Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jacques Fort

Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, nº 1 (1966-1967), exp. nº 3, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_1_A3_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
20e année, 1966/67, n° 3

28 novembre 1966

SOMMES DIRECTES DE SOUS-MODULES CO-IRRÉDUCTIBLES D'UN MODULE

par Jacques FORT

Cette étude est le développement d'une note présentée à l'Académie des Sciences de Paris, le 16 mai 1966 (cf. [5]).

Nous nous proposons, dans ce travail, d'étudier les sommes directes maximales de sous-modules co-irréductibles d'un module M, et d'utiliser les résultats obtenus, d'une part pour étudier les $\cap$-décompositions irréductibles réduites des sous-modules de M, d'autre part pour étendre à un module quelconque une notion de dimension introduite par A. W. GOLDIE, sous des hypothèses de finitude dans [7].

1. Préliminaires.

Rappelons l'essentiel des notions et propriétés utilisées dans cette étude.

Un sous-module C d'un A-module (à gauche) M est, par définition, co-irréductible si $C \neq 0$ et si deux sous-modules non nuls de C ont une intersection non nulle (i. e. sous-module uniforme suivant la terminologie de A. W. GOLDIE dans [6] et [7]).

M étant un sous-module du A-module E, on dit que E est une extension essentielle de M si, X étant un sous-module de E, la relation $M \cap X$ implique $X = 0$; on dit aussi que M est (sous-module) essentiel dans E.

Si M est sous-module du module injectif Q, toute extension essentielle E de M est isomorphe relativement à M (chaque élément de M est invariant) à un sous-module de Q contenant M ; si M est injectif, il ne possède pas d'extension essentielle propre (pour ces propriétés et les suivantes, cf. B. ECKMANN et A. SCHOPF [3], ou L. LESIEUR et R. CROISOT [9]).

M étant un A-module donné, il existe un A-module E contenant M, défini à un isomorphisme près relativement à M, et ayant les propriétés équivalentes suivantes :

(a) E est une extension essentielle maximale de M ;

(b) E est une extension essentielle injective de M ;

(c) E est une extension injective minimale de M.

Un module E satisfaisant aux propriétés précédentes s'appelle (une) l'enveloppe injective de M, et se note $E(M)$; on voit aisément que, dans toute extension injective de M, il existe une enveloppe injective de M.

Les relations entre les notions de module co-irréductible et d'enveloppe injective sont précisées par l'énoncé (cf. E. MATLIS [11]) :

Soit M un A-module non nul. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) 0 est $\cap$-irréductible dans M (i. e. M est co-irréductible) ;

(b) L'enveloppe injective $E(M)$ est indécomposable (en somme directe) ;

(c) $E(M)$ est l'enveloppe injective de tout sous-module non nul de M (ou de $E(M)$).

Il en résulte que : Pour que deux modules co-irréductibles C_1 et C_2 aient leurs enveloppes injectives isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe un sous-module non nul de C_1 isomorphe à un sous-module de C_2.

Nous utiliserons les deux propriétés suivantes des sommes directes :

PROPOSITION 1. - Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille indépendante de sous-modules d'un A-module M (i. e. $\sum_{i\in I} X_i$ est directe), et pour chaque i, un sous-module Y_i extension essentielle de X_i dans M ; dans ces conditions, la somme $\sum_{i\in I} Y_i$ est directe et est extension essentielle de $\bigoplus_{i\in I} X_i$.

(Cf. par exemple N. BOURBAKI [2], exercice 15, p. 267.)

PROPOSITION 2. - Soient $\bigoplus_{i\in I} X_i$ une somme directe de sous-modules $(\neq 0)$ de M, et Y un sous-module de M ; si $Y \cap (\bigoplus_{i\in I} X_i)$ n'est pas nul, il existe alors un sous-module non nul de l'un des X_i isomorphe à un sous-module de Y.

Preuve. - Si le cardinal de l'ensemble I est 2, posons

$$Z = Y \cap (X_1 \oplus X_2) \neq 0 \quad ;$$

si $Z \cap X_1 = 0$, alors $(Z \oplus X_1) \mid X_1 \approx Z$, et $(Z \oplus X_1) \mid X_1$ est sous-module de $(X_2 \oplus X_1) \mid X_1 \approx X_2$; Z est bien isomorphe à un sous-module de X_2.

Si $Z \cap X_1 \neq 0$, c'est alors un sous-module non nul commun à Y et à X_1.

Ce résultat s'étend sans peine au cas où card I est fini ou infini.

2. Sommes directes maximales de co-irréductibles.

Soit $(C_i)_{i\in I}$ la famille collectivisante ($i \longleftrightarrow C_i$ est bijectif) des sous-modules co-irréductibles du module M , cette famille pouvant être vide (cf. § 3). L'ensemble $\mathfrak{A}$ des parties A de I telles que la somme $\sum_{i\in A} C_i$ soit directe, ordonné par inclusion, est inductif ; il résulte qu'il existe des sommes directes <u>maximales</u> de co-irréductibles :

$$(1) \qquad S = \bigoplus_{i\in H} C_i \quad ,$$

définies par le choix d'un élément maximal H dans $\mathfrak{A}$ (si la famille des C_i est vide, $S = 0$ par convention) ; et toute somme directe $\bigoplus_{i\in A} C_i$ de co-irréductibles peut être étendue en une telle somme maximale (1), avec $A \subseteq H$.

Si X est un sous-module qui contient un sous-module co-irréductible C , alors $S \cap X \neq 0$ pour <u>toute</u> somme maximale S de co-irréductibles ; en effet $S \cap X = 0$ entraîne $S \cap C = 0$, et la somme $S + C$ serait directe, ce qui contredirait le caractère maximal de S .

Inversement, $S \cap X \neq 0$ et la proposition 2 du § 1 montrent que X contient un sous-module X_0 isomorphe à un sous-module $\neq 0$ d'un co-irréductible C_i ; X contient le co-irréductible X_0 , d'où :

PROPOSITION 3. - <u>Pour une somme directe maximale</u> S <u>de sous-modules co-irréductibles d'un module</u> M , <u>et pour un sous-module</u> X <u>de</u> M , <u>les deux conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) $S \cap X \neq 0$;

(b) X <u>contient un sous-module co-irréductible.</u>

Certaines substitutions sont permises sur les composantes d'une somme directe maximale de co-irréductibles ; plus précisément :

PROPOSITION 4. - <u>Etant donnée une somme directe maximale</u> $S = \bigoplus_{i\in H} C_i$ <u>de sous-modules co-irréductibles</u> C_i <u>d'un module</u> M , <u>on obtient une nouvelle somme directe maximale de co-irréductibles</u> :

(a) <u>En remplaçant chacun des</u> C_i <u>par un de ses sous-modules non nuls</u> C_i' ;

(b) <u>En remplaçant chacun des</u> C_i <u>par une de ses extensions essentielles</u> E_i <u>dans</u> M .

Preuve de (a). - Il est évident que $S' = \sum_{i \in H} C'_i$ est directe et que chacun des C'_i est co-irréductible ; S' est maximale car si, pour un sous-module co-irréductible C, la somme $S' + C$ était directe, il en serait de même de $S + C$ (la proposition 1 du § 1 s'applique puisque chaque C_i est extension essentielle d'un quelconque de ses sous-modules non nuls).

Preuve de (b). - $S^* = \sum_{i \in H} E_i$ est directe (proposition 1), et chaque E_i est co-irréductible (contrôle facile, cf. proposition 5.4, p. 13 de [4]) ; le caractère maximal de S^* est évident : si $S^* + C$ était directe, il en serait de même de $S + C$.

Remarquons que les E_i peuvent être choisis, pour chaque i, dans l'ensemble des extensions essentielles maximales de C_i dans M ; de tels E_i sont des "enveloppes injectives" des C_i au sens donné dans l'étude du cas abstrait des $(\mathfrak{C})$-algèbres modulaires (cf. chap. VII de [4]).

Par une démarche opposée, considérons l'ensemble $\mathfrak{B}$ des sous-modules B de M qui ne contiennent aucun sous-module co-irréductible ; 0 est un tel sous-module. $\mathfrak{B}$ ordonné par inclusion est inductif ; soit K un élément maximal de $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{B}$ est invariant par des extensions essentielles effectuées sur ses éléments. Soient E une extension essentielle dans M de $B \in \mathfrak{B}$, et C un co-irréductible de M ; $C \cap E \neq 0$ entraînerait

$$C \cap B = (C \cap E) \cap B \neq 0 \quad ,$$

et B contiendrait le co-irréductible $C \cap B$.

En particulier, tout élément maximal K de $\mathfrak{B}$ est sans extension essentielle propre dans M ; lorsque M est un A-module injectif, K est alors injectif (cf. § 1), donc facteur direct dans M.

La comparaison d'un tel K maximal dans $\mathfrak{B}$ avec une quelconque des sommes directes maximales $S = \bigoplus_{i \in H} C_i$ de co-irréductibles est précisée par l'assertion (X étant un sous-module) :

(2) $$X \neq 0 \text{ et } K \cap X = 0 \implies S \cap X \neq 0 \quad .$$

Supposons en effet que $S \cap X = 0$; la proposition 3 de ce § 2 montre alors que X ne contiendrait aucun co-irréductible ; la somme directe $K \oplus X$ aurait aussi cette propriété (appliquer la proposition 1 du § 1), ce qui est en contradiction avec la maximalité de K.

Cette même proposition 3 entraîne aussi $S \cap K = 0$; de plus, (2) implique que cette somme directe $S \oplus K$ admet M comme extension essentielle, c'est-à-dire que $S \oplus K$ est un sous-module essentiel de M :

Si X est un sous-module de M,

$$(S \oplus K) \cap X = 0 \quad \text{entraîne} \quad S \cap X = 0 \quad \text{et} \quad K \cap X = 0 \quad ;$$

et d'après (2),

$$X = 0 \quad .$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Pour tout A-module M, il existe des sommes directes maximales S de sous-modules de M co-irréductibles, et des sous-modules K maximaux parmi ceux qui ne contiennent aucun co-irréductible. Si S et K sont deux tels sous-modules :

(a) La somme $S + K$ est directe ;
(b) $S \oplus K$ est un sous-module essentiel de M.

Si $M = Q$ est un A-module injectif, Q contient une enveloppe injective $E(S)$ de S ; K étant sans extension essentielle propre dans Q est aussi injectif (il coïncide avec toutes ses enveloppes injectives dans Q). D'après la proposition 1 du § 1, la somme $E(S) + K$ est directe ; d'autre part Q, étant extension essentielle de $S \oplus K$, est a fortiori extension essentielle de l'injectif $E(S) \oplus K$. Donc

$$Q = E(S) \oplus K \quad .$$

COROLLAIRE. - Dans les conditions du théorème 1, si $M = Q$ est injectif, alors :

$$Q = E(S) \oplus K \quad ,$$

où $E(S)$ est une enveloppe injective de S dans Q.

De plus, si $Q = E(S') \oplus K'$ est une autre telle décomposition, il existe un automorphisme φ de Q tel que :

$$\varphi(E(S)) = E(S') \quad , \qquad \varphi(K) = K' \quad .$$

En effet, le couple (S' , K) définit la décomposition $Q = E(S') \oplus K$ et l'isomorphisme

$$\varphi_1 : E(S) \to Q \mid K \to E(S') \quad ;$$

et le couple (S, K') définit la décomposition $Q = E(S) \oplus K'$ et l'isomorphisme

$$\varphi_2 : K \to Q \mid E(S) \to K' .$$

Le théorème 1 et son corollaire inscitent à une étude élémentaire des modules M :

- qui ne contiennent aucun co-irréductible (§ 3) ;
- en lesquels il existe une somme directe maximale de co-irréductibles qui soit essentielle dans M (§ 4).

3. Modules sans co-irréductibles.

THÉORÈME 2. - Soit $A = \prod_{i \in I} A_i$ l'anneau produit d'une famille infinie d'anneaux unitaires, et soit $\mathfrak{a}$ l'idéal bilatère des $x = (x_i)_{i\in I}$ qui ont un support fini ; alors :

Dans l'anneau $B = A|\mathfrak{a}$ il n'existe pas d'idéal à gauche co-irréductible.

Preuve. - Soit $\mathfrak{b}$ un idéal à gauche de A qui contient strictement $\mathfrak{a}$. Pour établir le théorème, il suffit de montrer qu'il existe alors deux idéaux à gauche $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$ de A tels que :

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{b} , \qquad \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}_2 \subseteq \mathfrak{b} , \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 .$$

Il existe $b = (b_i)_{i\in I}$, $b \in \mathfrak{b}$, $b \notin \mathfrak{a}$; le support de b ,

$$J = \{i \mid i \in I , b_i \neq 0\}$$

est infini. Considérons une partition $J = H + K$ de J en deux ensembles infinis H et K , et définissons les éléments $h = (h_i)_{i\in I}$ et $k = (k_i)_{i\in I}$ de A par :

$$h_i = 1 \quad \text{si } i \in H \quad \text{et} \quad h_i = 0 \quad \text{si } i \notin H ;$$
$$k_i = 1 \quad \text{si } i \in K \quad \text{et} \quad k_i = 0 \quad \text{si } i \notin K .$$

Il est aisé de vérifier que les éléments $r = hb = bh$ et $s = kb = bk$ n'appartiennent pas à $\mathfrak{a}$ et ont pour supports respectifs H et K . Posons :

$$\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a} + Ar) \cap (\mathfrak{a} + As) ,$$

Ar et As étant les idéaux à gauche monogènes engendrés par r et s ; et soit $x = (x_i)_{i\in I}$ un élément de $\mathfrak{a}'$;

$$x = a + \lambda r = a' + \mu s , \qquad \text{avec } a \text{ et } a' \in \mathfrak{a} , \quad \lambda \text{ et } \mu \in A .$$

Supp a et Supp a' étant les supports de a et a' respectivement, les trois ensembles suivants :

$$(\mathrm{Supp}\ a) \cap K\ ,\quad (\mathrm{Supp}\ a') \cap H\ ,\quad (\mathrm{Supp}\ a) \cap (I - J) = (\mathrm{Supp}\ a') \cap (I - J)\ ,$$

sont <u>finis</u>, ce qui entraîne que le support de x est fini car :

$i \in (\mathrm{Supp}\ x) \cap H \implies s_i = k_i\, b_i = 0\ ,\ a'_i \neq 0\ ,\ i \in (\mathrm{Supp}\ a') \cap H\ ;$

$i \in (\mathrm{Supp}\ x) \cap K \implies r_i = h_i\, b_i = 0\ ,\ a_i \neq 0\ ,\ i \in (\mathrm{Supp}\ a) \cap K\ ;$

$i \in (\mathrm{Supp}\ x) \cap (I - H - K) \implies s_i = r_i = 0\ ,\ a_i = a'_i \neq 0\ ,\ i \in (\mathrm{Supp}\ a) \cap (I - J)\ .$

Donc $\alpha = (\alpha + Ar) \cap (\alpha + As)$, et il suffit de prendre

$$b_1 = \alpha + Ar \qquad \text{et} \qquad b_2 = \alpha + As\ .$$

Rappelons qu'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de sous-modules d'un A-module M est une <u>décomposition</u> <u>$\cap$-irréductible réduite</u> de 0 dans M si chacun des X_i est $\cap$-irréductible dans M , si $\bigcap_{i\in I} X_i = 0$, et si aucun des X_i ne contient

$$\overline{X_i} = \bigcap_{j\in I-\{i\}} X_j\ .$$

Si 0 est $\cap$-réductible, alors $\forall\ i \in I$,

$$X_i \neq 0\ ,\quad \overline{X_i} \neq 0\ ,\quad X_i \cap \overline{X_i} = 0\ ,\quad \text{et}\quad \mathrm{card}\ I \geqslant 2\ ;$$

dans ce cas, chaque X_i est $\cap$-irréductible non essentiel, complément de $\overline{X_i}$ dans M (cf. théorème 8.2, p. 62 de [4]), et chaque $\overline{X_i}$ est <u>co-irréductible</u> (cf. proposition 8.1, p. 65 de [4]).

Si M est un module non nul ne contenant aucun co-irréductible (tel $A|\alpha$ du théorème 2), il résulte de ce qui précède que 0 <u>n'a pas de décomposition</u> $\cap$-irréductible <u>réduite</u> dans M ; néanmoins 0 est $\cap$-réductible dans M (par définition de M) et est l'intersection de tous les sous-modules $\cap$-irréductibles $(E_\alpha)_{\alpha\in L}$ de M (cf. proposition 1.1 de [9]) :

$$0 = \bigcap_{\alpha\in L} E_\alpha\ ;$$

il n'existe pas d'élément minimal H_0 dans l'ensemble $\mathcal{H}$ des parties H de L telles que :

$$0 = \bigcap_{\alpha\in H} E_\alpha\ ,$$

sinon $(E_\alpha)_{\alpha\in H_0}$ serait une décomposition irréductible réduite de 0 dans M .

Ces observations peuvent s'appliquer, en particulier, à l'anneau de Boole $\mathcal{E} = \mathcal{P}(I)$ des parties d'un ensemble infini I, défini par la somme symétrique et la réunion des parties ; cet anneau est isomorphe à l'anneau produit

$$A = \prod_{i \in I} A_i \ , \qquad \forall\, i \ , \quad A_i = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ .$$

Le théorème 2 s'applique à A :

Le filtre $\mathcal{C}$ des complémentaires des parties finies de I est l'intersection des ultrafiltres plus fins que lui, et $\mathcal{C}$ ne peut être intersection réduite de tels ultrafiltres.

4. Modules riches en co-irréductibles.

THÉORÈME 3. - Soit M un A-module non nul ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) 0 possède une décomposition irréductible réduite dans tout sous-module non nul de M ;

(b) Tout sous-module non nul de M contient un sous-module co-irréductible ;

(c) Il existe une somme directe de sous-modules co-irréductibles de M, qui est essentielle dans M.

Preuve de (a) $\Longrightarrow$ (b). - Dans le sous-module non nul N, 0 possède une décomposition irréductible réduite,

$$0 = \bigcap_{i \in I} X_i \ , \qquad \text{avec } X_i \subseteq N \ ;$$

nous savons que, dans ces conditions, les $\overline{X}_i = \bigcap_{j \neq i} X_j$ sont co-irréductibles (si $\operatorname{card} I = 1$, 0 est $\cap$-irréductible dans N, et N est alors co-irréductible).

Preuve de (b) $\Longrightarrow$ (c). - La famille des co-irréductibles de $M \neq 0$ n'est pas vide. Considérons une somme directe maximale $S = \bigoplus_{i \in H} C_i$ de sous-modules co-irréductibles. Si S n'était pas essentiel dans M, il existerait un sous-module $X \neq 0$ tel que $S \cap X = 0$; par hypothèse, X contient un co-irréductible C ; la somme $S + C$ serait alors directe, ce qui contredirait la maximalité de S.

Preuve de (c) $\Longrightarrow$ (b). - Soit N un sous-module non nul de M, et soit $S = \bigoplus_{i \in H} C_i$ la somme directe essentielle donnée par l'hypothèse (c).

M étant extension essentielle de S, $N \cap S \neq 0$; il existe alors un sous-module non nul de N, soit N_0, isomorphe à un sous-module C'_i de l'un des C_i (cf. proposition 2 du § 1). C'_i étant co-irréductible, il en est de même de N_0.

Preuve de (b) $\Longrightarrow$ (a). - Soit N un sous-module non nul de M ; N, tout comme M, a tous ses sous-modules non nuls qui contiennent au moins un co-irréductible. (b) implique donc (c) pour le module N, et il existe donc dans N une somme directe $S = \bigoplus_{i \in H'} C'_i$ de sous-modules de N co-irréductibles, et qui soit sous-module essentiel dans N. Posons

$$\overline{C'_i} = \bigoplus_{j \neq i} C'_j \quad ;$$

chacun des $\overline{C'_i}$ est $\cap$-irréductible dans S, car $S|\overline{C'_i}$ est isomorphe au co-irréductible C_i (si $\operatorname{card} H' = 1$, alors S est co-irréductible ainsi que son extension essentielle N).

Il est aisé de contrôler que $0 = \bigcap_{i \in H'} \overline{C'_i}$ est une décomposition irréductible réduite de 0 dans S ; pour terminer, il suffit de prouver que cette décomposition s'étend à l'extension essentielle N de S ; le théorème 3 est alors conséquence de la proposition suivante.

PROPOSITION 5. - Soit E une extension essentielle du A-module M.

(a) Pour que 0 soit $\cap$-irréductible dans M, il faut et il suffit qu'il le soit dans E.

(b) Pour que $0 = \bigcap_{i \in I} X_i$ soit une décomposition irréductible réduite de 0 dans M, il faut et il suffit que chaque X_i soit la trace sur M de sous-modules X'_i de E tels que $0 = \bigcap_{i \in I} X'_i$ soit une décomposition irréductible réduite de 0 dans E.

Preuve de (a). - C'est la proposition 5.4, p. 43 de [4].

Preuve de (b). - Nous établirons tout d'abord le lemme suivant.

LEMME. - E étant une extension (pas nécessairement essentielle) du A-module M, pour qu'un sous-module X de M soit $\cap$-irréductible dans M, il faut et il suffit qu'il soit la trace sur M d'un sous-module $\cap$-irréductible de E.

La condition est nécessaire. - Soit X' un complément de M sur X dans E, $X' \cap M = X$ (c'est-à-dire un maximal dans l'ensemble des sous-modules Y de E tels que $Y \cap M = X$). Si X' était $\cap$-réductible dans E, il existerait des sous-modules X'_1 et X'_2 tels que :

$$X' = X'_1 \cap X'_2 \ , \quad X'_1 \supset X' \ , \quad X'_2 \supset X' \qquad \text{(inclusions strictes)} \quad ;$$

cela entraînerait (maximalité de X') :

$$X'_1 \cap M \supset X , \quad X'_2 \cap M \supset X , \quad X = (X'_1 \cap M) \cap (X'_2 \cap M) ,$$

et X serait $\cap$-réductible dans M .

<u>La condition est suffisante</u>. - Soit $X = X' \cap M$. Si X était $\cap$-réductible dans M , alors 0 le serait dans $(M + X') \mid X'$ à cause de l'isomorphisme

$$M|X \approx (M + X') \mid X' ;$$

et X' serait $\cap$-réductible dans $M + X'$ (a fortiori dans E).

<u>Retour à la preuve de</u> (b).

<u>La condition est nécessaire</u>. - D'après le lemme, il existe, pour chaque i , un $\cap$-irréductible X'_i dans E tel que $X_i = X'_i \cap M$, ce qui entraîne :

$$0 = \bigcap_{i\in I} (X'_i \cap M) = M \cap \left(\bigcap_{i\in I} X'_i\right) ;$$

E étant extension essentielle de M : $0 = \bigcap_{i\in I} X'_i$, et cette décomposition est réduite car :

$$X'_i \subseteq \bigcap_{j\neq i} X'_j \implies X_i = X'_i \cap M \subseteq \bigcap_{j\neq i} (X'_j \cap M) = \bigcap_{j\neq i} X_j .$$

<u>La condition est suffisante</u>. - Soit $0 = \bigcap_{i\in I} X'_i$ une décomposition irréductible réduite de 0 dans E ; d'après le lemme, les $X_i = X'_i \cap M$ sont $\cap$-irréductibles dans M .

$\forall\, i \in I$, $X_i \subseteq X'_i$ entraîne $0 = \bigcap_{i\in I} X_i$; et cette décomposition est réduite car:

$$0 = \bigcap_{i\neq j} (X'_i \cap M) = M \cap \left(\bigcap_{i\neq j} X'_i\right) \quad \text{entraîne} \quad 0 = \bigcap_{i\neq j} X'_i$$

(E étant extension essentielle de M), ce qui est contraire au fait que $0 = \bigcap_{i\in I} X'_i$ est réduite.

DÉFINITION. - <u>Un module</u> riche <u>en co-irréductibles est un module vérifiant l'une des conditions équivalentes exprimées au théorème</u> 3.

Etudions quelques classes de modules riches en co-irréductibles.

1° Tout A-module noethérien (artinien) est riche en co-irréductibles, la condition (a) du théorème 3 étant réalisée.

2° Si A est un anneau tel que, pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de A , le A-module à gauche $A/\mathfrak{a}$ soit riche en co-irréductibles, alors <u>tout</u> A-module (à gauche) M est riche en co-irréductibles :

En effet, tout sous-module monogène non nul de M est isomorphe à un quotient A/α qui, par hypothèse, contient au moins un sous-module co-irréductible.

3° Tout module (à gauche) sur un anneau noethérien (ou artinien) à gauche, est riche en co-irréductibles (cas particulier du 2°).

4° Pour que l'anneau $A = \prod_{i\in I} A_i$ produit d'une famille (finie ou infinie) d'anneaux <u>unitaires</u> soit riche en idéaux (à gauche) co-irréductibles, il faut et il suffit que tous les A_i soient riches en idéaux (à gauche) co-irréductibles :

La condition est suffisante car, pour $x \in A - \{0\}$, il existe un idempotent e tel que $ex = xe$ n'ait qu'une seule composante non nulle.

5° Pour qu'une somme directe $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ d'une famille (finie ou infinie) de A-modules M_i soit riche en co-irréductibles, il faut et il suffit que tous les M_i soient riches en co-irréductibles (d'après la proposition 2 du § 1).

6° <u>Remarques</u>.

(a) Un quotient $M|X$ d'un module M, riche en co-irréductibles, n'est pas nécessairement riche en co-irréductibles. L'anneau quotient A/α du théorème 2 du § 3, considéré comme A-module, en donne un exemple (lorsque tous les A_i sont riches en co-irréductibles).

(b) Si M est un module riche en co-irréductibles, alors toute extension essentielle (en particulier l'enveloppe injective de M) est riche en co-irréductibles (cf. condition (c) du théorème 3).

Le théorème 1.1 de A. W. GOLDIE dans [7] s'étend au cas d'un module non soumis à des conditions de finitude, par le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - <u>Dans un module</u> $M \neq 0$, riche <u>en co-irréductibles, les trois conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) E <u>est un sous-module</u> essentiel <u>de</u> M (<u>i. e.</u> M <u>est extension essentielle de</u> M).

(b) E <u>coupe selon un sous-module non nul</u> toutes <u>les composantes d'une quelconque somme directe maximale de sous-modules co-irréductibles de</u> M.

(c) E <u>contient une somme directe maximale de sous-modules co-irréductibles de</u> M.

Montrons que (c) entraîne (a) : Soit $S = \bigoplus_{i\in I} C_i$ une somme directe maximale de sous-modules co-irréductibles de M contenue dans E. S est sous-module <u>essentiel</u> de M, puisque M est riche en co-irréductibles (cf. la preuve de (b) $\Longrightarrow$ (c), au théorème 3 du § 4). M est alors extension essentielle de E (transitivité des extensions essentielles).

5. Dimension d'un module injectif.

1° Cas d'un module injectif riche en co-irréductibles. - Tout module Q contient des sommes directes maximales $S = \bigoplus_{i\in I} C_i$ de sous-modules co-irréductibles C_i. Si Q est injectif, chacun des C_i peut être remplacé par une de ses enveloppes injectives dans Q (cf. proposition 4 du § 2) ; les C_i sont alors des sous-modules injectifs indécomposables de Q (cf. § 1). Si, de plus, Q est riche en co-irréductibles, S est alors sous-module essentiel de Q (cf. théorème, preuve de (b) $\Longrightarrow$ (c)).

PROPOSITION 6. - Soient deux sommes directes maximales de sous-modules injectifs indécomposables du module injectif Q riche en co-irréductibles :

$$S = \bigoplus_{i\in I} C_i , \qquad T = \bigoplus_{j\in J} K_j .$$

Dans ces conditions :

(a) Pour tout $\alpha \in I$, il existe $\beta \in J$ tel que K_β soit appliqué isomorphiquement sur C_α par un projecteur $\overline{p}_\alpha$ de Q prolongeant le projecteur p_α de S relatif au composant C_α. La somme

$$S' = K_\beta + (\bigoplus_{i\neq\alpha} C_i)$$

est alors directe et est sous-module essentiel de Q.

(b) Il existe un automorphisme φ de Q, et une bijection σ de I sur J, tels que :

$$\forall\ i \in I , \qquad \varphi(C_i) = K_{\sigma(i)} .$$

Preuve de (a). - Si le cardinal de I est 1, alors $S = C_\alpha$ est injectif ; n'ayant pas d'extension essentielle propre, S est égal à Q ; Q est alors injectif indécomposable, et les assertions (a) et (b) sont trivialement valables dans ce cas.

Nous supposerons donc, dans toute la suite, que $\operatorname{card} I \geqslant 2$, et que $\operatorname{card} J \geqslant 2$. Posons

$$\overline{C}_\alpha = \bigoplus_{i\in I-\{\alpha\}} C_i .$$

Comme $C_\alpha \cap \overline{C}_\alpha = 0$, le sous-module $\overline{C}_\alpha$ n'est pas essentiel dans Q ; le théorème 4 du § 4 permet d'affirmer que $\overline{C}_\alpha$ ne coupe pas tous les composants de

$$T = \bigoplus_{j \in J} K_j$$

selon un sous-module non nul ; il existe donc $\beta \in J$ tel que :

$$\overline{C}_\alpha \cap K_\beta = 0 \quad .$$

Posons $S' = K_\beta \oplus \overline{C}_\alpha$; et soit $\overline{p}_\alpha$ un projecteur de Q , d'image C_α , prolongeant p_α de S d'image C_α et de noyau $\overline{C}_\alpha$; ce projecteur $\overline{p}_\alpha$ s'obtient en prolongeant $S \xrightarrow{p_\alpha} C_\alpha$ en $Q \xrightarrow{u_\alpha} C_\alpha$, puis en composant u_α et l'injection canonique $C_\alpha \xrightarrow{q_\alpha} Q$. Comme $\overline{p}_\alpha$ prolonge p_α :

$$\overline{C}_\alpha \subseteq \operatorname{Ker} \overline{p}_\alpha \quad ;$$

montrons que :

$$\operatorname{Ker} \overline{p}_\alpha \cap K_\beta = 0 \quad ;$$

en effet :

$$(\operatorname{Ker} \overline{p}_\alpha \cap K_\beta) \cap S = K_\beta \cap [(\overline{C}_\alpha \oplus C_\alpha) \cap \operatorname{Ker} \overline{p}_\alpha]$$

$$= K_\beta \cap [\overline{C}_\alpha \oplus (C_\alpha \cap \operatorname{Ker} \overline{p}_\alpha)] = K_\beta \cap \overline{C}_\alpha = 0 \quad ,$$

d'après le choix de β (observer aussi que $C_\alpha \cap \operatorname{Ker} \overline{p}_\alpha = 0$) ; Q étant extension essentielle de S , il en résulte que :

$$\operatorname{Ker} \overline{p}_\alpha \cap K_\beta = 0 \quad .$$

La restriction de $\overline{p}_\alpha$ à K_β est ainsi un homomorphisme <u>injectif</u>, et $\overline{p}_\alpha(K_\beta)$ est un sous-module injectif indécomposable de $\overline{p}_\alpha(Q) = C_\alpha$, donc nécessairement <u>identique</u> à C_α ($\overline{p}_\alpha(K_\beta)$ injectif est facteur direct dans C_α indécomposable) :

$$\overline{p}_\alpha(K_\beta) = C_\alpha \quad .$$

Montrons que le sous-module $S' = K_\beta \oplus \overline{C}_\alpha$ est <u>essentiel</u> dans Q . Si $S' \cap C_\alpha = 0$, la somme $C_\alpha + K_\beta + \overline{C}_\alpha$ serait directe (contraire au caractère maximal de

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i = C_\alpha \oplus \overline{C}_\alpha \quad) \; ;$$

donc :

$$S' \cap C_\alpha \neq 0 \quad .$$

D'autre part, comme $S' \cap C_i = C_i$ pour tout $i \in I - \{\alpha\}$ (puisque $C_i \subseteq \overline{C_\alpha} \subseteq S'$), S' coupe donc toutes les composantes de S suivant des sous-modules non nuls ; et S' est bien essentiel (cf. le théorème 4 du § 4).

Preuve de (b). - Nous nous inspirerons de la méthode utilisée par G. AZUMAYA dans son remarquable théorème 1, de [1].

D'après le (a) précédent, tout C_i est isomorphe à un K_j (au moins un) ; de même, tout K_j est isomorphe à un C_i (au moins un).

Pour $\alpha \in I$, posons

$$I(\alpha) = \{i \mid i \in I \text{ , } C_i \text{ est isomorphe à } C_\alpha\} \text{ ;}$$

et pour $\beta \in J$, posons

$$J(\beta) = \{j \mid j \in J \text{ , } K_j \text{ est isomorphe à } K_\beta\} \text{ .}$$

La correspondance entre classes d'équivalences $I(\alpha) \longleftrightarrow J(\beta)$ définie par la propriété : il existe $i \in I(\alpha)$ et $j \in J(\beta)$ tels que C_i et K_j soient isomorphes, est visiblement biunivoque.

Si nous prouvons que deux telles classes correspondantes $I(\alpha)$ et $J(\beta)$ ont même cardinal, il en résultera que les sommes directes

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i \qquad \text{et} \qquad T = \bigoplus_{j \in J} K_j$$

seront isomorphes composantes par composantes.

Soit donc un ensemble fini $\{\alpha_1 , \dots , \alpha_n\}$ d'indices de $I(\alpha)$; par applications successives du (a), nous pouvons trouver $\beta_1 , \dots , \beta_n$, dans J, tels que:

$$S^* = K_{\beta_1} \oplus \dots \oplus K_{\beta_n} \oplus \Big(\bigoplus_{i \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}} C_i \Big)$$

soit un sous-module essentiel de Q, et que K_{β_h} soit isomorphe à C_{α_h}

$$(h = 1 , \dots , n) \text{ ;}$$

cela entraîne que les β_h sont dans $J(\beta)$ et que si card $J(\beta)$ est fini, alors card $I(\alpha)$ est fini, et

$$\text{card } I(\alpha) \leqslant \text{card } J(\beta) \text{ .}$$

Si card $J(\beta)$ est infini, à chaque $j \in J(\beta)$ associons l'ensemble (éventuellement vide) :

$$F(j) = \{i \mid i \in I \ , \ \overline{p}_i \text{ applique isomorphiquement } K_j \text{ sur } C_i\} \ ,$$

$\{\overline{p}_i\}_{i\in I}$ étant une famille (orthogonale) de projecteurs de Q telle que, pour chaque i, $\overline{p}_i$ prolonge le projecteur p_i de $S = \bigoplus_{i\in I} C_i$ d'image C_i et de noyau $\overline{C}_i = \bigoplus_{\lambda\neq i} C_\lambda$, et que :

$$\operatorname{Im} \overline{p}_i = C_i \ .$$

Tout d'abord, $F(j) \subseteq I(\alpha)$; d'autre part, $\operatorname{card} F(j)$ est <u>fini</u>, en effet :

Soit $x_j \in K_j - \{0\}$; $S = \bigoplus_{i\in I} C_i$ étant <u>essentiel</u> dans Q, il existe $\alpha \in A$ tel que $\alpha x_j \in K_j \cap S$; $\alpha x_j \neq 0$. Soit $\{i_1 , \dots , i_s\}$ l'ensemble (fini) des indices $i \in I$ tels que $\overline{p}_i(\alpha x_j) = p_i(\alpha x_j) \neq 0$; on a bien

$$F(j) \subseteq \{i_1 , \dots , i_s\} \ ,$$

car, pour $i \notin \{i_1 , \dots , i_s\}$, la restriction de $\overline{p}_i$ à K_j a un noyau non nul.

Les $F(j)$ recouvrent $I(\alpha)$ lorsque j décrit $J(\beta)$, puisque, pour chaque $i \in I(\alpha)$, il existe $j \in K_j$ tel que K_j soit appliqué isomorphiquement sur C_i par $\overline{p}_i$ (d'après (a)) :

$$I(\alpha) = \bigcup_{j\in J(\beta)} F(j) \ ,$$

$J(\beta)$ étant de cardinal infini, il en résulte :

$$\operatorname{card} I(\alpha) \leqslant \operatorname{card} J(\beta) \ .$$

Dans tous les cas, $\operatorname{card} I(\alpha) \leqslant \operatorname{card} J(\beta)$; et en échangeant les rôles de $I(\alpha)$ et $J(\beta)$, il vient :

$$\operatorname{card} I(\alpha) = \operatorname{card} J(\beta) \ .$$

Il existe donc une bijection $I \xrightarrow{\sigma} J$ qui applique chaque classe $I(\alpha)$ sur son associée $J(\beta)$, et pour chaque $i \in I(\alpha)$, il existe un isomorphisme

$$C_i \xrightarrow{\Psi_i} K_{\sigma(i)} \ ;$$

définissons alors l'isomorphisme :

$$S \xrightarrow{\Psi} T \quad \text{par } \Psi = \bigoplus_{i\in I} \Psi_i \ .$$

Q étant injectif, Ψ se <u>prolonge</u> en un endomorphisme φ de Q ;

$$0 = \mathrm{Ker}\,\Psi = \mathrm{Ker}\,\varphi \cap S \quad \text{entraîne} \quad \mathrm{Ker}\,\varphi = 0 \ ,$$

car S est essentiel. φ est injectif, et $\varphi(Q)$ est sous-module injectif extension essentielle de $\varphi(S) = \Psi(S) = T$; Q est donc extension essentielle de $\varphi(Q)$ injectif, et $Q = \varphi(Q)$.

La bijection σ et l'automorphisme φ ainsi construits ont bien les propriétés voulues.

Remarque 1. – Il existe des modules injectifs Q riches en co-irréductibles pour lesquels les sommes directes maximales de sous-modules co-irréductibles sont distinctes de Q . Par exemple, soit $A = \prod_{i\in I} A_i$ l'anneau produit d'une famille infinie de corps A_i tous isomorphes à un corps commutatif K ; désignons par q_i les injections canoniques attachées au produit A .

Il est aisé de contrôler que chacun des $q_i(A_i)$ est un A-module simple injectif (donc indécomposable), et que $S = \bigoplus_{i\in I} q_i(A_i)$ est un sous-module essentiel du A-module A . A est d'autre part un A-module isomorphe au produit des A-modules injectifs $q_i(A_i)$; A est donc A-module injectif (enveloppe injective du A-module S).

Remarque 2. – Dans les conditions de la proposition 6, Q est enveloppe injective de S et de T (puisque S et T sont essentiels dans Q , d'après le théorème 4 du § 4).

2° Cas d'un module injectif quelconque. – Soient

$$S = \bigoplus_{i\in I} C_i \qquad \text{et} \qquad T = \bigoplus_{j\in J} K_j$$

deux sommes directes maximales de sous-modules co-irréductibles d'un module injectif Q (nulles si Q est privé de co-irréductibles). Introduisons un sous-module K de Q maximal parmi ceux qui sont privés de co-irréductibles ; le corollaire du théorème 1 du § 2 donne alors :

$$Q = E(S) \oplus K = E(T) \oplus K \ ,$$

$E(S)$ et $E(T)$ désignant des enveloppes injectives de E et T dans Q . Soit θ l'isomorphisme composé :

$$E(S) \to Q|K \to E(T) \ ;$$

$E(S)$ étant extension essentielle de S , $\theta(E(S)) = E(T)$ est extension essentielle de $\theta(S) = \bigoplus_{i\in I} \theta(C_i)$; $E(T)$ est riche en co-irréductibles (la condition (c) du théorème 3, § 4, est réalisée) ; la proposition 6 s'applique aux sommes $\theta(S)$ et T :

Il existe une bijection $I \xrightarrow{\sigma} J$ et un automorphisme Ψ de $E(T)$ tels que

$$\forall\, i \in I\,, \qquad \Psi(\theta(C_i)) = K_{\sigma(i)}\ .$$

Définissons l'automorphisme Ψ de Q, comme étant la somme de $\Psi \circ \theta$ sur $E(S)$ et de l'identité sur K, nous obtenons ainsi le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - Soient deux sommes directes maximales de sous-modules injectifs indécomposables d'un module injectif Q :

$$S = \bigoplus_{i\in I} C_i\,, \qquad T = \bigoplus_{j\in J} K_j\ ;$$

il existe alors un automorphisme φ de Q et une bijection $I \xrightarrow{\sigma} J$ tels que :

$$\forall\, i \in I\,, \qquad \varphi(C_i) = K_{\sigma(i)}\ .$$

Comme toute somme directe maximale de co-irréductibles de Q peut être étendue en une somme directe maximale d'injectifs indécomposables (cf. proposition 4 du § 1), ce théorème 5 permet de donner la définition suivante :

DÉFINITION. - On appelle dimension d'un module injectif Q, le cardinal d'une famille indépendante maximale de sous-modules co-irréductibles de Q ; ce cardinal qui se note $\dim Q$ ne dépend pas du choix d'une telle famille.

6. Dimension d'un module quelconque.

La notion précédente de dimension s'étant à un module quelconque au moyen du théorème suivant.

THÉORÈME 6. - Soient deux sommes directes maximales de sous-modules co-irréductibles du module M :

$$S = \bigoplus_{i\in I} C_i\,, \qquad T = \bigoplus_{j\in J} K_j\ ,$$

$E(C_i)$ et $E(K_j)$ des enveloppes injectives des C_i et des K_j.

Dans ces conditions, il existe une bijection $I \xrightarrow{\sigma} J$, et un isomorphisme φ de $\bigoplus_{i\in I} E(C_i)$ sur $\bigoplus_{j\in J} E(K_j)$, tels que :

$$\forall\, i \in I\,, \qquad \varphi(E(C_i)) = E(K_{\sigma(i)})\ .$$

Preuve. - Soit $E(M)$ une enveloppe injective de M ; choisissons pour chaque i, une enveloppe injective $E(C_i)$ de C_i dans $E(M)$; alors

$$S' = \sum_{i\in I} E(C_i)$$

est directe (cf. proposition 1, § 1) et formée de composantes $E(C_i)$ injectifs indécomposables. Pour cet ensemble de propriétés, S' est maximale dans $E(M)$, car $E(M)$ est extension essentielle de E :

S'il existait un injectif indécomposable Γ de $E(M)$, indépendant des $E(C_i)$: $S' \cap \Gamma = 0$, $C = M \cap \Gamma \neq 0$ serait alors un co-irréductible de M tel que

$$S \cap C = 0 \quad ,$$

donc indépendant des C_i .

De même on peut étendre $T = \bigoplus_{j\in J} K_j$ en une somme directe maximale dans $E(M)$ d'injectifs indécomposables, $T' = \bigoplus_{j\in J} E(K_j)$. Le théorème 5, appliqué aux sommes S' et T' de l'injectif $E(M)$, donne alors la bijection σ et l'isomorphisme φ cherchés.

DÉFINITION. - On appelle dimension d'un module M , le cardinal d'une famille indépendante maximale de sous-modules co-irréductibles de M ; ce cardinal qui se note $\dim M$ ne dépend pas du choix d'une telle famille.

Lorsque $\dim M$ est finie, on retrouve bien-entendu la dimension définie par A. W. GOLDIE dans [7].

La dimension d'un module a les propriétés additives que l'on est en droit d'attendre :

PROPOSITION 7. - Si $M = M_1 \oplus M_2$, alors :

$$\dim M = \dim M_1 + \dim M_2 \quad .$$

Preuve. - Introduire les enveloppes injectives Q_1 et Q_2 de M_1 et M_2 , utiliser le corollaire du théorème 1, et observer que la dimension d'un module est égale à celle de son enveloppe injective.

Nous terminerons par quelques observations sur les $\cap$-décompositions de 0 (ou de tout autre sous-module, par passage aux quotients).

Au cours de l'étude du théorème 3 du § 4, il a été établi que, dans un module M

riche en co-irréductibles, il était possible de trouver une $\cap$-décomposition irréductible réduite de 0 :

$$0 = \bigcap_{i\in I} X_i$$

<u>sur</u> toute somme directe maximale de co-irréductibles $S = \bigoplus_{i\in I} C_i$ donnée dans M, c'est-à-dire telle que,

$\forall\, i \in I$, X_i contienne $\overline{C}_i = \bigoplus_{j\neq i} C_j$, $\overline{X}_i = \bigcap_{j\neq i} X_i$ contienne C_i ;

et dans ce cas,

$$\operatorname{card} I = \dim M \quad .$$

De telles $\cap$-décompositions sont caractérisées par le fait que la famille indépendante de co-irréductibles associés $(\overline{X}_i)_{i\in I}$ est <u>maximale</u>.

Il existe des $\cap$-décompositions irréductibles réduites de 0 telles que la famille indépendante de co-irréductibles associés $(\overline{X}_i)_{i\in I}$ ne <u>soit pas maximale</u> (considérer le $\underset{\sim}{Z}$-module produit d'une famille infinie de $\underset{\sim}{Z}$-modules isomorphes au p-groupe de type p^∞, p étant un nombre premier fixé).

Les théorèmes 3 et 6 permettent, touchant cette question, d'énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 8. - <u>Soient</u> M <u>un module</u> riche <u>en co-irréductibles et</u> :

$$0 = \bigcap_{i\in I} X_i \ , \qquad 0 = \bigcap_{j\in J} Y_j$$

<u>deux</u> $\cap$<u>-décompositions irréductibles</u> réduites <u>de</u> 0 <u>sur des familles indépendantes</u> maximales <u>de co-irréductibles ; il existe alors une</u> bijection $I \xrightarrow{\sigma} J$ <u>et un</u> isomorphisme φ <u>de</u> $\bigoplus_{i\in I} E(M|X_i)$ <u>sur</u> $\bigoplus_{j\in J} E(M|Y_j)$ <u>tels que</u> :

$$\forall\, i \in I \ , \qquad \varphi(E(M|X_i)) = E(M|Y_{\sigma(i)}) \quad .$$

En effet, le théorème 6 montre que les sommes directes :

$$\bigoplus_{i\in I} E(\overline{X}_i) \qquad \text{et} \qquad \bigoplus_{j\in J} E(\overline{Y}_j)$$

sont isomorphes, $E(\overline{X}_i)$ et $E(\overline{Y}_j)$ étant des enveloppes injectives de $\overline{X}_i = \bigcap_{\lambda\neq i} X_\lambda$ et de $\overline{Y}_j = \bigcap_{\mu\neq j} Y_\mu$.

D'autre part, $\overline{X}_i \cap X_i = 0$ entraîne que $\overline{X}_i \approx (X_i \oplus \overline{X}_i)|X_i$ (sous-module non nul du module co-irréductible $M|X_i$) ; ce qui signifie que les enveloppes injectives de $\overline{X}_i$ et de $M|X_i$ sont isomorphes.

<u>Remarque</u> 1. - Lorsque les $\cap$-décompositions irréductibles réduites de 0 ,

$$0 = \bigcap_{i\in I} X_i \ , \qquad 0 = \bigcap_{j\in J} Y_j \ ,$$

définissent des familles indépendantes <u>non maximales</u> de co-irréductibles

$$(\bigcap_{\lambda\neq i} X_\lambda)_{i\in I} \ , \qquad (\bigcap_{\mu\neq j} Y_\mu)_{j\in J} \ ,$$

le problème de l'égalité des cardinaux de I et de J se pose.

Observons à ce sujet que, dans son fascicule d'algèbre linéaire (cf. [2]), N. BOURBAKI propose, au § (e) de l'exercice 23, p. 271, et sans condition explicite de finitude, d'établir l'égalité de ces cardinaux en utilisant l'exercice 21 (d) ; ce dernier exercice suppose (explicitement) que les familles d'injectifs indécomposables considérés sont <u>finies</u>. D'ailleurs, la preuve de l'exercice 21 (d) utilise à son tour l'exercice 16 (b) qui donne l'intéressante caractérisation suivante :

"Une famille de sous-modules $\cap$-irréductibles, $(E_\lambda)_{\lambda\in L}$, d'un module F , est une décomposition irréductible réduite de 0 dans F si, et seulement si, l'homomorphisme canonique

$$F \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{\lambda\in L} (F|E_\lambda)$$

est essentiel" ; aucune condition supplémentaire n'apparaît dans le libellé de cet exercice ; or, φ n'est défini que sous l'une des hypothèses suivantes :

(a) φ est <u>restreint</u> au sous-module F_0 de F constitué des éléments x de F pour lesquels il n'existe qu'un nombre fini d'indices λ pour lesquels $x \notin E_\lambda$. Dans ce cas l'assertion annoncée est vraie.

(b) La somme directe $\bigoplus_{\lambda\in L} (F|E_\lambda)$ est remplacée par le produit $\prod_{\lambda\in L} (F|E_\lambda)$; mais alors φ n'est pas essentiel pour toutes les $\cap$-décompositions réduites de 0 : soit $F = \bigoplus_{\lambda\in L} G_\lambda$, où G_λ est, pour tout λ , un $\underset{\sim}{Z}$-module isomorphe au p-groupe abélien de type p^∞ (indécomposable et divisible) ; posons

$$E_\lambda = \bigoplus_{\mu\neq\lambda} G_\mu \ .$$

$(E_\lambda)_{\lambda\in L}$ est une $\cap$-décomposition irréductible réduite de 0 ,

$$F \xrightarrow{\varphi} \prod_{\lambda\in L} (F|E_\lambda) \approx \prod_{\lambda\in L} G_\lambda$$

est le plongement canonique de F dans $\prod_{\lambda \in L} G_\lambda$, et le $\underset{\approx}{Z}$-module injectif $\prod_{\lambda \in L} G_\lambda$ n'est pas extension essentielle du $\underset{\approx}{Z}$-module injectif F , lorsque le cardinal de L est infini.

Remarque 2. - Nous n'avons pas abordé, dans ce travail, l'étude particulière des anneaux riches en idéaux (à gauche) co-irréductibles ; signalons à ce sujet, que G. RENAULT a établi tout récemment le résultat : dans un anneau réduit A et riche en idéaux à gauche co-irréductibles, la relation $Ax \cap Ay = (0)$ implique $xy = yx = 0$ (cf. [14]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AZUMAYA (G.). - Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem, Nagoya math. J., t. 1, 1950, p. 117-124.

[2] BOURBAKI (N.). - Algèbre linéaire, Chap. 2, 3e éd. - Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1236 ; Bourbaki, 6).

[3] ECKMANN (B.) und SCHOPF (A.). - Über injective Moduln, Arch. der Math., t. 4, 1953, p. 75-78.

[4] FORT (J.). - Contribution à l'étude des éléments tertiaires et isotypiques dans les modules et les ($\mathfrak{T}$)-algèbres, Bull. Soc. math. France, Mémoire n° 1, 1964, IV + 167 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[5] FORT (J.). - Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, 1966, p. 1239-1242.

[6] GOLDIE (A. W.). - The structure of prime rings under ascending chain conditions, Proc. London math. Soc., 3e série, t. 8, 1958, p. 589-608.

[7] GOLDIE (A. W.). - Semi-prime rings with maximum condition, Proc. London math. Soc., 3e série, t. 10, 1960, p. 201-220.

[8] JACOBSON (N.). - Structure of rings, 2e éd. - Providence, American mathematical Society, 1964 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 37).

[9] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémor. Sc. math., 154, 117 p.).

[10] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Coeur d'un module, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 42, 1963, p. 367-407.

[11] MATLIS (E.). - Injective modules over noetherian rings, Pacific J. of Math., t. 8, 1958, p. 511-528.

[12] RENAULT (G.). - Sous-modules compléments dans un A-module M , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 3222-3225.

[13] RENAULT (G.). - Etude des sous-modules compléments dans un A-module, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 16e année, 1962/63, n° 16, 12 p.

[14] RENAULT (G.). - Anneaux réduits non commutatifs, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 20e année, 1966/67, n° 1, 9 p.