Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean-Claude Petit

Caractérisation algébrique des plans affines munis d'une mesure des triangles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, nº 2 (1965-1966), exp. nº 22, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_2_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
19e année, 1965/66, n° 22

16 mai 1966

CARACTÉRISATION ALGÉBRIQUE DES PLANS AFFINES MUNIS D'UNE MESURE DES TRIANGLES

par Jean-Claude PETIT

1. Introduction.

On rappelle que, pour tout triple de points non alignés O , U , V d'un plan affine, on sait construire un corps ternaire K , c'est-à-dire un ensemble muni d'une loi de composition ternaire $T : K^3 \longrightarrow K$, vérifiant certaines propriétés (voir par exemple [5], p. 31). Réciproquement, la donnée d'un corps ternaire K permet de construire un plan affine dans lequel les points sont les éléments de $K \times K$, et les droites sont les sous-ensembles de points de l'un des deux types suivants :

droite d'équation $x = x_0$, $D = \{(x , y) ; y \in K , x = x_0 \in K\}$,
droite d'équation $y = T(a , x , b)$, $D = \{(x , y) ; x \in K , y = T(a , x , b)\}$,
où a est la pente de la droite et b l'ordonnée à l'origine.

On utilisera les deux lois binaires usuellement définies sur K :

(a) la multiplication définie par : $ab = T(a , b , o)$, pour laquelle $K^* = K - \{o\}$ a une structure de boucle d'élément neutre 1 ,

(b) l'addition définie par : $a + b = T(1 , a , b)$, pour laquelle K a une structure de boucle d'élément neutre o . On notera $- b$ l'élément b' déterminé par $b + b' = o$ (opposé à droite de b), et on écrira $a - b$ pour $a + (- b)$.

On rappelle aussi que l'identité $T(a , x , b) = ax + b$ n'est valable que dans certains plans, et qu'en général deux corps ternaires associés à deux repères distincts ne sont pas isomorphes.

L. LESIEUR a appliqué sa théorie de la mesure des simplexes au cas des triangles d'un plan affine ([2] et [3]) avec les définitions suivantes :

Triangle : triple ordonné de points non alignés.

Mesure des triangles à valeurs dans G : G étant un groupe dont e est l'élément neutre, et dont le centre possède un élément ε avec $\varepsilon^2 = e$, c'est une application $\mathfrak{M}$ de l'ensemble des couples ordonnés de triangles dans G :

$$\mathfrak{M}[(ABC) , (A'B'C')] = \frac{(ABC)}{(A'B'C')} \in G ,$$

vérifiant :

(M_1) $\frac{(ABC)}{(ABC)} = e$,

(M_2) $\frac{(A\ B\ C\ )}{(A'B'C')}\frac{(A'B'C')}{(A''B''C'')} = \frac{(ABC)}{(A''B''C'')}$,

(M_3) Si l'on échange deux sommets quelconques d'un des triangles (ABC) ou (A'B'C') , $\frac{(ABC)}{(A'B'C')}$ devient $\varepsilon \frac{(ABC)}{(A'B'C')}$.

- Axiome de parallélisme :

(P) BC//OA implique $\frac{(OAC)}{(OAB)} = e$.

- Axiome de linéarité :

(L) $R \in PQ$ implique $\frac{(PQA)}{(PQB)} = \frac{(PRA)}{(PRB)}$.

Dans le cas des plans de Moufang, où le corps ternaire K a les propriétés :

$T(a , x , b) = ax + b$,

K est un groupe abélien pour l'addition,

K^* possède l'associativité restreinte $a^{-1}(ab) = (ba)a^{-1} = b$,

L. LESIEUR a prouvé (cf. [3]) :

"Il existe une bijection entre l'ensemble des mesures $\mathfrak{M}$ à valeurs dans G vérifiant (L) et (P), et l'ensemble des homomorphismes de la boucle multiplicative d'un corps ternaire du plan dans le groupe G ."

Dans le cas où $G = \{e , \varepsilon\}$, la théorie de la mesure des triangles devient la théorie de l'orientation du plan, et E. GLOCK a donné des conditions nécessaires et suffisantes concernant un homomorphisme de K^* sur G pour que le plan (cf. [1]) coordonné par K soit orientable, sans hypothèses supplémentaires sur le plan.

Nous nous proposons de faire une synthèse de ces deux résultats en caractérisant les plans munis d'une mesure $\mathfrak{M}$ vérifiant (L) et (P) sans rien supposer de particulier concernant K ou G , excepté la commutativité de G , condition nécessaire d'après [3].

Les méthodes, utilisées dans les deux cas particuliers cités, utilisent les particularités de K ou de G et ne se transposent pas pour le cas général. Pour traiter ce problème, nous avons été amenés à définir et à étudier une mesure des vecteurs à supports parallèles. Indiquons certains des résultats obtenus en renvoyant à [4] pour les démonstrations.

2. Mesure des vecteurs à supports parallèles.

- Vecteur non nul : couple ordonné de points distincts. La droite passant par ces deux points est le support du vecteur.

- Mesure de vecteurs à supports parallèles : c'est une application $\mathfrak{M}^*$ de l'ensemble des couples ordonnés de vecteurs non nuls : (AB) , (CD) , avec $AB // CD$, dans G :

$$\mathfrak{M}^*[(AB)\ ,\ (CD)] = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \in G \quad ,$$

qui vérifie :

(M_1^*) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = e$, pour tout vecteur (AB) non nul.

(M_2^*) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \dfrac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$, pour tout choix de vecteurs non nuls parallèles.

(M_3^*) $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \varepsilon \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$, pour tout couple de vecteurs non nuls parallèles,

e désignant encore l'élément neutre de G et ε étant un élément du centre de G vérifiant $\varepsilon^2 = e$.

On démontre les résultats suivants :

THÉORÈME 1. - Etant donnée une géométrie plane affine, munie d'une mesure des triangles $\mathfrak{M}$ à valeurs dans G , vérifiant (L) et (P), il existe dans cette géométrie une mesure $\mathfrak{M}^*$ des vecteurs à supports parallèles dans G , qui vérifie :

(M_0^*) $\forall\ X \notin AB$, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{(XAB)}{(XAC)}$.

(M_4^*) $AA' // BB'$, $AB \neq A'B'$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = e$.

$\mathfrak{M}^*$ est unique et définie par : $X \notin AB$,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{(XAB)}{(XCD)} \qquad \text{si on a } AB = CD \quad ,$$

et par :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{(ACB)}{(ACD)} \qquad \text{pour } AB \neq CD \quad .$$

THÉORÈME 2. - Pour $CC_1 // C'C'_1$, avec $C_1 \in AB$, $C'_1 \in AB$, on a :

$$\frac{(ABC)}{(ABC')} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{C'C'_1}} .$$

THÉORÈME 3. - Si (ABC) et (A'B'C') sont deux triangles tels qu'on ait $AB//A'B'$, $BC//B'C'$, $CA//C'A'$, on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} .$$

THÉORÈME 4. - Soient A , B , C , D quatre points alignés tels que A et B soient distincts ainsi que C et D ; soient A' , B' , C' , D' quatre points alignés sur une droite distincte de AB , avec $AA'//BB'//CC'//DD'$, l'une de ces quatre droites pouvant ne pas être définie, on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} .$$

On peut établir d'autres résultats généralisant des propriétés usuelles de la mesure algébrique des vecteurs du plan coordonné par R (par exemple, les théorèmes de Ménélaüs et de Céva sont encore valables, ε remplaçant -1).

3. Utilisation de la mesure des vecteurs pour la recherche de conditions nécessaires.

On définit une application f de K^* dans G en posant $\forall\ x \in K^*$,

$$f(x) = \frac{\overline{O\langle x\rangle}}{\overline{O\langle 1\rangle}} ,$$

où $\langle x\rangle$ désigne le point de coordonnées (o , x) dans K . Il est aisé de vérifier que f est l'homomorphisme de K^* sur G utilisé dans [3] (on peut toujours supposer f surjective en prenant $f(K^*)$ au lieu de G). Le corps ternaire K utilisé ici est l'un quelconque des corps ternaires pouvant coordonner le plan muni de $\mathfrak{M}^*$.

Prouvons d'abord la propriété suivante :

$$(F_1) \quad \frac{\overline{\langle a\rangle\langle b\rangle}}{\overline{\langle a'\rangle\langle b'\rangle}} = f(b - a)\ f(b' - a')^{-1} .$$

$$f[(a + x) - (b + x)] = f[(x + a) - (x + b)] = f(a - b) .$$

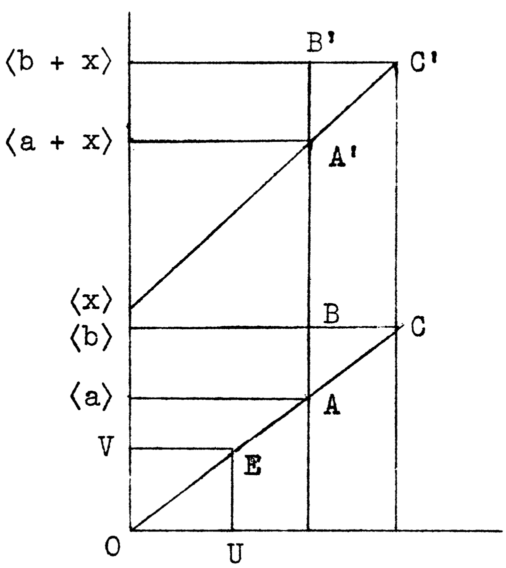

fig. 1

En appliquant (M_4^*) et le théorème 3, on obtient (fig. 1) :

$$\frac{\overline{\langle a\rangle\langle b\rangle}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{\langle a+x\rangle\langle b+x\rangle}} = e \; .$$

D'où, en faisant le produit, il vient :

$$\frac{\overline{\langle a\rangle\langle b\rangle}}{\overline{\langle a + x\rangle\langle b + x\rangle}} = e^3 = e \; .$$

Si on applique ce résultat avec $b = - a$, on trouve :

$$\frac{\overline{\langle a\rangle\langle b\rangle}}{\overline{\langle o\rangle\langle b - a\rangle}} = e \; ,$$

soit encore :

$$\frac{\overline{\langle a\rangle\langle b\rangle}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{O\langle b - a\rangle}}{\overline{OV}} = f(b - a) \; ,$$

d'où résulte la première partie de (F_1). Pour terminer la démonstration, on applique ce résultat à

$$\frac{\overline{\langle a\rangle\langle b\rangle}}{\overline{\langle a + x\rangle\langle b + x\rangle}} = e = \frac{\overline{\langle a\rangle\langle b\rangle}}{\overline{\langle x + a\rangle\langle x + b\rangle}} \; ,$$

cette dernière égalité provenant d'une simple application de (M_4^*).

(F_1) permet d'exprimer $\mathfrak{M}$ à l'aide de f. Il suffit pour cela de savoir calculer $\frac{(ABP)}{(ABQ)}$, car toute valeur $\frac{(ABC)}{(A'B'C')}$ est le produit d'un nombre fini de telles expressions.

Si AB rencontre OV $(V = \langle 1\rangle)$, la parallèle à OV menée par Q rencontre AB en Q' , et celle menée par P rencontre AB en P' . D'après le théorème 2, on obtient :

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = \frac{\overline{P'P}}{\overline{Q'Q}} = \frac{\overline{\langle y_{P'}\rangle\langle y_P\rangle}}{\overline{\langle y_{Q'}\rangle\langle y_Q\rangle}} \qquad \text{(fig. 2).}$$

Si AB est parallèle à OV (fig.3), on a :

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = \frac{\overline{IP'}}{\overline{IQ'}} \qquad \text{grâce à (L) et (P).}$$

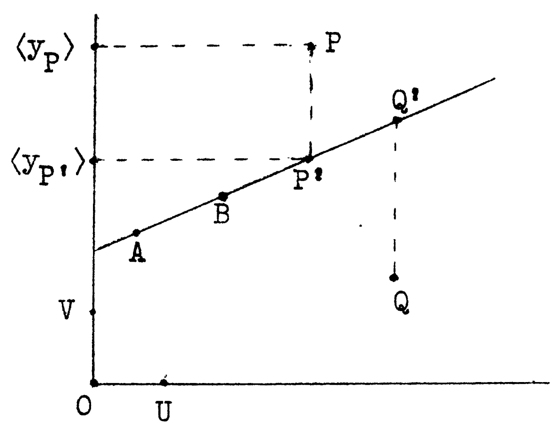

fig. 2

D'après le théorème 4, on a aussi :

$$\frac{\overline{IP'}}{\overline{IQ'}} = \frac{\overline{\langle c\rangle\langle p\rangle}}{\overline{\langle c\rangle\langle q\rangle}} ,$$

où p et q sont les abscisses de P et Q , et où $x = c$ est l'équation de AB . Il vient donc :

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = \frac{\overline{\langle c\rangle\langle p\rangle}}{\overline{\langle c\rangle\langle q\rangle}} .$$

En appliquant (F_1) au calcul de ces expressions, on obtient :

THÉORÈME 5.

<u>Si</u> AB <u>a pour équation</u> : $y = T(u , x , v)$, <u>on a</u> :

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = f[y_P - T(u , x_P , v)]\ f[y_Q - T(u , x_Q , v)]^{-1} .$$

<u>Si</u> AB <u>a pour équation</u> : $x = c$, <u>on a</u> :

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = f(x_P - c)\ f(x_Q - c)^{-1} .$$

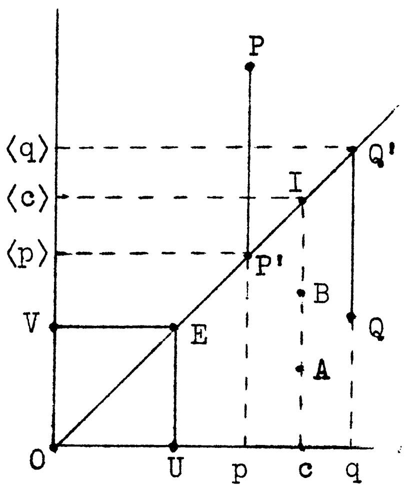

fig. 3

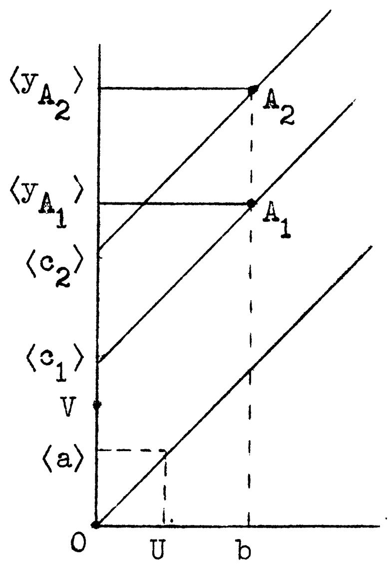

fig. 4

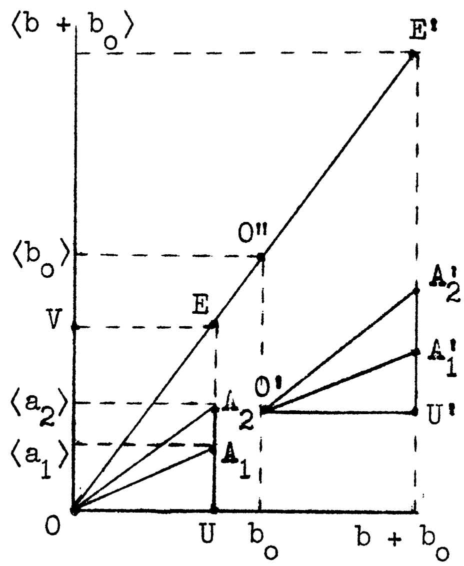

fig. 5

On déduit de (F_1) avec $a = b' = 1$, $a' = b = o$, la propriété :

(F_2) $f(-1) = \varepsilon$.

Soient $y_{A_1} = T(a , b , c_1)$ et $y_{A_2} = T(a , b , c_2)$ avec $c_1 \neq c_2$,

$$A_1 = (b , y_{A_1}) , \quad A_2 = (b , y_{A_2}) \qquad \text{(voir fig. 4)} .$$

Avec (M_4^*), on obtient :

$$\frac{\overline{\langle y_{A_1}\rangle\langle y_{A_2}\rangle}}{\overline{A_1\ A_2}}\,\frac{\overline{A_1\ A_2}}{\overline{\langle c_1\rangle\langle c_2\rangle}} = e^2 = \frac{\overline{\langle y_{A_1}\rangle\langle y_{A_2}\rangle}}{\overline{\langle c_1\rangle\langle c_2\rangle}} \quad .$$

Par application de (F_1), il vient :

(F_3) $\quad f[T(a\ ,\ b\ ,\ c_1) - T(a\ ,\ b\ ,\ c_2)] = f(c_1 - c_2)$ pour $c_1 \neq c_2$.

Considérons maintenant deux droites d'équation respective :

$$y = T(a_1\ ,\ x\ ,\ c_1) \qquad \text{et} \qquad y = T(a_2\ ,\ x\ ,\ c_2) \quad ,$$

qui se coupent au point O' d'abscisse b_o , c'est-à-dire qu'on a :

$$T(a_1\ ,\ b_o\ ,\ c_1) = T(a_2\ ,\ b_o\ ,\ c_2) \qquad \text{(cf. fig. 5)} \quad .$$

On suppose en outre : $a_1 \neq a_2$.

Soient respectivement U' , A'_1 , A'_2 , les intersections de la droite d'équation $x = b + b_o$, $(b \neq o)$, avec les droites issues de O' de pentes o , a_1 , a_2 . Soient respectivement U , A_1 , A_2 les points de coordonnées $(1\ ,\ o)$, $(1\ ,\ a_1)$, $(1\ ,\ a_2)$. Les triangles $(O'U'A'_1)$ et $(O'A'_1\ A'_2)$ ont leurs trois côtés respectivement parallèles aux trois côtés de (OUA_1) et $(OA_1\ A_2)$. Nous pouvons appliquer le théorème 3 deux fois pour obtenir :

$$\frac{\overline{A'_1\ A'_2}}{\overline{A_1\ A_2}} = \frac{\overline{O'A'_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{O'U'}}{\overline{OU}} \quad .$$

Or en appliquant deux fois le théorème 4, nous obtenons :

$$\frac{\overline{O'U'}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{O''E'}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{\langle b_o\rangle\langle b + b_o\rangle}}{\overline{OV}} \quad ,$$

d'où

$$\frac{\overline{\langle T(a_1\ ,\ b + b_o\ ,\ c_1)\rangle\langle T(a_2\ ,\ b + b_o\ ,\ c_2)\rangle}}{\overline{\langle a_1\rangle\langle a_2\rangle}} = \frac{\overline{\langle b_o\rangle\langle b + b_o\rangle}}{\overline{OV}} \quad .$$

Utilisons maintenant (F_1), il vient :

$$f[T(a_2\, ,\ b + b_o\, ,\ c_2) - T(a_1\, ,\ b + b_o\, ,\ c_2)]\, f(a_2 - a_1)^{-1} = f[(b + b_o) - b_o] = f(b) \quad .$$

D'où :

(F_4) De $T(a_1\,,\,b_o\,,\,c_1) = T(a_2\,,\,b_o\,,\,c_2)$, avec $a_1 \neq a_2$ et $b \neq o$, il résulte :

$$f[T(a_2\,,\,b+b_o\,,\,c_2) - T(a_1\,,\,b+b_o\,,\,c_1)] = f(a_1 - a_2)\ f(b) \quad .$$

4. Suffisance des propriétés (F_3) et (F_4).

Soit K un corps ternaire coordonnant une géométrie plane ; soit f un homomorphisme de la boucle multiplicative K^* sur un groupe commutatif G , tel que f ait les propriétés (F_3) et (F_4). D'après [3], la détermination de la mesure $\mathfrak{M}$ équivaut à la définition de :

$$\mathfrak{M}[(ABP)\ ,\ (ABQ)] = \frac{(ABP)}{(ABQ)} \quad ,$$

avec les propriétés (O_i) suivantes :

(O_1) $\dfrac{(ABC)}{(ABC)} = e$,

(O_2) $\dfrac{(ABP)}{(ABQ)} = \dfrac{(ABP)}{(ABR)}\,\dfrac{(ABR)}{(ABQ)}$,

(O_3) $\dfrac{(OAC)}{(OAB)}\,\dfrac{(OBA)}{(OBC)}\,\dfrac{(OCB)}{(OCA)} = \varepsilon$,

(O_4) $\dfrac{(OAB)}{(OAC)} = \dfrac{(AOB)}{(AOC)}$.

D'après le théorème 5, posons par définition :

Si AB a pour équation $y = T(u\,,\,x\,,\,v)$:

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = f[y_P - T(u\,,\,x_P\,,\,v)]\ f[y_Q - T(u\,,\,x_Q\,,\,v)]^{-1} \quad .$$

Si AB a pour équation $x = c$:

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = f(x_P - c)\ f(x_Q - c)^{-1} \quad .$$

Seule la propriété (O_3) ne résulte pas immédiatement de la définition. Démontrons tout d'abord :

(F_5) $\forall\, a \in K\,,\ \forall\, b \in K\,,\ a \neq b\,,\ f(b-a) = f(-1)\ f(a-b)$.

On définit pour cela $c \neq o$ par $a = c + b$, et on remarque :

$$T(o\,,\,b\,,\,b-a) = b - a = T(1\,,\,b\,,\,-a) \quad ,$$

ce qui permet d'obtenir avec (F_4) :

$$f(b-a) = f[T(o\,,\,a\,,\,b-a) - T(1\,,\,a\,,\,-a)] = f(o-1)\ f(c) = f(-1)\ f(c) \quad ;$$

de même, on a :

$$T(o , b , o) = o = T(1 , b , - b) ,$$

qui donne avec (F_4) :

$$f(c) = f(1c) = f(1 - o)\ f(c) = f[T(1 , a , - b) - T(o , a , o)] = f(a - b) .$$

Il en résulte (F_5) de façon évidente. De plus, f étant un homomorphisme, on a $f(1) = e$. On obtient alors, avec $a = o$ et $b = 1$:

(F_6) $f(- 1)^2 = e$.

Nous pouvons maintenant calculer

$$z = \frac{(OAC)}{(OAB)} \frac{(OBA)}{(OBC)} \frac{(OCB)}{(OCA)} .$$

Premier cas. - Aucune des droites OA , OB , OC n'est parallèle à OV .

Soient :

$y = T(a , x , a')$ l'équation de OA ,

$y = T(b , x , b')$ celle de OB ,

$y = T(c , x , c')$ celle de OC .

Désignons par x_O , x_A , x_B , x_C les abscisses respectives de O , A , B , C . On a donc :

$$y_A = T(a , x_A , a') , \quad y_B = T(b , x_B , b') , \quad y_C = T(c , x_C , c') ,$$

et aussi

$$y_O = T(a , x_O , a') = T(b , x_O , b') = T(c , x_O , c') .$$

En appliquant la définition choisie, et en adoptant dans G l'écriture : $rs^{-1} = s^{-1} r = \frac{r}{s}$ (possible, car G est commutatif), on obtient :

$$z = \frac{f[y_C - T(a , x_C , a')]\ f[y_A - T(b , x_A , b')]\ f[y_B - T(c , x_B , c')]}{f[y_B - T(a , x_B , b')]\ f[y_C - T(b , x_C , b')]\ f[y_A - T(c , x_A , c')]} .$$

En appliquant (F_4), on trouve par exemple :

$$f[y_C - T(a , x_C , a')] = f[T(c , x_C , c') - T(a , x_C , a')] = f(c - a)\ f(c'') ,$$

où c'' est défini par $c'' + x_O = x_C$ et est, par conséquent, différent de o , puisque OC n'est pas parallèle à OV . On a bien $c \neq a$, puisque (OAC) est un triangle, et de plus $T(c , x_O , c') = T(a , x_O , a')$ figure dans les hypothèses. Il vient alors :

$$z = \frac{f(c - a)\ f(a - b)\ f(b - c)\ f(c'')\ f(a'')\ f(b'')}{f(b - a)\ f(c - b)\ f(a - c)\ f(b'')\ f(c'')\ f(a'')} ,$$

soit avec (F_5) et (F_6) : $z = f(-1)$.

Deuxième cas. - Une des droites OA , OB , OC est parallèle à OV .

Remarquons qu'alors une seule d'entre elles l'est, sinon l'un des triangles (OAB) , (OBC) , (OCA) n'existerait pas. On peut toujours supposer que c'est OA qui est parallèle à OV . Avec les notations précédentes, il en résulte $c'' \neq o$, $b'' \neq o$. Un calcul analogue au précédent donne :

$$z = \frac{f(x_C - x_0)\ f[y_A - T(b , x_A , b')]\ f[y_B - T(c , x_B , c')]}{f(x_B - x_0)\ f[y_C - T(b , x_C , b')]\ f[y_A - T(c , x_A , c')]}$$

$$= \frac{f[(c'' + x_0) - x_0]\ f[(b - c)b'']}{f[(b'' + x_0) - x_0]\ f[(c - b)c'']} ,$$

car on a $y_A - T(b , x_A , b') = y_A - y_0 = y_A - T(c , x_A , c')$.

Appliquons (F_4) au calcul de $f[(c'' + x_0) - x_0]$. Prenons pour cela :

$$T(a_2 , b_o , c_2) = T(1 , o , x_0) = x_0 = T(o , o , x_0) = T(a_1 , b_o , c_1) ,$$

on a bien $a_2 \neq a_1$, on prend de plus $b = c'' \neq o$ (en effet, OC n'est pas parallèle à OV). Il vient :

$$f[T(1 , c'' , x_0) - T(o , c'' , x_0)] = f(1 - o)\ f(c'') ,$$

donc $f[(c'' + x_0) - x_0] = f(c'')$.

On procède de même avec b'' qui n'est pas nul non plus pour une raison analogue. Grâce à (F_5), on trouve alors $z = f(-1)$. Donc, dans tous les cas, on a :

$$\frac{(OAC)}{(OAB)}\frac{(OBA)}{(OBC)}\frac{(OCB)}{(OCA)} = f(-1) \qquad \text{avec} \quad f(-1)^2 = e .$$

(O_3) est donc vérifié avec la valeur $\varepsilon = f(-1)$.

On a obtenu ainsi une mesure $\mathfrak{M}$. Satisfait-elle à (L) et (P) ?

La validité de (L) est évidente puisque la définition de $\mathfrak{M}[(ABP) , (ABQ)]$ ne dépend que de la droite AB et non des points A et B . Il est aisé de vérifier la validité de (P) (cf. [1], p. 358).

Si AB a pour équation $y = T(u , x , v)$, et si P et Q sont deux points de la droite d'équation $y = T(u , x , v')$, $v' \neq v$, d'abscisses respectives p et q , on a :

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = \frac{f[T(u\,,\,p\,,\,v') - T(u\,,\,p\,,\,v)]}{f[T(u\,,\,q\,,\,v') - T(u\,,\,q\,,\,v)]} = \frac{f(v' - v)}{f(v' - v)} = e \qquad \text{d'après } (F_3) \quad .$$

Si AB a pour équation $x = c$, et si P et Q sont deux points de la droite d'équation $x = p \neq c$, on a :

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = \frac{f(p - c)}{f(p - c)} = e \quad .$$

Remarquons que (F_3) et (F_4) permettent d'obtenir $\mathfrak{M}$ vérifiant (L) et (P), mais que (F_4) seul permet d'obtenir $\mathfrak{M}$ vérifiant (L).

D'où le résultat fondamental, qui donne la caractérisation algébrique cherchée.

THÉORÈME 6.

M <u>désignant l'ensemble des mesures des triangles du plan vérifiant</u> (L) <u>et</u> (P), <u>et à valeurs sur</u> G ,

F <u>désignant l'ensemble des homomorphismes de la boucle</u> K^* <u>(d'un corps ternaire quelconque</u> K <u>coordonnant le plan) sur le groupe commutatif</u> G , <u>vérifiant</u> (F_3) <u>et</u> (F_4),

<u>l'application</u> $p : M \longrightarrow F$, <u>définie par</u> $f = p(\mathfrak{M})$ <u>avec</u> $\forall\, x \in K^*$,

$$f(x) = \mathfrak{M}[(OU\langle x\rangle)\ ,\ (OUV)] \quad ,$$

<u>où</u> O , U , V <u>sont les points de coordonnées</u> (o , o) , (1 , o) <u>et</u> (o , 1) <u>dans</u> K , <u>est une bijection</u>.

<u>L'application</u> $p^{-1} : F \longrightarrow M$ <u>est définie par</u> $p^{-1}(f)[(ABP)\ ,\ (ABQ)]$, <u>qui vaut</u>

$$f[y_P - T(u\,,\,x_P\,,\,v)]\ f[y_Q - T(u\,,\,x_Q\,,\,v)]^{-1} \quad ,$$

<u>si l'équation de</u> AB <u>est</u> $y = T(u\,,\,x\,,\,v)$,

$$f(x_P - c)\ f(x_Q - c)^{-1} \quad ,$$

<u>si l'équation de</u> AB <u>est</u> $x = c$.

<u>L'élément</u> $\varepsilon \in G$, <u>associé à la mesure</u> $p^{-1}(f)$, <u>vaut</u> $f(-1)$.

En effet, l'existence des deux applications de M dans F et de F dans M est établie dans la démonstration précédente, et on vérifie à l'aide des formules du théorème 5 qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

En fait, nous avons utilisé comme intermédiaire une mesure des vecteurs $\mathfrak{M}^*$, et si on désigne par M^* l'ensemble de ces mesures vérifiant (M_i^*), $i = 1\,,2\,,3\,,4\,,5$, avec la propriété suivante :

(M_5^*) $OA \neq OB$, $B' \in OB$, $B' \neq 0$, $A' \in OA$, $A' \neq 0$, $AB // A'B' \Longrightarrow \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$,

le théorème 1 permet de définir une application $r : M \longrightarrow M^*$. On démontre (cf. [4]), en définissant une application $s : M^* \longrightarrow M$ par $s(\mathfrak{M}^*) = f$, avec $\forall\ x \in K^*$,

$$f(x) = \mathfrak{M}^*(O\langle x\rangle\ ,\ OV)\ :$$

THÉORÈME 7. – Chacune des applications p, r, s est une bijection, et on a $p = s \circ r$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "r"'] & & F \\ & M^* \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

5. Exemples de plans munis de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{M}^*$.

Pour un plan arguésien, qui est un cas particulier de plan de Moufang, K est un corps, et on trouve dans [3] le résultat suivant :

Pour tout plan coordonné par un corps, il existe une mesure des triangles vérifiant (L) et (P), et prenant ses valeurs dans le groupe quotient K^*/C, où C est le sous-groupe commutateur de K^*.

On retrouve évidemment ainsi avec $K = R$ les mesures usuelles des triangles et des vecteurs du plan. Remarquons cependant qu'en prenant pour groupe G le sous-groupe multiplicatif des réels positifs et $\varepsilon = 1$, on trouve la mesure des segments à supports parallèles.

Pour des exemples plus généraux, citons les résultats que nous avons obtenus dans [4]. Rappelons qu'un corps ternaire K est un groupe cartésien (cf. [5], p. 90) lorsqu'on a : $T(a\ ,\ x\ ,\ b) = ax + b$, et que l'addition est une loi de groupe. Il est dit commutatif lorsque ce groupe l'est.

THÉORÈME 8. – On peut plonger tout groupe cartésien commutatif K dans un groupe cartésien commutatif S_K, tel que le plan coordonné par S_K soit muni d'une mesure des triangles à valeurs sur Z, groupe additif des entiers, vérifiant (L) et (P).

Pour des choix convenables de K, on obtient avec les S_K :

THÉORÈME 9. – Il existe des quasi-corps distributifs, des quasi-corps avec une seule distributivité à droite ou à gauche, des groupes cartésiens commutatifs sans aucune distributivité coordonnant des plans munis d'une mesure des triangles à valeurs sur Z, vérifiant (L) et (P).

THÉORÈME 10. - Il existe, pour tout corps commutatif ayant plus de deux éléments, un plan coordonné par un quasi-corps distributif non associatif muni d'une mesure des triangles à valeur sur K^* et vérifiant (L) et (P).

Pour conclure, indiquons les formes simplifiées que prennent (F_3) et (F_4) dans les cas particuliers suivants :

Si K est un groupe cartésien commutatif, (F_3) est vérifié et (F_4) s'écrit :

$$f[a_1(b + b_\alpha) + c_1 - c_2 - a_2(b + b_\alpha)] = f(a_1 - a_2)\ f(b) \quad .$$

Si K est un quasi-corps à droite, (F_4) s'écrit :

$$f(a_1\ b - a_2\ b) = f(a_1 - a_2)\ f(b) \quad .$$

Si K est un quasi-corps distributif, (F_3) et (F_4) sont vérifiées pour tout f.

Ce dernier cas contient celui des quasi-corps alternatifs traîté dans [3], et comme (F_3) et (F_4) sont les conditions données dans [1] (p. 357), notre théorème 6 donne bien la synthèse évoquée dans l'introduction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GLOCK (E.). - Die Orientierungsfunktionen eines affinen Raumes, Math. Z., t. 78, 1962, p. 319-360.

[2] LESIEUR (L.). - Théorie algébrique de l'orientation et de la mesure des simplexes, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 37, 1958, p. 245-264.

[3] LESIEUR (L.). - Sur la mesure des triangles en géométrie affine plane, Math. Z., t. 93, 1966, p. 334-344.

[4] PETIT (J.-C.). - Mesure des triangles et mesure des vecteurs à supports parallèles dans une géométrie plane affine, Math. Z., t. 94, 1966, p. 271-306.

[5] PICKERT (G.). - Projektive Ebenen. - Berlin, Springer-Verlag, 1955 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 80).