Štefan Schwarz

L'application des demi-groupes à l'étude des matrices non-négatives

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, nº 1 (1966-1967), exp. nº 2, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_1_A2_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
20e année, 1966/67, n° 2

21 novembre 1966

L'APPLICATION DES DEMI-GROUPES À L'ÉTUDE DES MATRICES NON-NÉGATIVES

par Štefan SCHWARZ

Soit A une matrice carrée non-négative, c'est-à-dire, une matrice dont tous les éléments sont non-négatifs.

La théorie classique de ces matrices étudie le polynôme caractéristique, le spectre, la localisation et la multiplicité des racines caractéristiques.

Si l'on observe soigneusement la situation, on peut voir qu'il y a des résultats qui dépendent seulement de la distribution des zéros et des non-zéros dans la matrice A et dans les termes de la suite des puissances

$$A\ ,\ A^2\ ,\ A^3\ ,\ \ldots\ . \tag{1}$$

Le problème que nous allons traîter ici est en relation étroite avec la théorie des automates finis, les chaînes de Markov et la théorie des graphes finis (ou, si vous voulez, les relations binaires).

Je commencerai par donner deux exemples. En considérant la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad abc > 0 \quad ,$$

on voit que les puissances sont du type suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \\ X & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X \\ X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}, \qquad \ldots ,$$

avec une répétition périodique.

Mais si l'on calcule les puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

on remarque que A^2 , A^3 , A^4 contiennent des zéros, mais A^5 est une matrice positive, et toutes les puissances suivantes sont des matrices positives.

Essentiellement, notre but est de trouver des règles générales concernant la distribution des zéros et des non-zéros dans la suite (1).

A cette fin j'ai développé pendant les trois dernières années une méthode générale qui utilise la théorie des demi-groupes. Ce sont les principes et quelques-uns des résultats que nous allons donner ici sans démonstrations, et je me bornerai aux résultats que j'ai trouvés au moyen de cette méthode.

Soit N l'ensemble $\{1 , 2 , \ldots , n\}$ des nombres naturels. Désignons par $S = S(n)$ l'ensemble des symboles

$$S = \{e_{ij} \mid i , j \in N\} \cup \{0\} .$$

Nous définissons dans S une multiplication de la façon suivante :

$$e_{ij}\, e_{\ell m} = \begin{cases} \ell_{im} & \text{pour } j = m , \\ 0 & \text{pour } j \neq m , \end{cases}$$

et 0 ayant les propriétés ordinaires d'un zéro multiplicatif. Par rapport à cette multiplication, S devient un demi-groupe simple fini contenant un élément zéro. S contient exactement n non-zéros idempotents $\{e_{11} , e_{22} , \ldots , e_{nn}\}$.

Soit maintenant A une matrice carrée à n lignes et n colonnes. Nous désignons par C_A le sous-ensemble de S contenant $\{0\}$ et tous les éléments e_{ij} pour lesquels $a_{ij} > 0$. Nous appellerons C_A <u>le support</u> de la matrice A .

Par exemple, le support de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est

$$C_A = \{0 , e_{12} , e_{13} , e_{21} , e_{31} , e_{33}\} .$$

Si A , B sont deux matrices carrées d'ordre n , on vérifie aisément que $C_{AB} = C_A . C_B$, où le produit à droite est le produit de deux sous-ensembles du demi-groupe S .

Désignons par $\mathfrak{S}$ le demi-groupe des parties de S . Il est clair que $\mathfrak{S}$ est un demi-groupe fini ; l'application $A \to C_A$ est un homomorphisme du demi-groupe de toutes les matrices carrée d'ordre n non-négatives sur $\mathfrak{S}$.

Considérons, en particulier, la suite (en général infinie)

(1) $$A\ ,\ A^2\ ,\ A^3\ ,\ \ldots\ .$$

Les supports correspondants sont

(2) $$C_A\ ,\ C_A^2\ ,\ C_A^3\ ,\ \ldots\ .$$

Il est clair que la suite (2) ne contient qu'un nombre fini d'éléments (sous-ensembles de S) distincts. Désignons par $k = k(A)$ le plus petit nombre naturel tel que C_A^k soit égal à $C_A^{k+\ell}$ (ℓ convenablement choisi) et par $d = d(A)$ le plus petit nombre naturel $\geqslant 1$ pour lequel $C_A^k = C_A^{k+d}$. La suite (2) est donc de la forme

$$C_A\ ,\ \ldots\ ,\ C_A^{k-1}\ \mid\ C_A^k\ ,\ \ldots\ ,\ C_A^{k+d-1}\ \mid\ C_A^k\ ,\ \ldots\ ,\ C_A^{k+d-1}\ \mid\ \ldots\ .$$

L'ensemble $\mathfrak{S}_A = \{C_A\ ,\ \ldots\ ,\ C_A^{k+d-1}\}$ est un demi-groupe cyclique fini d'ordre $k + d - 1$. Il est bien connu que l'ensemble $\mathfrak{G}_A = \{C_A^k\ ,\ \ldots\ ,\ C_A^{k+d-1}\}$ est un groupe cyclique d'ordre d (par rapport à la multiplication des parties de S). L'élément unité de $\mathfrak{G}_A$ est C_A^ρ , avec un $\rho > 0$ satisfaisant l'inégalité

$$k \leqslant \rho \leqslant k + d - 1\ , \qquad \text{et} \qquad d \mid \rho\ .$$

De cette manière, <u>nous avons associé à chaque matrice non-négative trois nombres naturels</u> $k(A)$, $d(A)$, $\rho(A)$. Ces nombres sont des <u>invariants</u> par rapport à l'opération $A \rightarrow P^{-1}AP$ où P est une matrice de permutation.

Voici quelques problèmes :

1° Quel est le sens du nombre $d(A)$?

2° Comment le comportement des puissances A^u est-il lié avec le nombre d ?

3° Peut-on donner une estimation de la grandeur des nombres $k(A)$ et $d(A)$ en fonction de n ?

I

Nous commençons par un résultat préliminaire.

On peut montrer que, pour chaque nombre naturel $t \geqslant 1$, on a

$$C_A^t \subset C_A \cup C_A^2 \cup \ldots \cup C_A^n\ .$$

Ceci entraîne que l'ensemble

$$S_A = C_A \cup C_A^2 \cup \ldots \cup C_A^n$$

est un demi-groupe (sous-demi-groupe de S engendré par C_A). [Naturellement, par exemple, C_A^{n+1} a - en général - une intersection non-zéro avec plusieurs membres de la réunion $C_A \cup \ldots \cup C_A^n$.]

Une matrice est appelée réductible (décomposable) s'il existe une matrice de permutation P telle que $P^{-1}AP$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix} .$$

[Autrement dit, on peut obtenir une matrice de cette forme en permutant les lignes d'une façon convenable et les colonnes de la même façon.]

La matrice A est appelée complètement réductible (décomposable) si l'on a, en outre, $B = 0$.

Un des premiers résultats est :

La matrice A est irréductible si, et seulement si,

$$C_A \cup C_A^2 \cup \ldots \cup C_A^n = S \quad .$$

On montre que c'est le cas si, et seulement si,

$$C_A^k \cup C_A^{k+1} \cup \ldots \cup C_A^{k+d-1} = S \quad .$$

[C'est une conséquence immédiate du fait que $C_A^k \cup \ldots \cup C_A^{k+d-1}$ est un idéal bilatère du demi-groupe S_A , que, pour une matrice irréductible, $S_A = S$, et que S est un demi-groupe simple.]

Si A est irréductible, on a toujours $1 \leqslant d(A) \leqslant n$, et les ensembles

$$C_A^k \, , \; C_A^{k+1} \; , \; \ldots \; , \; C_A^{k+d-1}$$

sont quasi-disjoints (c'est-à-dire l'intersection de ces ensembles deux à deux est l'élément zéro).

Il existe plusieurs caractérisations du nombre d . L'une d'elles montre que d coïncide, dans le cas d'une matrice irréductible, avec une notion classique, à savoir, l'indice d'imprimitivité de A .

Considérons à cette fin une puissance fixe A^u d'une matrice irréductible A . On peut prouver que A^u est complètement décomposable en (u , d) matrices irréductibles. En particulier, A^d est complètement décomposable en d matrices irréductibles.

Par exemple, supposons $n \geqslant 4$ et $d = 4$. Les nombres des composants irréductibles sont :

$$A\ ,\ A^2\ ,\ A^3\ ,\ A^4\ ,\ A^5\ ,\ A^6\ ,\ \dots$$

$$1\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ 4\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ .$$

La matrice A^4 est de la forme

$$\begin{pmatrix} \square & & & 0 \\ & \square & & \\ & & \square & \\ 0 & & & \square \end{pmatrix} .$$

Les "boîtes" ne sont pas d'abord nécessairement positives. Mais, à partir de la q-ième puissance, les composants sont positifs.

Une matrice A est appelée primitive s'il existe un nombre entier w tel que A^w soit positive. Une matrice primitive est nécessairement irréductible. Une matrice irréductible est primitive si, et seulement si, $d = 1$.

Nous pouvons formuler notre résultat comme suit :

Si A est irréductible, $d(A)$ est le plus petit nombre naturel pour lequel A^d est complètement décomposable en d matrices primitives.

C'est là un résultat classique. Mais pour la démonstration, nous n'avons pas besoin des propriétés spectrales de la matrice. Ce sont les moyens de la théorie des groupes qui suffisent pour la démonstration.

II

Soit maintenant A une matrice réductible. Ecrivons A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rr} \end{pmatrix} \tag{3}$$

où les matrices $A_{\alpha\alpha}$ sont irréductibles (y compris le cas où quelques-unes des $A_{\alpha\alpha}$ sont des matrices nulles d'ordre 1).

Si la période de $C_{A_{\alpha\alpha}}$ est d_α, on prouve que $d(A)$ est le petit multiple commun :

$$d(A) = [d_1\ ,\ d_2\ ,\ \dots\ ,\ d_r]\ .$$

On peut aussi caractériser le nombre $d(A)$ d'une manière qui n'exige pas la forme normale (3). Considérons la suite (2). J'ai discuté la question de trouver les ensembles $C_A^{\alpha_1}$, $C_A^{\alpha_2}$, ... qui forment eux-mêmes un demi-groupe.

Si A est irréductible, il existe une seule puissance, à savoir C_A^{ρ}, qui est elle-même un demi-groupe.

Si A est réductible, il est possible de trouver, en général, plusieurs exposants α_1, α_2, ... pour lesquels $C_A^{\alpha_1}$, $C_A^{\alpha_2}$, ... sont des ensembles distincts et en même temps des demi-groupes.

On a le résultat suivant :

Le nombre d est le plus grand diviseur commun de tous les α pour lesquels C_A^{α} est un demi-groupe.

III

Posons maintenant la question de savoir ce qu'on peut dire sur la grandeur du nombre $k(A)$.

Il est trivial que $k(A) \leqslant 2^{n^2} + 1$ (nombre des éléments de $\mathfrak{S}$).

Mais en réalité, l'ordre de $k(A)$ est n^2. Plus précisément :

(a) Si A est primitif, on a $k(A) \leqslant (n-1)^2 + 1$, et ce résultat est le meilleur possible. Il a été énoncé par WIELANDT et prouvé plusieurs fois dans ces huit dernières années.

(b) Si A est irréductible, mais non-nécessairement primitive (alors $1 \leqslant d \leqslant n$), j'ai trouvé le résultat suivant : Posons $n = rd + s$ avec $0 \leqslant s \leqslant d-1$. Puis

$$k(A) \leqslant \begin{cases} n^2/d - 2n + 3d - s - 1 , & \text{pour } r \geqslant 2 \\ s + 1 , & \text{pour } r = 1 . \end{cases}$$

[Presque le même résultat a été publié récemment par HEAP et LYNN, qui utilisent les méthodes de la théorie des graphes.]

Si $s = d - 1$, nous avons

$$k(A) \leqslant \frac{n^2}{d} - 2u + 2d .$$

Ce résultat est vrai aussi pour $s = 0$. De là vient une conjecture que je ne sais pas prouver, à savoir qu'on a toujours

$$k(A) \leqslant \frac{n^2}{d} - 2n + 2d .$$

En tout cas, un résultat meilleur ne peut pas exister, car pour chaque n et d tels que $d|n$, il existe une matrice A avec $k(A) = \frac{n^2}{d} - 2u + 2d$.

(c) Si A est réductible, je viens de prouver le résultat suivant. On a toujours $k(A) \leqslant (n-2)^2 + 2$, et ce résultat ne peut pas être amélioré.

(d) Il y a d'autres problèmes dans cet ordre d'idées. Il est clair que $k(A)$ et $d(A)$ dépendent du nombre des éléments positifs dans les lignes de A. Supposons que la i-ième ligne contienne g_i éléments non nuls. Désignons par F_i "le support de cette ligne". Les i-ièmes lignes dans (1) ont pour supports les ensembles

$$F_i\ ,\ F_i C_A\ ,\ \ldots\ ,\ F_i C_A^{k_i-2}\ \Big|\ F_i C_A^{k_i-1}\ ,\ \ldots\ ,\ F_i C_A^{k_i+d_i-2}\ \Big|\ F_i C_A^{k_i-1}\ ,\ \ldots\ .$$

Les nombres k_i et d_i sont définis comme les nombres $k(A)$ et $d(A)$.

J'ai prouvé pour une matrice irréductible que :

$$k_i \leqslant \begin{cases} (n-g_i)(n-g_i+1)+1\ , & \text{pour } g_i \geqslant 2\ , \\ (n-1)^2+1 & ,\ \text{pour } g_i = 1\ . \end{cases}$$

On en déduit :

$$k(A) \leqslant n + \min_i\ (n-g_i)(n-g_i+1)\ ,$$

résultat souvent plus avantageux.

IV

J'ajoute une remarque. Il serait intéressant d'étudier le demi-groupe $\mathfrak{S}$ tout entier (et pas seulement les sous-demi-groupes cycliques $\mathfrak{S}_A$). Mais ce n'est pas un problème très facile. Il ne semble pas facile de trouver tous les idempotents de $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire les sous-ensembles C de S pour lesquels $C^2 = C$.

Un peu plus facile (mais en aucun cas trivial) est d'étudier les invariants k et d du produit AB en connaissant ceux-ci pour les matrices A et B.

Par exemple : Si A et B sont des matrices primitives, AB n'est pas nécessairement primitive. Mais c'est le cas si C_A et C_B sont permutables, et

$$k(AB) \leqslant \min[k(A)\ ,\ k(B)]\ .$$

[Voici un autre résultat typique : si A, B et AB sont irréductibles, alors BA est aussi irréductible et nous avons $d(AB) = d(BA)$, $|k(AB) - k(BA)| \leqslant 1$.]

En terminant, je voudrais souligner que le but de cette conférence a été de donner seulement une idée d'une application nouvelle des demi-groupes dans un autre domaine de l'algèbre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DULMAGE (A. L.) and MENDELSOHN (N. S.). - The exponent of a primitive matrix, Canad. math. Bull., t. 5, 1962, p. 241-244.

[2] DULMAGE (A. L.) and MENDELSOHN (N. S.). - Gaps in the exponent set of primitive matrices, Illinois J. of Math., t. 8, 1964, p. 642-656.

[3] DULMAGE (A. L.) and MENDELSOHN (N. S.). - The structure of powers of non-negative matrices, Canad. J. of Math., t. 17, 1965, p. 318-330.

[4] HEAP (B. R.) and LYNN (M. S.). - The index of primitivity of a non-negative matrix, Numer. Math., Berlin, t. 6, 1964, p. 120-141.

[5] HEAP (B. R.) and LYNN (M. S.). - The structure of powers of non-negative matrices, I : The index of convergence, SIAM J. on appl. Math., t. 14, 1966, p. 610-639.

[6] HEAP (B. R.) and LYNN (M. S.). - The structure of powers of non-negative matrices, II : The index of maximum density (à paraître).

[7] HOLLADAY (J. C.) and VARGA (R. S.). - On powers of non-negative matrices, Proc. Amer. math. Soc., t. 9, 1958, p. 631-634.

[8] LJUBIČ (Ju. I.). - Ocenki klja optimal'noj determinizacii nedeterminrovannykh avtonomnykh avtomatov, Sibirsk. mat. Ž., t. 5, 1964, p. 337-355.

[9] PTÁK (V.). - On a combinatorial theorem and its application to non-negative matrices, Czech. math. J., t. 8, 1958, p. 487-495.

[10] PERKINS (P.). - A theorem on regular matrices, Pacific J. of Math., t. 2, 1961, p. 1529-1533.

[11] PULLMAN (N.). - On the number of positive entries in the powers of a non-negative matrix, Canad. math. Bull., t. 7, 1964, p. 525-537.

[12] SCHWARZ (Š.). - A semi-group treatment of some theorems on non-negative matrices, Czech. math. J., t. 15, 1965, p. 212-229.

[13] SCHWARZ (Š.). - On powers of non-negative matrices, Mat.-fys. Casopis Slov. Akad. vied, t. 15, 1965, p. 215-228.

[14] SCHWARZ [ŠVARC] (Š.). - Zametka k teorii neotricatel'nykh matric, Sibirsk. mat. Ž., t. 6, 1965, p. 207-211.

[15] SCHWARZ (Š.). - A new approach to some problems in the theory of non-negative matrices, Czech. math. J., t. 16, 1966, p. 274-284.

[16] SCHWARZ (Š.). - Some estimates in the theory of non-negative matrices, Czech. math. J., t. 17, 1967 (à paraître).

[17] SCHWARZ (Š.). - New kinds of theorems on non-negative matrices, Czech. math. J., t. 16, 1966, p. 285-295.

[18] WIELANDT (H.). - Unzerlegbare, nicht negative Matrizen, Math. Z., t. 52, 1950, p. 575-583.