au choix de P. D'où : Q est primaire.

Réciproquement, supposons Q primaire et soit M un m-système. Si $M = \emptyset$, on a $Q_M = Q$. On peut donc supposer M non vide. Si $Q_M \neq Q$, on a $Q_M \supset Q$ (lemme 8.1) ; démontrons que, dans ce cas, on a $Q_M = G$. Il existe $b \in Q_M$, $b \notin Q$; puisque $b \in Q_M$, il existe $c \in M$ tel que $[(b), (c)] \subseteq Q$, ce qui entraîne $c \in r(Q)$; il en résulte que M rencontre Q (propriété 1.5). Soient $x \in G$ et $y \in M \cap Q$, on a

$$[(x), (y)] \subseteq Q \quad \text{avec} \quad y \in M ,$$

d'où

$$x \in Q_M \quad \text{et} \quad Q_M = G .$$

Si A est un sous-groupe normal admettant une décomposition primaire, on peut exprimer les composants isolés de A à l'aide des composants primaires de la décomposition de A de la façon suivante.

PROPRIÉTÉ 8.2. - Soient $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ une décomposition primaire de A et M un m-système tel que M rencontre $r(Q_i)$ pour $m + 1 \leq i \leq n$, et ne rencontre pas $r(Q_i)$ pour $1 \leq i \leq m$. On a alors :

$$A_M = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m .$$

<u>Démonstration</u>. - Si M est vide, le résultat est évident, avec $m = n$. On peut donc supposer M non vide. Soit $x \in A_M$, il existe $c \in M$ tel que :

$$[(x) , (c)] \subseteq A = Q_1 \cap \dots \cap Q_n .$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant m$, on a $c \notin r(Q_i)$, donc $x \in Q_i$, puisque $[(x) , (c)] \subseteq Q_i$ et Q_i est primaire ; ce qui démontre

$$A_M \subseteq Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m .$$

Soit $y \in Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$. Pour $j > m$, M rencontre $r(Q_j)$, donc rencontre Q_j (propriété 1.5). Pour $j > m$, il existe donc $c_j \in Q_j \cap M$. Puisque M est un m-système, il existe $c'_{m+1} \in (c_{m+1})$ et $c'_{m+2} \in (c_{m+2})$ tels que

$$c''_{m+2} = [c'_{m+1} , c'_{m+2}] \in Q_{m+1} \cap Q_{m+2} \cap M .$$

De même, il existe $c^*_{m+2} \in (c''_{m+2})$ et $c'_{m+3} \in (c_{m+3})$ tels que

$$c''_{m+3} = [c^*_{m+2} , c'_{m+3}] \in Q_{m+1} \cap Q_{m+2} \cap Q_{m+3} \cap M .$$

Le procédé se poursuit et on obtient finalement un élément

$$c''_n \in Q_{m+1} \cap Q_{m+2} \cap \dots \cap Q_n \cap M .$$

Alors

$$[(y) , (c''_n)] \subseteq Q_1 \cap \dots \cap Q_m \cap Q_{m+1} \cap \dots \cap Q_n = A$$

avec $c''_n \in M$; il en résulte $y \in A_M$ et

$$Q_1 \cap \dots \cap Q_m \subseteq A_M .$$

COROLLAIRE. - <u>Si un sous-groupe normal</u> A <u>admet une décomposition primaire, il a un nombre fini de composants isolés</u>.

Soit A un sous-groupe normal de G admettant une décomposition primaire. On sait que le nombre des composants primaires d'une décomposition normale, ainsi que les radicaux $r(Q_i)$ de ces composants primaires, ne dépendent que de A . Soit

$$A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n ,$$

une décomposition primaire normale de A . L'ensemble

$$\{r(Q_1) , \dots , r(Q_m)\}$$

est un ensemble isolé de radicaux de A, si, pour $m+1 \leqslant j \leqslant n$, $r(Q_j)$ n'est contenu dans aucun $r(Q_i)$, avec $1 \leqslant i \leqslant m$. Par exemple, chaque élément minimal de l'ensemble $\{r(Q_1), \ldots, r(Q_n)\}$ est un ensemble isolé de radicaux.

PROPRIÉTÉ 8.3. - *Soit* A *un sous-groupe normal de* G *admettant une décomposition primaire, et soit* $A = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ *une décomposition primaire normale de* A. *Posons*

$$r(Q_i) = \bigcap_k P_{i_k} ,$$

où les P_{i_k} *sont les sous-groupes premiers minimaux contenant* Q_i. *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(1) $\{r(Q_1), \ldots, r(Q_m)\}$ *est un ensemble isolé de radicaux.*

(2) *Pour chaque* Q_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, *il existe un sous-groupe premier minimal*

$$P_{ik_i} = P_i^*$$

tel que P_i^* *ne contienne aucun* P_{jk} *pour* $m+1 \leqslant j \leqslant n$.

(3) *Pour* $1 \leqslant i \leqslant m$, $r(Q_i)$ *ne contient pas* $Q_{m+1} \cap \ldots \cap Q_n$.

Démonstration.

(1) $\Longrightarrow$ (2). - S'il existe un i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, tel que, pour chaque k, P_{ik} contienne un P_{jk_j}, on a

$$r(Q_j) \subseteq P_{jk_j} \subseteq P_{ik} \quad \text{pour chaque } k$$

et par conséquent $r(Q_j) \subseteq r(Q_i)$, ce qui est contraire à (1).

(2) $\Longrightarrow$ (3). - Supposons qu'il existe un i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, tel que :

$$r(Q_i) \supseteq Q_{m+1} \cap \cdots \cap Q_n .$$

Alors

$$P_i^* \supseteq r(Q_i) \supseteq Q_{m+1} \cap \ldots \cap Q_n ,$$

il en résulte qu'il existe un j $(m+1 \leqslant j \leqslant n)$ tel que $P_i^* \supseteq Q_j$ (corollaire de la propriété 1.2). P_i^* contient un sous-groupe premier minimal contenant Q_j, donc un P_{jk}, ce qui contredit (2).

(3) $\Longrightarrow$ (1). - Supposons qu'il existe un i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, et un j $(m+1 \leqslant j \leqslant n)$ tels que $r(Q_j) \subseteq r(Q_i)$; On en déduit :

$$r(Q_i) \supseteq r(Q_j) \supseteq Q_j \supseteq Q_{m+1} \cap \dots \cap Q_n \;;$$

ce qui contredit (3).

On déduit de cette propriété un second théorème d'unicité pour les décompositions primaires.

THÉORÈME 8.1. - *Soit* A *un sous-groupe normal de* G *admettant une décomposition primaire, et soit* $A = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ *une décomposition primaire normale de* A . *Si*

$$\{r(Q_1) \;,\; \dots \;,\; r(Q_m)\}$$

est un ensemble isolé de radicaux, $Q_1 \cap \dots \cap Q_m$ *dépend uniquement des radicaux* $r(Q_1) \;,\; \dots \;,\; r(Q_m)$ *et non de la décomposition normale considérée.*

Démonstration. - Soient $A = Q_1 \cap \dots \cap Q_n = Q'_1 \cap \dots \cap Q'_n$ deux décompositions primaires normales de A . On a $r(Q_i) = r(Q'_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Posons

$$Q = Q_{m+1} \cap \dots \cap Q_n \;; \qquad Q' = Q'_{m+1} \cap \dots \cap Q'_n \;.$$

D'après la propriété 8.3, on a

$$Q \not\subseteq r(Q_i) \;, \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant m \;.$$

Il en résulte

$$Q_i{:}Q = Q_i \qquad \text{et} \qquad Q'_i{:}Q = Q'_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant m) \;.$$

De plus $Q \subseteq Q_j$ $(m + 1 \leqslant j \leqslant n)$. Alors :

$$A{:}Q = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m = Q'_1 \cap \dots \cap Q'_m \cap (Q'{:}Q) \;,$$

ce qui entraîne

$$Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m \subseteq Q'_1 \cap \dots \cap Q'_m \;.$$

On démontre de la même façon que

$$Q'_1 \cap \dots \cap Q'_m \subseteq Q_1 \cap \dots \cap Q_m$$

et le théorème en résulte.

COROLLAIRE. - *Si* $r(Q)$ *est un élément minimal de l'ensemble*

$$\{r(Q_1) \;,\; \dots \;,\; r(Q_n)\}$$

des radicaux des composants primaires de A , *le composant primaire de radical* $r(Q)$ *est le même pour toutes les décompositions primaires normales de* A .

Par contre, si le radical $r(Q)$ n'est pas minimal dans l'ensemble des radicaux

$$\{r(Q_1) , \ldots , r(Q_n)\} ,$$

le composant primaire de radical $r(Q)$ n'est pas nécessairement le même pour toutes les décompositions primaires normales de A. Reprenons l'exemple donné dans la cinquième partie. Dans le groupe $G = S_5 \times S_5$, le sous-groupe normal $A_5 \times 1$ admet les deux décompositions primaires normales :

$$A_5 \times 1 = (S_5 \times 1) \cap (A_5 \times S_5) = (S_5 \times 1) \cap (A_5 \times A_5) .$$

Les deux composants primaires $A_5 \times S_5$ et $A_5 \times A_5$ ont le même radical G, et celui-ci n'est pas minimal dans l'ensemble des radicaux $r(S_5 \times 1)$ et $r(A_5 \times S_5)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KURATA (Yoshiki). - A decomposition of normal subgroups in a group, Osaka J. of Math., t. 1, 1964, p. 201-229.

[2] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatifs, I, Colloque d'Algèbre supérieure [1956, Bruxelles], p. 79-121. - Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[3] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatifs, II, Math. Annalen, t. 134, 1957/58, p. 458-476.

[4] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - La notion de résiduel essentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 357-360.

[5] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - Une propriété caractéristique des idéaux tertiaires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 517-520.

[6] McCOY (Neal H.). - Prime ideals in general rings, Amer. J. of Math., t. 71, 1949, p. 823-833.

[7] RILEY (John A.). - Axiomatic primary and tertiary decomposition theory, Trans. Amer. math. Soc., t. 105, 1962, p. 177-201.

[8] SCHENKMAN (Eugene). - The similarity between the properties of ideals in commutative rings and the properties of normal subgroups of groups, Proc. Amer. math. Soc., t. 9, 1958, p. 375-381.

[9] VAN DER WAERDEN (Bartel Leendert). - Algebra, Band 2, 3te Auflage der "modernen Algebra". - Berlin, Springer-Verlag, 1955 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 34).