Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean Ruedin

Groupoïdes distributifs et axiomatique des treillis

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, nº 1 (1966-1967), exp. nº 4, p. 1-36
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_1_A4_0>

5 décembre 1966

GROUPOÏDES DISTRIBUTIFS ET AXIOMATIQUE DES TREILLIS

par Jean RUEDIN

Introduction. - Par groupoïde distributif, nous entendons un groupoïde dont les translations à gauche et à droite sont des homomorphismes. Un groupoïde distributif $E(T)$ satisfait donc aux axiomes de distributivité à gauche et de distributivité à droite [1] :

(D.G) $$x \, T \, (y \, T \, z) = (x \, T \, y) \, T \, (x \, T \, z)$$

(D.D) $$(x \, T \, y) \, T \, z = (x \, T \, z) \, T \, (y \, T \, z) \; .$$

Nous connaissons un grand nombre d'exemples de groupoïdes distributifs : les demi-groupes de cube zéro (en particulier les demi-groupes zéro), les bandes rectangulaires (en particulier les demi-groupes zéro à gauche et les demi-groupes zéro à droite), les demi-treillis, les quasi-groupes distributifs. Pour l'étude de ces derniers, nous nous réfererons au travail de S. K. STEIN [15] sur la fondation des quasi-groupes. De nombreux exemples et une bonne bibliographie y sont proposés.

Nous nous intéressons ici aux groupoïdes distributifs les plus généraux.

En nous proposant de définir la notion de puissance d'un élément d'un groupoïde distributif, nous allons nous apercevoir du rôle fondamental des idempotents d'un tel groupoïde.

Nous verrons, entre autres, que pour qu'un groupoïde distributif ait tous ses éléments idempotents, il faut et il suffit qu'il soit globalement idempotent.

---

(1) L'indépendance de ces deux axiomes est démontrée par l'existence du groupoïde d'ordre 2 , $E(T)$, dont la table d'opération est

T	a	b
a	b	b
b	a	b

En effet,

$$a \, T \, (x \, T \, y) = (a \, T \, x) \, T \, (a \, T \, y) = b$$
$$b \, T \, (x \, T \, y) = (b \, T \, x) \, T \, (b \, T \, y) = x \, T \, y$$

et $(a \, T \, a) \, T \, a = b \, T \, a = a$, alors que $(a \, T \, a) \, T \, (a \, T \, a) = b \, T \, b = b$.

Nous appellerons grille un groupoïde distributif dont tous les éléments sont idempotents, et nous établirons le théorème de décomposition : Tout groupoïde distributif est une grille de demi-groupes de cube zéro (2).

A partir de ces résultats s'ouvrent plusieurs voies d'étude des groupoïdes distributifs [10], [11], [12].

Nous choisirons celle qui mène à une axiomatique des treillis analogue à celle que nous a proposée D. D. MILLER en 1965 [8]. D. D. MILLER nous a montré l'intérêt des axiomes d'absorption conditionnelle et nous a proposé un système de sept axiomes indépendants, les utilisant afin de remplacer les six axiomes indépendants classiques de la théorie des treillis [2].

Nous allons voir que les propriétés des groupoïdes distributifs nous permettent d'établir une axiomatique des treillis réduite à six postulats indépendants, où toutefois les seuls axiomes d'absorption utilisés sont les axiomes d'absorption conditionnelle. Nous trouverons également un nouveau système d'axiomes pour les treillis avec élément nul et universel.

Nous donnerons enfin une axiomatique des treillis distributifs à élément nul réduite à trois postulats indépendants.

1. Etude des éléments idempotents d'un groupoïde distributif.

Soient a un élément quelconque d'un groupoïde $E(T)$, et n un entier strictement positif.

Nous appelons puissance n-ième à gauche [resp. puissance n-ième à droite] de a l'élément a'^n [resp. a''^n] de E défini par $a'^1 = a$ et, pour $n \geqslant 2$, par la formule de récurrence

$$a'^n = a \, T \, a'^{n-1}$$

[resp. $a''^1 = a$ et, pour $n \geqslant 2$, par la formule de récurrence

$$a''^n = a''^{n-1} \, T \, a \quad].$$

Dans le cas où $a'^n = a''^n$, nous dirons que la puissance n-ième de a est définie.

Cette puissance n-ième est alors l'élément a^n de E tel que

(2) Dans le même sens que CLIFFORD et PRESTON [3] énoncent le résultat de SCHWARZ [13], [14] sous la forme : Tout demi-groupe périodique abélien est un demi-treillis de demi-groupes ne possédant qu'un seul idempotent.

$$a^n = a'^n = a''^n .$$

Si A est une partie de E, nous définirons A'^n, A''^n et, éventuellement, A^n conformément aux définitions ci-dessus par utilisation du groupoïde $\mathcal{P}(E)(T)$ ([1], p. 7).

THÉORÈME 1. - Soit a un élément d'un groupoïde distributif $E(T)$. Pour tout n, entier strictement positif, la puissance n-ième de a est définie.

Pour tout n, entier supérieur ou égal à 3, la puissance n-ième de a est un idempotent de E égal à la puissance 3e de a.

Nous établissons successivement que :

1° La puissance 3e de a est définie et égale à la puissance 2e de $a \, T \, a$, ce qui résulte de l'application des identités (D.G) et (D.D).

$$a'^3 = a \, T \, (a \, T \, a) = (a \, T \, a) \, T \, (a \, T \, a) = (a \, T \, a) \, T \, a = a''^3 .$$

2° La puissance 4e de a est définie et égale à la puissance 2e de a^3.

Par utilisation de (D.G) :

$$a'^4 = a \, T \, [a \, T \, (a \, T \, a)] = (a \, T \, a) \, T \, [a \, T \, (a \, T \, a)] = (a \, T \, a) \, T \, [(a \, T \, a) \, T \, (a \, T \, a)]$$
$$= (a \, T \, a)^2 \, T \, (a \, T \, a)^2 .$$

Par utilisation de (D.D) :

$$a''^4 = [(a \, T \, a) \, T \, a] \, T \, a = [(a \, T \, a) \, T \, a] \, T \, (a \, T \, a) = [(a \, T \, a) \, T \, (a \, T \, a)] \, T \, (a \, T \, a)$$
$$= (a \, T \, a)^2 \, T \, (a \, T \, a)^2 .$$

Par utilisation de 1° :

$$a^4 = a^3 \, T \, a^3 .$$

3° La puissance 3e de a est un idempotent de E, égale à la puissance 4e de a.

Par utilisation de (D.D) et de 1° :

$$a^3 \, T \, a^3 = [a \, T \, (a \, T \, a)] \, T \, [a \, T \, (a \, T \, a)] = (a \, T \, a) \, T \, (a \, T \, a) = a^3 .$$

Le 2° nous montre que $a^4 = a^3$.

4° Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, la puissance n-ième de a est définie et est égale à la puissance 3e de a, ce qui résulte du 3° et du fait que l'hypothèse de récurrence

$$a'^{n-1} = a''^{n-1} = a^3 \qquad (n \geqslant 4)$$

entraîne

$$a'^n = a \mathrm{T} a'^{n-1} = a \mathrm{T} a^3 = a'^4 = a^3 = a''^4 = a^3 \mathrm{T} a = a''^{n-1} \mathrm{T} a = a''^n .$$

COROLLAIRE 1. – Dans un groupoïde distributif $E(T)$, nous avons, pour tout couple d'entiers strictement positifs p et q, les identités :

$$a^p \mathrm{T} a^q = a^{p+q}$$

et

$$(a^p)^q = a^{pq} .$$

Nous démontrons ce corollaire par la méthode de disjonction des cas.

1° $p \geqslant 3$, $q \geqslant 3$:

$$a^p \mathrm{T} a^q = a^3 \mathrm{T} a^3 = a^3 = a^{p+q} .$$

2° $p \geqslant 3$, $q = 2$:

$$a^p \mathrm{T} a^q = a^3 \mathrm{T} a^2 = [(a \mathrm{T} a) \mathrm{T} a] \mathrm{T} (a \mathrm{T} a) = [(a \mathrm{T} a) \mathrm{T} a] \mathrm{T} a = a^4 = a^3 = a^{p+q} .$$

3° $p \geqslant 3$, $q = 1$:

$$a^p \mathrm{T} a^q = a^3 \mathrm{T} a = a^4 = a^3 = a^{p+q} .$$

Dans les cas 1°, 2°, 3°, il est immédiat que :

$$(a^p)^q = (a^3)^q = a^3 = a^{pq} .$$

4° $p = 2$, $q \geqslant 3$:

$$a^p \mathrm{T} a^q = a^2 \mathrm{T} a^3 = (a \mathrm{T} a) \mathrm{T} [a \mathrm{T} (a \mathrm{T} a)] = a \mathrm{T} [a \mathrm{T} (a \mathrm{T} a)] = a^4 = a^3 = a^{p+q} .$$

$$(a^p)^q = (a^2)^q = (a^2)^3 = a^2 \mathrm{T} [(a \mathrm{T} a) \mathrm{T} (a \mathrm{T} a)] = a^2 \mathrm{T} a^3 = a^4 = a^3 = a^{pq} .$$

5° $p = 2$, $q = 2$:

$$a^p \mathrm{T} a^q = a^2 \mathrm{T} a^2 = a^3 = a^{p+q} .$$

$$(a^p)^q = (a^2)^2 = a^3 = a^{pq} .$$

6° $p = 2$, $q = 1$:

$$a^p \mathbin{T} a^q = a^2 \mathbin{T} a = a^3 = a^{p+q} .$$

$$(a^p)^q = a^2 = a^{pq} .$$

7° $p = 1$, $q \geqslant 3$:

$$a^p \mathbin{T} a^q = a \mathbin{T} a^3 = a^4 = a^3 = a^{p+q} .$$

8° $p = 1$, $q = 2$:

$$a^p \mathbin{T} a^q = a \mathbin{T} a^2 = a^3 = a^{p+q} .$$

9° $p = 1$, $q = 1$:

$$a^p \mathbin{T} a^q = a \mathbin{T} a = a^2 = a^{p+q} .$$

Dans les cas 7°, 8°, 9°, il est immédiat que

$$(a^p)^q = a^q = a^{pq} .$$

COROLLAIRE 2.- Le sous-groupoïde du groupoïde distributif $E(T)$, engendré par un élément a de E , contient au plus trois éléments distincts ([3]). De plus les propriétés

1° $a^3 = a$,

2° $a^2 = a$

sont équivalentes.

En effet, si $a^3 = a$,

$$a^2 = a \mathbin{T} a = a^3 \mathbin{T} a^3 = a^3 = a$$

et si $a^2 = a$,

$$a^3 = a \mathbin{T} a^2 = a \mathbin{T} a = a^2 = a .$$

COROLLAIRE 3. - L'ensemble des idempotents d'un groupoïde distributif $E(T)$ est un idéal de E .

En effet, puisque pour tout élément a de E , a^3 est un idempotent de E , l'ensemble I des idempotents de E est non vide.

Comme pour tout élément x de E , et pour tout élément e de I ,

---

([3]) REMARQUE : Le sous-groupoïde d'un groupoïde distributif $E(T)$, engendré par deux éléments distincts a et b de E , peut comporter une infinité d'éléments distincts.

Nous prendrons pour exemple $E = \underset{\sim}{R}$ et $a \mathbin{T} b = \dfrac{a + b}{2}$.

$$(e\ T\ x)\ T\ (e\ T\ x) = (e\ T\ e)\ T\ x = e\ T\ x$$

et

$$(x\ T\ e)\ T\ (x\ T\ e) = x\ T\ (e\ T\ e) = x\ T\ e \quad [6]\ ,$$

I est un idéal de E .

THÉORÈME 2. - <u>La puissance</u> 3e <u>de tout groupoïde distributif</u> $E(T)$ <u>est définie. Elle est identique à l'ensemble des idempotents de</u> E .

Soient x , y , z trois éléments quelconques du groupoïde distributif $E(T)$. Les égalités

$$\begin{aligned} x\ T\ [y\ T\ z] &= (x\ T\ y)\ T\ (x\ T\ z) = [(x\ T\ y)\ T\ x]\ T\ [(x\ T\ y)\ T\ z] \\ &= [(x\ T\ x)\ T\ (y\ T\ x)]\ T\ [(x\ T\ y)\ T\ z] = [(x^2\ T\ y)\ T\ x^3]\ T\ [(x\ T\ y)\ T\ z]\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x\ T\ y]\ T\ z &= (x\ T\ z)\ T\ (y\ T\ z) = [x\ T\ (y\ T\ z)]\ T\ [z\ T\ (y\ T\ z)] \\ &= [x\ T\ (y\ T\ z)]\ T\ [(z\ T\ y)\ T\ (z\ T\ z)] \\ &= [x\ T\ (y\ T\ z)]\ T\ [z^3\ T\ (y\ T\ z^2)]\ , \end{aligned}$$

les résultats du théorème 1 et de son corollaire 3 montrent que $x\ T\ [y\ T\ z]$ et $[x\ T\ y]\ T\ z$ sont deux idempotents de $E(T)$.

Ainsi, si I désigne l'ensemble des idempotents de $E(T)$, $E'^3 \subseteq I$ et $E''^3 \subseteq I$.

Mais comme tout idempotent e de E vérifie

$$e = e\ T\ (e\ T\ e) = (e\ T\ e)\ T\ e\ ,$$

il vient

$$E'^3 = E''^3 = I$$

ce qui prouve que

$$E^3 = I\ .$$

COROLLAIRE 1. - <u>Il y a identité entre les groupoïdes distributifs ne possédant qu'un idempotent et les demi-groupes de cube zéro</u>.

COROLLAIRE 2. - <u>Pour qu'un groupoïde distributif ait tous ses éléments idempotents, il faut et il suffit qu'il soit globalement idempotent</u>.

Soient $E(T)$ un groupoïde distributif, et I l'ensemble de ses idempotents.

L'égalité $E = I$ entraîne $E = E^2$.

Réciproquement, l'égalité $E = E^2$ entraîne

$$E = E^2 = E\ T\ E = E\ T\ E^2 = E^3 = I\ .$$

Nous appellerons grille un groupoïde distributif dont tous les éléments sont idempotents.

Il découle du corollaire 2 du théorème 2 que tout groupoïde distributif vérifiant l'existence des quotients d'un côté est une grille.

Ce même corollaire permet d'énoncer que tout groupoïde distributif, possédant un élément neutre d'un côté, est une grille (4) [6].

2. Décomposition d'un groupoïde distributif en demi-groupes de cube zéro.

Rappelons quelques définitions empruntées à A. H. CLIFFORD et G. B. PRESTON [3].

Soient $E(T)$ un groupoïde, et $(S_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ une partition de E telle que, pour tout élément α de Ω, S_α soit une partie stable de E, et telle qu'à tout couple $(\alpha\ ,\ \beta)$ d'éléments de Ω, on puisse associer un élément γ de Ω vérifiant $S_\alpha\ T\ S_\beta \subseteq S_\gamma$.

Nous dirons que, dans ces conditions, E est le groupoïde distributif des parties stables $(S_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$. Si, dans les mêmes conditions, l'opération interne $(\alpha\ ,\ \beta) \longrightarrow \gamma$ de Ω est associative [resp. associative et commutative, distributive], nous dirons que E est la bande [resp. le demi-treillis, la grille] des parties stables $(S_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$.

Soient $E(T)$ un groupoïde distributif, et I l'ensemble de ses idempotents.

A tout élément e de I, associons la partie S_e de E définie par $S_e = \{x \in E\ ,\ x^3 = e\}$. Nous savons que

$$S_e = \{x \in E\ ;\ \exists\ n \in \underset{\sim}{N}^*\ ,\ x^n = e\}\ .$$

Nous nous proposons de démontrer le théorème de décomposition suivant :

THÉORÈME 3. - *Le groupoïde distributif* $E(T)$ *est la grille des demi-groupes de cube zéro* $(S_e)_{e\in I}$.

Nous établirons une série de lemmes.

LEMME 1. - *La famille* $(S_e)_{e\in I}$ *de parties de* E *constitue une partition de* E .

---

(4) Nous avons étudié dans [11] la possibilité pour un groupoïde distributif, possédant un élément neutre à gauche, de vérifier l'existence ou l'axiome des quotients d'un côté.

En effet, pour tout élément x de E, x^3 est un idempotent de E et x appartient à S_{x^3}. De plus, si l'élément x de E appartient à la fois à S_e et à S_f, il vient $x^3 = e$, $x^3 = f$, soit $e = f$.

LEMME 2. - Pour tout élément idempotent e de $E(T)$

S_e contient un seul idempotent de $E(T)$, à savoir e.

Ce lemme résulte immédiatement de la définition de S_e et du lemme 1.

LEMME 3. - Si e et f sont deux idempotents de $E(T)$

$$e \, T \, S_f = S_e \, T \, f = \{e \, T \, f\} .$$

En effet, si y est un élément de S_f, $y^3 = f$, et $e \, T \, y$ est un idempotent de $E(T)$.

Par suite,

$$e \, T \, y = (e \, T \, y) \, T \, [(e \, T \, y) \, T \, (e \, T \, y)] = (e \, T \, y) \, T \, [e \, T \, y^2] = e \, T \, [y \, T \, y^2] = E \, T \, y^3$$
$$= e \, T \, f .$$

De même, si x est un élément de S_e, $x^3 = e$ et

$$x \, T \, f = (x \, T \, f) \, T \, [(x \, T \, f) \, T \, (x \, T \, f)] = (x \, T \, f) \, T \, (x^2 \, T \, f) = (x \, T \, x^3) \, T \, f = x^3 \, T \, f$$
$$= e \, T \, f .$$

LEMME 4. - Si e et f sont deux idempotents de $E(T)$:

$$S_e \, T \, S_f \subseteq S_{eTf} .$$

Si x est un élément de S_e, $x^3 = e$ et, si y est un élément de S_f, $y^3 = f$.

Par suite,

$$(x \, T \, y)^3 = (x \, T \, y) \, T \, [(x \, T \, y) \, T \, (x \, T \, y)] = (x \, T \, y) \, T \, [x^2 \, T \, y] = (x \, T \, x^2) \, T \, y$$
$$= x^3 \, T \, y = e \, T \, y = e \, T \, f$$

ce qui prouve que $x \, T \, y$ appartient à S_{eTf}.

LEMME 5. - Pour tout élément idempotent e de $E(T)$, S_e est une partie stable de $E(T)$ maximale dans l'ensemble U des parties stables de $E(T)$ possédant un seul idempotent.

Toute partie stable de $E(T)$ possédant un seul idempotent e, maximale dans U, est la partie S_e associée à e. S_e a une structure de demi-groupe de cube

<u>zéro relativement à la restriction à</u> S_e <u>de la loi de composition du groupoïde distributif</u> $E(T)$.

Le lemme 4 nous montre immédiatement que S_e est une partie stable de $E(T)$.

Le corollaire 1 du théorème 2 et le lemme 2 nous montrent que S_e est un demi-groupe de cube zéro. Si Σ est un élément de U contenant S_e , pour tout élément x de Σ , x^3 est un idempotent de $E(T)$: x^3 coïncide avec e , ce qui prouve que $\Sigma = S_e$.

La démonstration du théorème 3 résulte alors immédiatement des lemmes 1, 4 et 5.

COROLLAIRE 1. - <u>Pour tout triplet</u> (e , f , g) <u>d'éléments idempotents de</u> $E(T)$, <u>on a les égalités</u>

$$(S_e \mathbin{T} S_f) \mathbin{T} S_g = \{(e \mathbin{T} f) \mathbin{T} g\} \quad \text{et} \quad S_e \mathbin{T} (S_f \mathbin{T} S_g) = \{e \mathbin{T} (f \mathbin{T} g)\} .$$

D'après le lemme 4,

$$(S_e \mathbin{T} S_f) \mathbin{T} S_g \subseteq S_{(eTf)Tg} .$$

D'après le théorème 2,

$$(S_e \mathbin{T} S_f) \mathbin{T} S_g \subseteq I .$$

Il en résulte,

$$(S_e \mathbin{T} S_f) \mathbin{T} S_g = \{(e \mathbin{T} f) \mathbin{T} g\} .$$

De même,

$$S_e \mathbin{T} (S_f \mathbin{T} S_g) = \{e \mathbin{T} (f \mathbin{T} g)\} .$$

COROLLAIRE 2. - <u>Pour tout couple</u> (a , b) <u>d'éléments d'un groupoïde</u> $E(T)$. <u>pour tout</u> p <u>entier strictement positif, on a l'égalité</u>

$$(a \mathbin{T} b)^p = a^p \mathbin{T} b^p .$$

Cette règle est valable pour $p = 1$, par définition de a^1 .

D'autre part, le corollaire 1 nous montre que

$$(a \mathbin{T} b)^2 = (a \mathbin{T} b) \mathbin{T} (a \mathbin{T} b) = a \mathbin{T} (b \mathbin{T} b) = a^3 \mathbin{T} (b^3 \mathbin{T} b^3) = a^3 \mathbin{T} b^3$$

et

$$a^2 \mathbin{T} b^2 = a^2 \mathbin{T} (b \mathbin{T} b) = a^3 \mathbin{T} (b^3 \mathbin{T} b^3) = a^3 \mathbin{T} b^3$$

ce qui prouve que $(a \mathbin{T} b)^2 = a^2 \mathbin{T} b^2$.

Enfin, pour $p \geqslant 3$,

$$(a \mathbin{T} b)^p = (a \mathbin{T} b)^3 = (a \mathbin{T} b)^2 \mathbin{T} (a \mathbin{T} b) = (a^3 \mathbin{T} b^3) \mathbin{T} (a \mathbin{T} b)$$
$$= (a^3 \mathbin{T} b^3) \mathbin{T} (a^3 \mathbin{T} b^3) = a^3 \mathbin{T} b^3 = a^p \mathbin{T} b^p ,$$

COROLLAIRE 3. - La relation binaire R , définie dans un groupoïde $E(T)$ par $x \mathrel{R} y \Longleftrightarrow x^3 = y^3$, est une congruence de $E(T)$. Le groupoïde distributif E/R est isomorphe à la grille I des idempotents de E . I est une image homomorphe idempotente maximale de E . R est l'intersection de toutes les congruences idempotentes de E [3].

R est la relation d'équivalence de E associée à la partition $(S_e)_{e \in I}$ de E .

De plus, pour tout élément z de E , la relation $x \mathrel{R} y$ entraîne

$$(x \mathbin{T} z)^3 = x^3 \mathbin{T} z^3 = y^3 \mathbin{T} z^3 = (y \mathbin{T} z)^3$$

et

$$(z \mathbin{T} x)^3 = z^3 \mathbin{T} x^3 = z^3 \mathbin{T} y^3 = (z \mathbin{T} y)^3 ,$$

R est une congruence de E . Le théorème d'homomorphisme principal nous montre que le groupoïde distributif quotient E/R est isomorphe à la grille I des idempotents de E , conformément au schéma

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "x \to x^3"above, "f"below] \arrow[d, "\varphi"', "x \to S_{x^3}"] & & I \\
E/R \arrow[urr, "\theta"', "S_e \to e"] & &
\end{tikzcd}$$

où $f = \theta \circ \varphi$.

Soient $G(T)$ une grille homomorphe au groupoïde distributif $E(T)$, et f' l'homomorphisme correspondant de $E(T)$ sur $G(T)$.

La relation $x \mathrel{R} y$ entraîne

$$f'(x) = [f'(x)]^3 = f'(x^3) = f'(y^3) = [f'(y)]^3 = f'(y)$$

ce qui montre que nous pouvons définir une application θ' de E/R sur G en associant à tout élément S_e de E/R l'élément $f'(x)$ de G , indépendant de x élément de S_e . θ' est un homomorphisme de E/R sur G :

$$\theta'[S_e \mathbin{T} S_g] = f'(e \mathbin{T} g) = f'(e) \mathbin{T} f'(g) = \theta'(S_e) \mathbin{T} \theta'(S_g)$$

ce qui prouve que toute image homomorphe idempotente $G(T)$ de $E(T)$ est telle qu'il existe un homomorphisme de E/R sur G : I est une image homomorphe idempotente maximale de E. R est l'intersection de toutes les congruences idempotentes de E.

Le théorème 3 permet de ramener l'étude des groupoïdes distributifs à l'étude de ceux d'entre eux dont les éléments sont idempotents.

Considérons une grille $\Omega(T)$ et une famille équipotente à Ω de demi-groupes $[S_\alpha(T_\alpha)]$ $(\alpha \in \Omega)$ telle que les S_α soient disjoints deux à deux et vérifient les conditions : $S_\alpha(T_\alpha)$ possède un élément zéro e_α et

$$(S_\alpha T_\alpha S_\alpha)T_\alpha S_\alpha = S_\alpha T_\alpha(S_\alpha T_\alpha S_\alpha) = \{e_\alpha\} .$$

Pour tout $\alpha \in \Omega$, considérons la partition de S_α :

$$P_\alpha = (N_{0\alpha} , N_{1\alpha} , N_{2\alpha})$$

où

$$N_{0\alpha} = \{e_\alpha\}$$
$$N_{1\alpha} = \{x \in S_\alpha \ ; \ x \in S_\alpha T_\alpha S_\alpha \ \text{ et } \ x \neq e_\alpha\}$$
$$N_{2\alpha} = \{x \in S_\alpha \ ; \ x \notin S_\alpha T_\alpha S_\alpha\}$$

ainsi que la partition de $N_{2\alpha}$: $P'_\alpha = (M_{1\alpha} , M_{2\alpha})$ où

$$M_{1\alpha} = \{x \in N_{2\alpha}, \ S_\alpha T_\alpha\{x\} = \{x\}T_\alpha S_\alpha = \{e_\alpha\}\}$$
$$M_{2\alpha} = \{x \in S_\alpha \ , \ (S_\alpha T_\alpha\{x\}) \cup (\{x\}T_\alpha S_\alpha) \neq \{e_\alpha\}\} .$$

Soit Δ la diagonale de Ω^2.

THÉORÈME 4. - <u>Toute famille d'applications</u> $(\Phi_{\alpha\beta})$, $(\alpha , \beta) \in \Omega^2 - \Delta$, <u>de</u> $S_\alpha \times S_\beta$ <u>dans</u> $S_{\alpha T \beta}$ <u>vérifiant, pour tout</u> $(\alpha , \beta) \in \Omega^2 - \Delta$ <u>et pour tout</u> $(\alpha T \beta , \gamma) \in \Omega^2 - \Delta$, <u>les conditions (1), (2), (3) et (4) suivantes</u> :

(1) $\Phi_{\alpha\beta}(N_{0\alpha} \times S_\beta) = N_{0\alpha T\beta}$; $\Phi_{\alpha\beta}(S_\alpha \times N_{0\beta}) = N_{0\alpha T\beta}$;

(2) $\Phi_{\alpha\beta}(N_{1\alpha} \times S_\beta) = N_{0\alpha T\beta}$; $\Phi_{\alpha\beta}(S_\alpha \times N_{1\beta}) = N_{0\alpha T\beta}$;

(3) $\Phi_{\alpha\beta}(N_{2\alpha} \times N_{2\beta}) \subseteq M_{1\alpha T\beta} \cup N_{1\alpha T\beta} \cup N_{0\alpha T\beta}$;

(4) $A_{\alpha\beta} = M_{1\alpha T\beta} \cap \Phi_{\alpha\beta}(N_{2\alpha} \times N_{2\beta}) \neq \emptyset$ entraîne

$$\Phi_{\alpha T\beta\gamma}[A_{\alpha\beta} \times S_\gamma] = N_{0(\alpha T\beta)T\gamma} \quad \text{et} \quad \Phi_{\gamma,\alpha T\beta}[S_\gamma \times A_{\alpha\beta}] = N_{0\gamma T(\alpha T\beta)}$$

<u>définit sur</u> $E = \bigcup_{\alpha \in \Omega} S_\alpha$ <u>une structure de groupoïde distributif</u> $E(\star)$:

$$x \star y = \Phi_{\alpha\beta}(x\,,\,y) \quad \text{si} \quad x \in S_\alpha\,, \quad y \in S_\beta \quad \text{et} \quad \alpha \neq \beta$$

$$x \star y = x\,T_\alpha\,y \quad \text{si} \quad x \in S_\alpha\,, \quad y \in S_\beta \quad \text{et} \quad \alpha = \beta\,.$$

<u>Tout groupoïde distributif est obtenu de cette façon</u>.

Ce théorème 4 n'est qu'une conséquence immédiate du théorème 3 et de son corollaire 1.

Illustrons-le par une construction de groupoïde distributif .

Considérons la grille d'ordre 3 , $E(T)$ [9], et les trois demi-groupes zéro $S_e(T_e)$, $S_f(T_f)$, $S_g(T_g)$ dont les tables d'opération sont

$E(T)$	e	f	g
e	e	g	f
f	g	f	e
g	f	e	g

$S_e(T_e)$	e	x
e	e	e
x	e	e

$S_f(T_f)$	f	y
f	f	f
y	f	f

$S_g(T_g)$	g	z
g	g	g
z	g	g

On peut construire le groupoïde distributif non idempotent $A(\star)$ dont la table d'opération est

$\star$	e	f	g	x	y	z
e	e	g	f	e	g	f
f	g	f	e	g	f	e
g	f	e	g	f	e	g
x	e	g	f	e	z	f
y	g	f	e	f	f	e
z	f	e	g	f	e	g

On remarque que le choix $x \star y = z$ entraîne $x \star z = f$, $y \star z = e$, $z \star x = f$, $z \star y = e$.

Au lieu de choisir $y \star x = f$, nous aurions pu choisir $y \star x = z$ (5).

3. Axiomatique des demi-treillis.

W. FELSCHER et F. KLEIN-BARMEN [4] ont caractérisé les demi-treillis à élément neutre comme étant les demi-groupes commutatifs à élément neutre véréfiant la condition (D.G).

Nous montrons ici qu'il est possible de supprimer l'hypothèse concernant l'associativité.

LEMME 1. - *Soit* $E(T)$ *un groupoïde distributif. La relation binaire définie dans la grille* $I(T)$ *des idempotents de* E *par* $a \leqslant b$, *si et seulement si* $a\ T\ b = b\ T\ a = a$, *est une relation d'ordre compatible avec* T .

Cette relation binaire, définie dans $I(T)$, est en effet :

1° *réflexive* :

$$a\ T\ a = a\ T\ a = a \text{ pour tout élément } a \text{ de } I ,$$

2° *antisymétrique* :

$$a\ T\ b = b\ T\ a = a \text{ et } b\ T\ a = a\ T\ b = b \text{ entraînent } a = b ,$$

3° *transitive* :

$$a\ T\ b = b\ T\ a = a \text{ et } b\ T\ c = c\ T\ b = b ,$$

entraînent

$$a\ T\ c = (a\ T\ b)\ T\ c = (a\ T\ c)T(b\ T\ c) = (a\ T\ c)\ T\ b = (a\ T\ b)\ T\ (c\ T\ b) = a\ T\ b = a$$

et

$$c\ T\ a = c\ T\ (a\ T\ b) = (c\ T\ a)T(c\ T\ b) = (c\ T\ a)\ T\ b = (c\ T\ b)\ T\ (a\ T\ b) = b\ T\ a = a ,$$

4° *compatible avec* T : $a\ T\ b = b\ T\ a = a$ entraînent, pour tout élément c de I :

$$(a\ T\ c)\ T\ (b\ T\ c) = (a\ T\ b)\ T\ c = a\ T\ c = (b\ T\ a)\ T\ c = (b\ T\ c)\ T\ (a\ T\ c)$$

et

$$(c\ T\ a)\ T\ (c\ T\ b) = c\ T\ (a\ T\ b) = c\ T\ a = c\ T\ (b\ T\ a) = (c\ T\ b)\ T\ (c\ T\ a) .$$

---

(5) REMARQUE : Les théorèmes 3 et 4 ont un écho particulièrement simple en théorie des *anneaux non associatifs dont le groupoïde multiplicatif est distributif : un tel anneau non associatif est isomorphe au produit direct d'un anneau de cube zéro par un anneau non associatif de caractéristique* 2 *ayant pour groupoïde multiplicatif une grille commutative* [note à paraître].

LEMME 2. - Si un groupoïde distributif $E(T)$ possède un élément neutre à gauche [resp. à droite], il vérifie l'axiome (R.D) $x \; T \; (y \; T \; x) = y \; T \; x$ [resp. (R.G) $(x \; T \; y) \; T \; x = x \; T \; y$].

Conformément à la définition de N. KIMURA [7], nous appellerons cet axiome : axiome de régularité à droite [resp. régularité à gauche].

Soit e l'élément neutre à gauche du groupoïde distributif $E(T)$. Il vient

$$x \; T \; (y \; T \; x) = (e \; T \; x) \; T \; (y \; T \; x) = (e \; T \; y) \; T \; x = y \; T \; x \; .$$

THÉORÈME 5. - Toute grille commutative régulière à droite est un demi-treillis. Réciproquement, tout demi-treillis est une grille commutative régulière à droite.

Soit $E(T)$ une grille commutative régulière à droite.

1° Tous les éléments de E étant idempotents, le lemme 1 nous montre que la relation binaire, définie dans E par

$$a \leqslant b \text{ si et seulement si } a \; T \; b = b \; T \; a = a \; ,$$

est une relation d'ordre.

2° La commutativité et la régularité à droite de E entraînent que toute partie de E , comprenant deux éléments a , b , possède relativement à la relation d'ordre $\leqslant$ au moins un élément minorant : l'élément $a \; T \; b$.

En effet,

$$(a \; T \; b) \; T \; a = a \; T \; (b \; T \; a) = b \; T \; a = a \; T \; b$$

et

$$(a \; T \; b) \; T \; b = b \; T \; (a \; T \; b) = a \; T \; b \; .$$

3° Soit z un élément minorant de la partie $\{a , b\}$ de E . La compatibilité de la relation d'ordre avec T nous montre que

$$z \leqslant a \text{ et } z \leqslant b \text{ entraînent } z = z \; T \; z \leqslant a \; T \; b \; .$$

Toute partie $\{a , b\}$ de E à deux éléments admet un plus grand minorant

$$\inf \{a , b\} = a \; T \; b \; .$$

$E(T)$, ordonné par la relation $\leqslant$, a par suite une structure de inf-demi-treillis (6).

---

(6) REMARQUE : Nous aurions pu démontrer directement l'associativité de la loi T . Soient a , b , c trois éléments quelconques de $E(T)$. Nous avons

$$\begin{aligned} a \; T \; (b \; T \; c) &= (b \; T \; c) \; T \; [a \; T \; (b \; T \; c)] = [c \; T \; (b \; T \; c)] \; T \; [a \; T \; (b \; T \; c)] \\ &= (c \; T \; a) \; T \; (b \; T \; c) = (c \; T \; a) \; T \; (c \; T \; b) = c \; T \; (a \; T \; b) = (a \; T \; b) \; T \; c \; . \end{aligned}$$

Réciproquement, si $E(T)$ est un inf-demi-treillis, nous savons que

$$x \,T\, (y \,T\, z) = (x \,T\, y) \,T\, z = [(x \,T\, x) \,T\, y] \,T\, z = [x \,T\, (x \,T\, y)] \,T\, z$$
$$= [(x \,T\, y) \,T\, x] \,T\, z = (x \,T\, y) \,T\, (x \,T\, z)$$

et

$$x \,T\, (y \,T\, x) = (y \,T\, x) \,T\, x = y \,T\, (x \,T\, x) = y \,T\, x$$

(ces propriétés se démontrent encore plus facilement par utilisation de la relation d'ordre).

$E(T)$ est une grille commutative régulière à droite.

Nous pouvons, par conséquent, donner une nouvelle axiomatique des demi-treillis.

On appelle demi-treillis, un groupoïde $E(T)$ satisfaisant aux axiomes :

(I) $$x \,T\, x = x$$

(C) $$x \,T\, y = y \,T\, x$$

(D.G) $$x \,T\, (y \,T\, z) = (x \,T\, y) \,T\, (x \,T\, z)$$

(R.D) $$x \,T\, (y \,T\, x) = y \,T\, x \,.$$

Des exemples, qui démontrent que chacun de ces axiomes est idépendant des trois autres, sont constitués par les groupoïdes $A_1(T)$, $A_2(T)$, $A_3(T)$, $A_4(T)$ dont les tables d'opération sont respectivement les suivantes

A_1

T	a	b
a	a	a
b	a	a

A_2

T	a	b
a	a	b
b	a	b

A_3

T	a	b	c
a	a	b	a
b	b	b	c
c	a	c	c

A_4

T	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

Pour vérifier la régularité à droite de $A_3(T)$, il suffit de remarquer que toute partie à deux éléments de A_3 est stable pour T et est, relativement à la restriction de T , un demi-groupe avec zéro.

$A_3(T)$ ne vérifie pas (D.G), puisque $b \,T\, (a \,T\, c) = b \,T\, a = b$, alors que $(b \,T\, a) \,T\, (b \,T\, c) = b \,T\, c = c$.

$A_4(T)$ est, à un isomorphisme près, le seul quasi-groupe distributif d'ordre 3 [9].

$A_4(T)$ ne vérifie pas (R.D), puisque $a \,T\, (b \,T\, a) = a \,T\, c = b$, alors que $b \,T\, a = c$.

COROLLAIRE. - Tout groupoïde distributif, possédant un élément neutre, est un demi-treillis à élément neutre. Réciproquement, tout demi-treillis à élément neutre est un groupoïde distributif possédant un élément neutre.

En effet, si un groupoïde distributif $E(T)$ possède un élément neutre e, le corollaire du théorème 2 nous a montré que tous les éléments de E sont idempotents. Comme e est élément neutre à gauche, le lemme 2 du théorème 5 nous montre que $E(T)$ vérifie l'axiome de régularité à droite. Comme e est également élément neutre à droite, ce même lemme nous montre que $E(T)$ vérifie l'axiome de régularité à gauche. Par suite, $E(T)$ vérifie

$$x \; T \; y = (x \; T \; y) \; T \; x = (x \; T \; x) \; T \; (y \; T \; x) = x \; T \; (y \; T \; x) = y \; T \; x ,$$

c'est-à-dire l'axiome de commutativité.

$E(T)$ vérifie les axiomes (I), (C), (D.G), (R.D), ce qui prouve que $E(T)$ est un demi-treillis.

La réciproque est immédiate.

Dans le cas d'un inf-demi-treillis $E(T)$, l'élément neutre de $E(T)$ est l'élément universel de $E(T)$.

Ce corollaire nous permet de donner une nouvelle axiomatique des demi-treillis à élément neutre :

On appelle demi-treillis à élément neutre un groupoïde $E(T)$ satisfaisant aux axiomes :

(N) Existence d'un élément neutre

(D.G) $x \; T \; (y \; T \; z) = (x \; T \; y) \; T \; (x \; T \; z)$

(D.D) $(x \; T \; y) \; T \; z = (x \; T \; z) \; T \; (y \; T \; z)$.

Des exemples, qui montrent que chacun de ces axiomes est indépendant des deux autres, sont constitués par le groupoïde $A_4(T)$ déjà mentionné et par les groupoïdes $A_5(T)$, $A_5'(T)$ dont les tables d'opération sont

T	a	b	c
a	a	b	a
b	a	b	b
c	a	b	c

T	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	a	b	c

4. Axiomatique des treillis.

Considérons d'abord les paires ipso-duales d'axiomes suivantes, respectivement d'absorption, d'absorption conditionnelle, de distributivité à gauche, de commutativité, de régularité à droite, d'associativité, d'idempotence, de distributivité à droite, de régularité à gauche

(0) $(x \vee y) \wedge x = x$ (0') $(x \wedge y) \vee x = x$

(1) $x \vee z = z$ entraîne $z \wedge x = x$ (1') $x \wedge z = z$ entraîne $z \vee x = x$

(2) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee (x \vee z)$ (2') $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge (x \wedge z)$

(3) $x \vee y = y \vee x$ (3') $x \wedge y = y \wedge x$

(4) $x \vee (y \vee x) = y \vee x$ (4') $x \wedge (y \wedge x) = y \wedge x$

(5) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (5') $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

(6) $x \vee x = x$ (6') $x \wedge x = x$

(7) $(x \vee y) \vee z = (x \vee z) \vee (y \vee z)$ (7') $(x \wedge y) \wedge z = (x \wedge z) \wedge (y \wedge z)$

(8) $(x \vee y) \vee x = x \vee y$ (8') $(x \wedge y) \wedge x = x \wedge y$.

L'axiomatique classique de la théorie des treillis [2] utilise les six axiomes indépendants (0), (0'), (3), (3'), (5), (5').

D. D. MILLER [8] nous a montré que l'axiome (0) [resp. (0')] entraîne l'axiome (1) [resp. (1')] et que l'implication réciproque : (1) entraîne (0) [resp. (1') entraîne (0')] n'est pas valable. Puis il nous a proposé une axiomatique de la théorie des treillis utilisant sept axiomes indépendants (1), (1'), (3), (3'), (5), (5'), (6). La caractérisation des treillis en tant que système de double composition $E(\vee, \wedge)$, vérifiant les six axiomes (0), (0'), (2), (2'), (3), (3'), a été faite par W. FELSCHER [5].

Compte-tenu du résultat du théorème 3, il est possible de simplifier la démonstration de W. FELSCHER par utilisation du schéma suivant :

$$(0) \Longrightarrow (1) \; ; \qquad (0') \Longrightarrow (1') \; ;$$

$$(0), (1'), (3) \Longrightarrow (4) \; ; \qquad (0'), (1), (3') \Longrightarrow (4') \; ;$$

$$(0), (0'), (3) \Longrightarrow (6') \; ; \qquad (0), (0'), (3') \Longrightarrow (6) \; ;$$

$$(6), (3), (2), (4) \Longrightarrow (5) \; ; \qquad (6'), (3'), (2'), (4') \Longrightarrow (5') \; ;$$

La démonstration de l'indépendance des six axiomes (0), (0'), (2), (2'), (3), (3') utilise les mêmes exemples que celle de l'indépendance des six axiomes classiques (0), (0'), (3), (3'), (5), (5').

Dans son étude, W. FELSCHER a montré également que le système des sept axiomes (1), (1'), (2), (2'), (3), (3'), (6) ne suffit pas pour la caractérisation d'un treillis. W. FELSCHER a pris pour exemple le système de double composition $E(\vee , \wedge)$, où $E(\vee)$ et $E(\wedge)$ coïncident tous deux avec le groupoïde $A_4(T)$ déjà cité.

Nous nous proposons d'établir ici une axiomatique des treillis réduite à six postulats indépendants, où les seuls axiomes d'absorption utilisés sont les axiomes d'absorption conditionnelle (1), (1').

Nous nous proposons plus précisément de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 6. – Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant aux six axiomes indépendants :

(1) $z \vee z = z$ entraîne $z \wedge x = x$

(1') $x \wedge z = z$ entraîne $z \vee x = x$

(2) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee (x \vee z)$

(2') $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge (x \wedge z)$

(4) $x \vee (y \vee x) = y \vee x$

(3') $x \wedge y = y \wedge x$.

Nous établirons une série de lemmes.

LEMME 1. – Si un sytème $E(\vee , \wedge)$ satisfait à (1), (1'), (2'), (4) et (3') , il satisfait à (6) et (6'). En particulier $E(\wedge)$ est une grille.

Soit a un élément quelconque du système $E(\vee , \wedge)$, satisfaisant à (1), (1'), (2'), (4) et (3'). (4) nous montre que $a \vee (a \vee a) = a \vee a$. Par utilisation de (1), il vient $(a \vee a) \wedge a = a$, ce qui prouve que le groupoïde $E(\wedge)$ est globalement idempotent. Comme d'après (2') et (3'), $E(\wedge)$ est un groupoïde distributif, le corollaire 2 du théorème 2 nous permet d'affirmer que tous les éléments de $E(\wedge)$ sont idempotents : $E(\wedge)$ est une grille.

(1') nous montre alors que tous les éléments de $E(\vee)$ sont idempotents.

LEMME 2. – Si un groupoïde $E(\vee)$ satisfait à (2), (4) et (6), il satisfait à :

$$(\alpha) \qquad (y \vee x) \vee y = x \vee y$$

et à

$$(\beta) \qquad [(y \vee x) \vee (x \vee y)] \vee (x \vee y) = x \vee y .$$

En effet, si a et b sont deux éléments quelconques de $E(\vee)$,

$$a \vee b = b \vee (a \vee b) = (b \vee a) \vee (b \vee b) = (b \vee a) \vee b$$

ce qui démontre (α).

Par suite, $(a \vee b) \vee a = b \vee a$ et

$$a \vee b = (a \vee b) \vee (a \vee b) = [(a \vee b) \vee a] \vee [(a \vee b) \vee b]$$
$$= (b \vee a) \vee [(a \vee b) \vee b] = [(b \vee a) \vee (a \vee b)] \vee [(b \vee a) \vee b] ,$$

d'où il vient

$$[(b \vee a) \vee (a \vee b)] \vee (a \vee b) = (a \vee b)$$

ce qui démontre (β).

LEMME 3. - <u>Si un système de double composition</u> $E(\vee , \wedge)$ <u>satisfait à (1), (2), (4), (6) et (3'), il satisfait à</u>

(γ) $$(y \vee x) \vee (x \vee y) = x \vee y .$$

En effet, si a et b sont deux éléments quelconques de $E(\vee , \wedge)$ on a

$$[(b \vee a) \vee (a \vee b)] \vee (a \vee b) = a \vee b \quad \text{en utilisant } (\beta)$$

et

$$(a \vee b) \vee [(b \vee a) \vee (a \vee b)] = (b \vee a) \vee (a \vee b) \quad \text{en utilisant } (4)$$

(1) nous montre que

$$(a \vee b) \wedge [(b \vee a) \vee (a \vee b)] = (b \vee a) \vee (a \vee b)$$

et

$$[(b \vee a) \vee (a \vee b)] \wedge (a \vee b) = a \vee b ,$$

d'où il vient d'après (3')

$$(b \vee a) \vee (a \vee b) = a \vee b \quad \text{ce qui démontre } (\gamma) .$$

LEMME 4. - <u>Si un système de double composition</u> $E(\vee , \wedge)$ <u>satisfait à (1), (1'), (2), (2'), (4) et (3')</u>, $E(\vee)$ <u>est un demi-treillis</u>.

En effet, si a et b sont deux éléments quelconques de $E(\vee , \wedge)$, il vient, par utilisation de (γ), identité valable dans $E(\vee)$ d'après les lemmes 1 et 3,

$$(b \vee a) \vee (a \vee b) = a \vee b$$

et

$$(a \vee b) \vee (b \vee a) = b \vee a$$

(1) nous montre que

$$(a \vee b) \wedge (b \vee a) = b \vee a$$

et

$$(b \vee a) \wedge (a \vee b) = a \vee b ,$$

d'où il vient d'après (3')

$$b \vee a = a \vee b$$

ce qui prouve que l'axiome de commutativité (3) est vérifié par $E(\vee)$. $E(\vee)$ satisfait à (6), (2), (3), (4). D'après le théorème 5, $E(\vee)$ est un demi-treillis.

LEMME 5. - Si un système de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfait à (1), (1'), (2), (2'), (4) et (3'), $E(\wedge)$ est un demi-treillis.

En effet, pour tout couple a , b d'éléments de E , (4) nous montre que $a \vee (b \vee a) = b \vee a$, d'où il vient d'après (1)

$$(b \vee a) \wedge a = a ,$$

d'où, en tenant compte de (3') et (3) [valable dans $E(\vee)$ d'après le lemme 4],

$$a \wedge (a \vee b) = a .$$

Par suite, en utilisant encore (3'), (2) et (3') ,

$$a \wedge (b \wedge a) = [a \wedge (a \vee b)] \wedge (a \wedge b) = a \wedge [(a \vee b) \wedge b] = a \wedge b = b \wedge a$$

ce qui prouve que l'axiome de régularité à droite (4') est vérifié par $E(\wedge)$.

$E(\wedge)$ satisfait à (6'), (2'), (3'), (4'). D'après le théorème 3, $E(\wedge)$ est un demi-treillis.

A l'aide des lemmes 4 et 5, démontrons le théorème 6.

Si $E(\vee , \wedge)$ est un système de double composition vérifiant (1), (1'), (2), (2'), (4) et (3'), le lemme 4 nous montre que $E(\vee)$ est un sup-demi-treillis relativement à la relation d'ordre définie par :

$$x \leq_1 y \text{ si et seulement si } x \vee y = y ,$$

et le lemme 5 nous montre que $E(\wedge)$ est un inf-demi-treillis relativement à la relation d'ordre définie par :

$$x \leq_2 y \text{ si et seulement si } y \wedge x = x .$$

Les conditions (1) et (1') nous montrent que les deux relations d'ordre $\leq_1$ et $\leq_2$ sont confondues. $E(\vee , \wedge)$ est par suite un treillis : $x \vee y$ est le plus petit majorant de la partie de E à deux éléments $\{x , y\}$, alors que $x \wedge y$ est le plus grand minorant de $\{x , y\}$.

Réciproquement, tout treillis est un système de double composition $E(\vee , \wedge)$ vérifiant (1), (1'), (2), (2'), (4) et (3').

(a) Etude de l'indépendance des axiomes (1), (1'), (2), (2'), (4) et (3').

Des exemples, qui démontrent que chacun de ces axiomes est indépendant des cinq autres, sont constitués par les systèmes de double composition $B_1(\wedge , \vee)$, $B_1(\vee , \wedge)$, $B_2(\vee , \wedge)$, $B_3(\vee , \wedge)$, $B_4(\vee , \wedge)$, $B_5(\vee , \wedge)$, dont les tables d'opération sont les suivantes :

B_1

$\vee$	a	b
a	a	a
b	a	a

$\wedge$	a	b
a	a	b
b	b	b

B_2

$\vee$	a	b	c
a	a	c	a
b	a	b	c
c	a	a	c

$\wedge$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	c

B_3

$\vee$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

$\wedge$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	a
c	c	a	c

B_4

$\vee$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

$\wedge$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

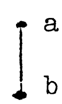
B_5

$\vee$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

$\wedge$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	c	c

1° $B_1(\vee)$ est un demi-groupe zéro : il satisfait à (2), (4) et (3).

$B_1(\wedge)$ est le inf-demi-treillis dont le diagramme est



il satisfait à (2'), (3'), (4').

$B_1(\vee , \wedge)$ satisfait à (1), mais non à (1') [$b \wedge b = b$, alors que $b \vee b = a$]

2° $B_1(\wedge , \vee)$ satisfait à (1'), (2), (4), (2'), (3') et non à (1).

3° $B_2(\vee , \wedge)$ satisfait à (1), (1').

$B_2(\wedge)$ est le inf-demi-treillis dont le diagramme est

il satisfait à (2') et (3').

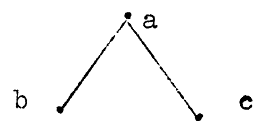
$B_2(\vee)$ vérifie (4) car il vérifie (6), a est élément zéro à droite, b est élément neutre à gauche et $c \vee (a \vee c) = a \vee c = a$.

$B_2(\vee)$ ne vérifie par (2), car $c \vee (a \vee b) = c \vee c = c$, alors que

$$(c \vee a) \vee (c \vee b) = a \vee a = a .$$

4° $B_3(\vee , \wedge)$ satisfait à (1) et (1').

$B_3(\vee)$ est le sup-demi-treillis dont le diagramme est



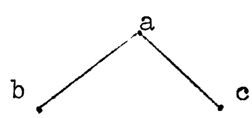
il satisfait à (2) et (4).

$B_3(\wedge)$ satisfait à (3'), mais non à (2'), car $b \wedge (a \wedge c) = b \wedge c = a$, alors que $(b \wedge a) \wedge (b \wedge c) = b \wedge a = b$.

5° $B_4(\vee , \wedge)$ vérifie (1) et (1'). $B_4(\vee)$ et $B_4(\wedge)$ sont identiques au quasi-groupe distributif d'ordre 3 déjà mentionné.

$B_4(\vee , \wedge)$ vérifie (1), (1'), (2), (2'), (3'). Il ne vérifie par (4), car $a \vee (b \vee a) = a \vee c = b$, alors que $b \vee a = c$.

6° $B_5(\vee , \wedge)$ vérifie (1) et (1'). $B_5(\vee)$ est le sup-demi-treillis



il satisfait à (2) et (4).

$B_5(\wedge)$ vérifie (2') puisque a est élément neutre à gauche et que b et c sont tous éléments zéros à gauche de $B_5(\wedge)$.

Par contre, $B_5(\wedge)$ ne vérifie pas (3') [$b \wedge c = b$, alors que $c \wedge b = c$] .

$B_5(\wedge)$ vérifie (5').

Remarque. – Le système des six axiomes indépendants

$$\{(1),\ (1'),\ (2),\ (2'),\ (4) \text{ et } (3')\}$$

caractérise un treillis [de même que le système ipso-dual {(1).(1') (2) (2') (3) et (4')}].

Par contre les exemples ci-dessous montrent que

1° {(1), (1'), (2), (2'), (3), (3')} ne caractérise pas un treillis, exemple : le système $B_4(\vee , \wedge)$;

2° {(1), (1'), (2), (2'), (4), (4')} ne caractérise par un treillis, exemple : le système $B_6(\vee , \wedge)$

B_6

$\vee$	a	b
a	a	b
b	a	b

$\wedge$	a	b
a	a	b
b	a	b

$B_6(\vee)$ et $B_6(\wedge)$ sont identiques au même demi-groupe zéro à droite. Ainsi {(1), (1'), (2), (2'), (4), (4'), (5), (5'), (6), (6'), (7) (7')} ne caractérise pas un treillis.

3° {(1), (1'), (2), (2'), (3), (4)} ne caractérise pas un treillis, exemple : le système $B_5(\vee , \wedge)$.

{(1), (1'), (2), (2'), (3'), (4')} ne caractérise pas un treillis, exemple : le système $B_5(\wedge , *)$.

Le même exemple nous montre que :
{(1), (1'), (2), (2'), (3), (4), (5), (5'), (6), (6')} ne caractérise pas un treillis.

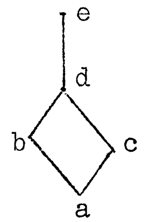
4° {(1), (1'), (3), (3'), (4), (4')} ne caractérise pas un treillis, exemple $B_7(\vee , \wedge)$, sont les tables d'opération sont :

$\vee$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	b	e	d	e
c	c	e	c	d	e
d	d	d	d	d	e
e	e	e	e	e	e

$\wedge$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	b	b
c	a	a	c	c	c
d	a	b	c	d	d
e	a	b	c	d	e

$B_7(\vee , \wedge)$ vérifie (1), (1').

$B_7(\wedge)$ est le inf-demi-treillis, dont le diagramme est :



ce qui prouve que $B_7(\vee , \wedge)$ vérifie (3'), (4'), (2'), (5'), (6').

$B_7(\vee)$ vérifie (3), (6), (4) [a élément neutre , e élément zéro, et (6) montrent qu'il nous faut seulement vérifier $b.cb = cb = e$, $b.db = db = d$, $c.bc = bc = e$, $c.dc = dc = d$, $d.bd = bd = d$, $d.cd = cd = d$]. $B_7(\vee)$ ne vérifie pas (2), puisque $b \vee (c \vee d) = b \vee d = d$, alors que

$$(b \vee c) \vee (b \vee d) = e \vee d = e \ .$$

<u>Nous avons ainsi montré que</u>

$$\{(1), (1'), (2'), (3), (3'), (4), (4'), (5'), (6), (6')\}$$

né caractérise pas un treillis.

5° <u>Le système {(1), (1'), (2), (2'), (8), (3')} ne caractérise pas un treillis</u>, exemple : le système $B_8(\vee , \wedge)$, dont les tables d'opération sont

$\vee$	a	b	c
a	a	c	b
b	b	b	b
c	c	c	c

$\wedge$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

$E(\vee , \wedge)$ vérifie (1), (1'), (2'), (3') [$E(\wedge)$ est le quasi-groupe distributif d'ordre 3].

$E(\vee)$ vérifie (2) , soit $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee (x \vee z)$.

En effet, b et c sont éléments zéros à gauche de $E(\vee)$ et

$$a.bx = ab = c = c.ax = ab.ax \ ,$$

$$a.cx = ac = b = b.ax = ac.ax \ .$$

$E(\vee)$ vérifie (8), car $(xy)x = xy$ est vérifié si $xy = b$ ou c. Si $xy = a$,

$$x = y = a \ ,$$

(8) est vérifié.

THÉORÈME 7. - Il y a identité entre les treillis et les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ satisfaisant aux six axiomes indépendants.

(1) $x \vee z = z$ entraîne $z \wedge x = x$ (1') $x \wedge z = z$ entraîne $z \vee x = x$

(7) $(x \vee y) \vee z = (x \vee z) \vee (y \vee z)$ (7') $(x \wedge y) \wedge z = (x \wedge z) \wedge (y \wedge z)$

(4) $x \vee (y \vee x) = y \vee x$ (3') $x \wedge y = y \wedge x$.

Puisque $E(\wedge)$ est un groupoïde distributif, la même démonstration que celle du lemme 1 du théorème 6 nous montre que

$$\{(1), (1'), (7'), (4), (3')\} \text{ entraîne } (6) \text{ et } (6').$$

Par suite, si a et b sont deux éléments de E

$$[a \vee (a \vee b)] \vee (a \vee b) = [a \vee (a \vee b)] \vee [b \vee (a \vee b)] = (a \vee b) \vee (a \vee b) = a \vee b$$

et

$$(a \vee b) \vee [a \vee (a \vee b)] = a \vee (a \vee b) .$$

Par utilisation de (1), il vient

$$(a \vee b) \wedge [a \vee (a \vee b)] = [a \vee (a \vee b)]$$

et

$$[a \vee (a \vee b)] \wedge (a \vee b) = a \vee b .$$

D'après (3'), il vient

$$a \vee (a \vee b) = a \vee b .$$

Mais alors

$$(b \vee a) \vee (a \vee b) = [b \vee (a \vee b)] \vee [a \vee (a \vee b)] = (a \vee b) \vee (a \vee b) = a \vee b .$$

De même

$$(a \vee b) \vee (b \vee a) = b \vee a .$$

Compte-tenu de (1) et (3'), il vient $b \vee a = a \vee b$, ce qui démontre (3). $E(\vee , \wedge)$ satisfait à (1), (1'), (2), (2'), (4) et (3') : $E(\vee , \wedge)$ est un treillis.

(b) Etude de l'indépendance de (1), (1'), (7), (7'), (4) et (3').

(1) Exemple : le système $B_1(\wedge , \vee)$.

(1') Exemple : le système $B_1(\vee , \wedge)$.

(7) Exemple : le système $B_2(\vee , \wedge)$

$[(a \vee b) \vee c = c \vee c = c$ alors que $(a \vee c) \vee (b \vee c) = a \vee c = a]$.

(7') Exemple : le système $B_3(\vee , \wedge)$

$[(a \wedge b) \wedge c = b \wedge c = a$ alors que $(a \wedge c) \wedge (b \wedge c) = c \wedge a = c]$.

(4) Exemple : le système $B_4(\vee , \wedge)$.

(3') Exemple : le système $B_6(\vee , \wedge)$.

THÉORÈME 8. - Les sept axiomes indépendants (1), (1'), (5), (5'), (4), (4'), (3') constituent un système indépendant caractérisant un treillis.

Tout d'abord {(1), (1'), (4), (4')} entraîne (6) et (6').

En effet, pour tout élément a de E ,

$$a \vee (a \vee a) = a \vee a \quad \text{par utilisation de (4)} ,$$

d'où il vient

$$(a \vee a) \wedge a = a \quad \text{par utilisation de (1)} .$$

Compte-tenu de (4'),

$$a \wedge a = a \wedge [(a \vee a) \wedge a] = (a \vee a) \wedge a = a ,$$

(6') est vérifié. (1') entraîne (6).

Si a et b sont deux éléments de E , les donditions (5), (4), (6) permettent d'écrire

$$\begin{aligned}[(a \vee b) \vee a] \vee (a \vee b) &= (a \vee b) \vee [a \vee (a \vee b)] = a \vee [a \vee b] \\ &= (a \vee a) \vee b = a \vee b\end{aligned}$$

et

$$(a \vee b) \vee [(a \vee b) \vee a] = [(a \vee b) \vee (a \vee b)] \vee a = (a \vee b) \vee a .$$

Les conditions (1) et (3') nous montrent alors que

$$(a \vee b) \vee a = a \vee b .$$

Compte-tenu de (5) et (4) ,

$$b \vee a = a \vee b .$$

Par suite, le système vérifie (1), (1'), (3), (3'), (5), (5') et (6) : c'est un treillis.

(c) Etude de l'indépendance des axiomes (1), (1'), (5), (5'), (4), (4') et (3').

(1) $B_1(\wedge , \vee)$ (1') $B_1(\vee , \wedge)$

(5) $B_7(\vee , \wedge)$ (5') $B_7(\wedge , \vee)$

(4) $B_9(\vee , \wedge)$ (4') $B_9(\wedge , \vee)$

(3') $B_6(\vee , \wedge)$

Les systèmes $B_1(\wedge , \vee)$, $B_1(\vee , \wedge)$, $B_6(\vee , \wedge)$, $B_7(\vee , \wedge)$ ont déjà été cités. La table d'opération de $B_9(\vee , \wedge)$ est :

$\vee$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\wedge$	a	b
a	a	a
b	a	a

THÉORÈME 9. - Les sept axiomes indépendants (1), (1'), (2), (2'), (3), (3'), (5) constituent un système caractérisant un treillis.

Tout d'abord {(1), (1'), (2), (2'), (3), (3')} entraîne (6) et (6').

Pour tout élément a de E , nous savons qu'il existe un élément e de E tel que $a \vee e = e$ [$e = a \vee (a \vee a)$ par utilisation du théorème 1]. D'après (1), il vient $e \wedge a = a$, ce qui montre que $E(\wedge)$ est globalement idempotent. Comme tout groupoïde distributif, globalement idempotent, a tous les éléments idempotents, (6') est vérifié. La condition (1') entraîne alors la condition (6).

Si a et b sont deux éléments de E , les conditions (5), (6) permettent d'écrire

$$a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b \ .$$

D'où, en tenant compte de (3),

$$a \vee (b \vee a) = b \vee a \ ,$$

ce qui montre que $E(\vee , \wedge)$ satisfait à (4). $E(\vee , \wedge)$ vérifiant (1), (1'), (2), (2'), (3') et (4) est un treillis.

(d) Indépendance des sept axiomes (1), (1'), (2), (2'), (3), (3'), (5).

L'exemple $B_1(\vee , \wedge)$ montre que (1') n'est pas entraîné par les six autres.

L'exemple $B_1(\wedge , \vee)$ montre que (1) n'est pas entraîné par les six autres.

L'exemple $B_9(\vee , \wedge)$ montre que (2) n'est pas entraîné par les six autres. $B_9(\vee , \wedge)$ vérifie (1), (1'), (2'), (3), (3'), (5), (5') et non (2)

$$[b.ab = b.b = a \;,\; \text{ alors que } \; ba.bb = b.a = b] \; .$$

L'exemple $B_9(\wedge , \vee)$ montre que (2') n'est pas entraîné par les six autres.

L'exemple $B_5(\wedge , \vee)$ montre que (3) n'est pas entraîné par les six autres. $B_5(\wedge , \vee)$ vérifie (1), (1'), (2), (2'), (3'), (4'), (5), (5'), (6), (6') et non (3).

L'exemple $B_5(\vee , \wedge)$ montre que (3') n'est pas entraîné par les six autres.

L'exemple $B_4(\vee , \wedge)$ montre que (5) n'est pas entraîné par les six autres.

5. Axiomatique des treillis à élément nul et à élément universel.

THÉORÈME 10. - Il y a identité entre les treillis à élément nul et à élément universel et les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$, tels que $E(\vee)$ et $E(\wedge)$ soient des groupoïdes distributifs à élément neutre liés par les deux conditions d'absorption conditionnelle (1) et (1').

Nous établirons d'une manière plus restrictive :

Il y a identité entre les treillis à élément nul et à élément universel et les systèmes de double composition $E(\vee , \wedge)$ vérifiant les sept axiomes indépendants.

(1) $x \vee z = z$ entraîne $z \wedge x = x$ (1') $x \wedge z = z$ entraîne $z \vee x = x$

(2) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee (x \vee z)$

(7) $(x \vee y) \vee z = (x \vee z) \vee (y \vee z)$ (7') $(x \wedge y) \wedge z = (x \wedge z) \wedge (y \wedge z)$

(9) $E(\vee)$ possède un élément neutre 0 (9') $E(\wedge)$ possède un élément neutre u

Soit $E(\vee , \wedge)$ un système vérifiant (1), (1'), (2), (7), (7'), (9), (9'). {(7), (9)} entraîne (4), puisque, si a et b sont des éléments de E,

$$a \vee (b \vee a) = (0 \vee a) \vee (b \vee a) = (0 \vee b) \vee a = b \vee a \; .$$

De même, {(7'), (9')} entraîne (4').

D'autre part, le corollaire du théorème 5 nous montre que (2), (7), (9) entraîne (3).

Par suite, $E(\vee , \wedge)$ satisfait à (1), (1'), (7), (7'), (3) et (4').

D'après le théorème 7, $E(\vee , \wedge)$ est un treillis. $E(\vee , \wedge)$ admet u comme élément universel et 0 comme élément nul.

(e) <u>Etude de l'indépendance des sept axiomes (1), (1'), (2), (7), (7'), (9), (9')</u>.

<u>La condition (1) n'est pas entraînée par les six autres</u>. Exemple : le système $B_{10}(\vee , \wedge)$

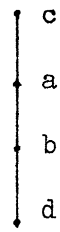
$\vee$	a	b	c	d
a	a	a	c	a
b	a	b	c	b
c	c	c	c	c
d	a	b	c	d

$\wedge$	a	b	c	d
a	a	d	a	d
b	d	b	b	d
c	a	b	c	d
d	d	d	d	d

$B_{10}(\vee , \wedge)$ vérifie (1'), mais non (1)

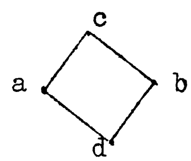
$$[b \vee a = a \quad \text{et} \quad a \wedge b = d] .$$

$B_{10}(\vee)$ est le sup-demi-treillis, dont le diagramme est :



$B_{10}(\vee , \wedge)$ vérifie (2), (7), (9).

$B_{10}(\wedge)$ est le inf-demi-treillis, dont le diagramme est :



$B_{10}(\vee , \wedge)$ vérifie (2'), (7'), (9').

<u>La condition (1') n'est pas entraînée par les six autres</u>, exemple : $B_{10}(\wedge , \vee)$.

<u>La condition (2) n'est pas entraînée par les six autres</u>, exemple : $B_{11}(\vee , \wedge)$.

$\vee$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	c	d
c	c	b	c	d
d	d	d	d	d

$\wedge$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	b
c	a	b	c	c
d	a	b	c	d

$B_{11}(\vee , \wedge)$ vérifie (1) et (1').

$B_{11}(\vee)$ vérifie (7), puisque a est élément neutre, d est élément zéro, c et b sont éléments zéro à droite de la partie stable $\{a , b , c\}$.

$B_{11}(\vee)$ vérifie (9) .

$B_{11}(\wedge)$ vérifie (7') et (9'), puisque $B_{11}(\wedge)$ est isomorphe à $B_{11}(\vee)$ relativement à l'isomorphisme

$$a \longrightarrow d$$
$$b \longrightarrow b$$
$$c \longrightarrow c$$
$$d \longrightarrow a .$$

$B_{11}(\vee)$ ne vérifie pas (2).

[$b \vee (c \vee a) = b \vee c = c$, alors que $(b \vee c) \vee (b \vee a) = c \vee b = b$.]

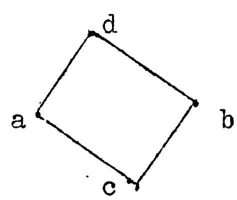
<u>La condition (7') n'est pas entraînée par les six autres</u>, exemple : $B_{12}(\vee , \wedge)$

$\vee$	a	b	c	d
a	a	d	a	d
b	d	b	b	d
c	a	b	c	d
d	d	d	d	d

$\wedge$	a	b	c	d
a	a	a	c	a
b	b	b	c	b
c	c	c	c	c
d	a	b	c	d

$B_{12}(\vee , \wedge)$ vérifie (1) et (1').

$B_{12}(\vee)$ est le sup-demi-treillis, dont le diagramme est



$B_{12}(\vee , \wedge)$ vérifie (2), (7) et (9).

$B_{12}(\wedge)$ vérifie (9'), mais ne vérifie pas (7').

[$(d \wedge a) \wedge b = a \wedge b = a$, alors que $(d \wedge b) \wedge (a \wedge b) = b \wedge a = b$.]

Il est à noter que $B_{12}(\wedge)$ vérifie (2'), [d élément neutre, c élément zéro, a et b élément zéro à gauche de la partie stable $\{a , b , d\}$].

Par suite :

La condition (7) n'est pas entraînée par les six autres, exemple : $B_{12}(\wedge , \vee)$.

La condition (9') n'est pas entraînée par les six autres. Nous avons besoin d'un exemple $B_{13}(\vee , \wedge)$ d'ordre infini.

$B_{13}(\vee , \wedge)$ est la chaîne des entiers naturels. Comme $B_{13}(\vee , \wedge)$ est un treillis, (1), (1'), (2). (2'), (7), (7') sont vérifiés.

$B_{13}(\vee , \wedge)$ vérifie (9) : $B_{13}(\vee)$ admet l'élément neutre 0 .

Par contre, $B_{13}(\wedge)$ n'admet pas d'élément neutre.

La condition (9) n'est pas entraînée par les six autres, exemple : $B_{13}(\wedge , \vee)$.

Il est à remarquer que les sept axiomes (1), (1'), (2), (2'), (7), (9), (9') ne constituent pas un système caractérisant un treillis, [exemple : $B_{12}(\vee , \wedge)$] à élément nul et à élément universel.

6. Axiomatique des treillis distributifs à élément nul.

THÉORÈME 11. - Il y a identité entre les treillis distributifs à élément nul et les systèmes de doubles composition $E(\vee , \wedge)$ vérifiant les trois axiomes indépendants :

(7) $(x \vee y) \vee z = (x \vee z) \vee (y \vee z)$.

($\tilde{9}$) $E(\vee)$ possède un élément neutre 0 , zéro pour $E(\wedge)$.

(10) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Ordinairement, un treillis distributif à élément nul est considéré comme un treillis $E(\vee , \wedge)$ vérifiant ($\tilde{9}$) et (10). Il est remarquable qu'une seule condition (7), ajoutée à ($\tilde{9}$) et (10), permette de constituer un système d'axiomes {(7), ($\tilde{9}$), (10)} caractérisant les treillis distributifs, à élément nul.

LEMME 1. - Tout système $E(\vee , \wedge)$, vérifiant ($\tilde{9}$) et (10), vérifie

($\tilde{0}$) $(x \vee y) \wedge x = x \wedge (x \vee y) = x$.

En effet,

$$x \vee (0 \wedge y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y)$$

$$x \vee 0 = (x \vee 0) \wedge (x \vee y)$$

$$x = x \wedge (x \vee y)$$

et

$$x \vee (y \wedge 0) = (x \vee y) \wedge (x \vee 0)$$

$$x \vee 0 = (x \vee y) \wedge (x \vee 0)$$

$$x = (x \vee y) \wedge x .$$

LEMME 2. - Si un groupoïde distributif à droite, $E(\vee)$, possède un élément neutre, il vérifie

(6) $x \vee x = x$

($\tilde{4}$) $(x \vee y) \vee x = x \vee (y \vee x) = y \vee x$.

En effet, $x \vee (y \vee x) = (0 \vee x) \vee (y \vee x) = (0 \vee y) \vee x = y \vee x$.

Pour $y = 0$, il vient

$$x \vee (0 \vee x) = 0 \vee x \text{ , soit } x \vee x = x .$$

Enfin, $(x \vee y) \vee x = (x \vee x) \vee (y \vee x) = x \vee (y \vee x)$.

LEMME 3. - Si un système $E(\vee , \wedge)$ vérifie (7), ($\tilde{9}$) et (10), $E(\vee)$ est un sup-demi-treillis à élément nul.

En effet, par utilisations successives de ($\tilde{0}$), (10), (4), ($\tilde{4}$), (0),

$$y \vee x = y \vee [x \wedge (x \vee y)] = (y \vee x) \wedge [y \vee (x \vee y)] = (y \vee x) \wedge (x \vee y)$$
$$= [(x \vee y) \vee x] \wedge (x \vee y) = x \vee y$$

$E(\vee)$ vérifie (3), donc (2).

Par suite, $E(\vee)$ vérifiant (2), (3), (4) et (6), est un demi-treillis. C'est un sup-demi-treillis à élément nul, relativement à la relation d'ordre

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow y \vee x = y .$$

La démonstration du théorème découle alors de ces lemmes, puisque

$$x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x \qquad \text{d'après } (\tilde{0})$$

$$y \vee (x \wedge y) = (y \vee x) \wedge y = y \qquad \text{d'après } (\tilde{0})$$

ce qui prouve que $x \wedge y \leqslant x$ et $x \wedge y \leqslant y$.

Soit z un élément de E , vérifiant $z \leqslant x$ et $z \leqslant y$,

$$(x \wedge y) \vee z = z \vee (x \wedge y) = (z \vee x) \wedge (z \vee y) = (x \vee z) \wedge (y \vee z) = x \wedge y$$

ce qui prouve que $(x \wedge y)$ est le plus grand minorant de $\{x , y\}$, relativement à la relation d'ordre $y \vee x = y$.

$E(\vee , \wedge)$ est un treillis. D'après $(\tilde{9})$ et (10), ce treillis est distributif, et il possède un élément nul.

<u>Indépendance des trois axiomes (7), $(\tilde{9})$, (10).</u> - (7) n'est pas entraîné par $\{(\tilde{9}), (10)\}$, exemple : $E_1(\vee , \wedge) = B_5(\wedge , \vee)$

$\vee$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	c	c

$\wedge$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

$(\tilde{9})$ est vérifié par $E_1(\vee , \wedge)$.

(10) est vérifié par $E_1(\vee , \wedge)$, car

$$a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y) = x \wedge y$$

$$b \vee (x \wedge y) = (b \vee x) \wedge (b \vee y) = b$$

$$c \vee (x \wedge y) = (c \vee x) \wedge (c \vee y) = c .$$

(7) n'est pas vérifié, car

$(a \vee b) \vee c = b \vee c = b$, alors que $(a \vee c) \vee (b \vee c) = c \vee (b \vee c) = c$.

Remarquons que (2) et (5) sont vérifiés.

Ainsi :

$\{(2), (\tilde{9}), (10)\}$ ne caractérise pas un treillis distributif à élément nul.

$\{(5), (\tilde{9}), (10)\}$ ne caractérise pas un treillis distributif à élément nul.

Et même

$\{(0),(0'),(1),(1'),(2),(2'),(3'),(4'),(5),(5'),(6),(6'),(7'),(8),(8'),(\tilde{9}),(10)\}$

ne caractérise pas un treillis distributif à élément nul.

$(\tilde{9})$ n'est pas entraîné par (7) et (10) , exemple : $E_2(\vee , \wedge)$ dont la table d'opération est :

$\vee$	a	b
a	a	b
b	b	b

$\wedge$	a	b
a	b	b
b	b	b

Si l'on pose

(10') $$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

(11) $$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

(11') $$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

(2), (7), (2'), (7'), (3), (3'), (5), (5'), (10), (10'), (11), et (11') sont vérifiés ainsi que (9), mais non ($\tilde{9}$).

(10) n'est pas entraîné par (7) et ($\tilde{9}$) : exemple : $E_3(\vee , \wedge) = B_1(\wedge , \vee)$

$\vee$	a	b
a	a	b
b	b	b

$\wedge$	a	b
a	a	a
b	a	a

$E(\vee)$ est un demi-treillis.

(2), (7), (5), (3) sont vérifiés.

(2'), (7'), (5'), (3') sont vérifiés.

($\tilde{9}$) est vérifié.

Mais (10) n'est pas vérifié :

$$b \vee (y \wedge z) \neq (b \vee y) \wedge (b \vee z)$$

car

$$b \vee (y \wedge z) = b \vee a = b \text{ et } (b \vee y) \wedge (b \vee z) = a .$$

Par contre (11) et (11') sont vérifiés :

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = a$$

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = a .$$

COROLLAIRE. - <u>Il y a identité entre les treillis distributifs à élément nul et à élément universel et les systèmes de double composition</u> $E(\vee , \wedge)$ <u>vérifiant les quatres axiomes indépendants</u>

(7) $(x \vee y) \vee z = (x \vee z) \vee (y \vee z)$

($\tilde{9}$) $E(\vee)$ possède un élément neutre 0 , zéro pour $E(\wedge)$

(10) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(12) $E(\vee)$ possède un élément zéro à gauche u .

En effet, $E(\vee , \wedge)$ est un treillis distributif à élément nul.

Comme $u \vee z = z \vee u = u$, le treillis $E(\vee , \wedge)$ admet u comme élément universel.

Les trois derniers exemples, ainsi que l'exemple d'un treillis distributif sans élément universel, montrent que ces quatre axiomes sont indépendants.

Remarque. - Les treillis distributifs à élément nul sont caractérisés par le système $\{(2), (\tilde{9}), (11)\}$.

Les treillis distributifs à élément universel sont caractérisés par

$$\{(7'), (\tilde{9}'), (10')\} \text{ ou } \{(2'), (\tilde{9}'), (11')\}$$

avec $(\tilde{9}')$, $E(\wedge)$ possède un élément neutre u , zéro pour $E(\vee)$.

Les treillis distributifs à élément nul et universel sont caractérisé par

$\{(2)\ (\tilde{9})\ (11)\ (12)\}$, $\{(7')\ (\tilde{9}')\ (10')\ (12')\}$ ou $\{(2')\ (\tilde{9}')\ (11')\ (12')\}$,

avec $(12')$, $E(\wedge)$ possède un élément zéro à gauche 0 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUBREIL (Paul) et DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise). - Leçons d'algèbre moderne, 2e édition. - Paris, Dunod, 1964 (Collection universitaire de Mathématiques, 6).

[2] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[3] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[4] FELSCHER (W.) und KLEIN-BARMEN (F.). - Zur Axiomatik der kommutativen Halbverbände, Arch. der Math., t. 10, 1959, p. 7.

[5] FELSCHER (W.). - Ein unsymmetriches Assoziativ-Gesetz in der Verbandstheorie, Arch. der Math., t. 8, 1957, p. 171-174.

[6] FRINK (Orrin). - Symmetric and self-distributive systems, Amer. math. Monthly, t. 62, 1955, p. 697-707.

[7] KIMURA (Naoki). - The structure of idempotent semigroups, Pacific J. of Math., t. 8, 1958, p. 257-275.

[8] MILLER (D. D.). - Les axiomes de la théorie des treillis, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 18e année, 1964/65, nº 25, 7 p.

[9] RUEDIN (Jean). - Sur une classe de quasi-groupes idempotents, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 257, 1963, p. 579-582.

[10] RUEDIN (Jean). - Sur une décomposition des groupoïdes distributifs, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, Série A, 1966, p. 985-988.

[11] RUEDIN (Jean). - Sur les groupoïdes distributifs ayant un élément neutre d'un côté et sur l'axiomatique des treillis, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, 1966, Série A, p. 559-562.

[12] RUEDIN (Jean). - Equivalences de Green et demi-treillis images homomorphes maximales d'un groupoïde distributif, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, 1967, Série A, p. 429-432.

[13] SCHWARZ (Štefan). - Contribution to the theory of torsion semigroups [en russe, avec sommaire en anglais], Czech. math. J., t. 3, 1953, p. 7-21.

[14] SCHWARZ (Štefan). - The theory of characters of finite commutative semigroups [en russe, avec sommaire en anglais], Czech. math. J., t. 4, 1954, p. 219-247.

[15] STEIN (S. E.). - On the foundations of quasigroups, Trans. Amer. math. Soc., t. 85, 1957, p. 228-256.