Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Paul Jaffard

Sur le calcul des limites projectives

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, nº 2 (1965-1966), exp. nº 21, p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_2_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
19e année, 1965/66, n° 21

9 mai 1966

SUR LE CALCUL DES LIMITES PROJECTIVES

par Paul JAFFARD

1. Rappels.

u étant une flèche d'une certaine catégorie, nous désignerons par $\sigma(u)$ sa source et par $\beta(u)$ son but.

Limites projectives. - Soit un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ dont la source I est une petite catégorie (c'est-à-dire que la collection $\mathrm{Ob}\, I$ de ses objets est un ensemble), qui sera dite catégorie des indices. On appelle F-système projectif la donnée d'un objet L de $\mathcal{C}$, et, pour tout objet i de I, la donnée d'une flèche de $\mathcal{C}$ de la forme

$$\lambda_i : L \to F_i$$

de telle sorte que, pour toute flèche $u : i \to j$ de I, on ait l'égalité

$$\lambda_j = F_u \lambda_i \quad .$$

Les F-systèmes projectifs forment de façon évidente une catégorie, une flèche φ du F-système $(\lambda'_i : L' \to F_i)_{i\in \mathrm{Ob} I}$ dans le F-système $(\lambda_i : L \to F_i)_{i\in \mathrm{Ob} I}$ étant la donnée d'une flèche encore notée φ :

$$\varphi : L' \to L$$

telle que

$$\lambda'_i = \lambda_i \varphi \qquad (\forall\ i \in \mathrm{Ob}\, I) \quad .$$

La catégorie des F-systèmes projectifs peut d'ailleurs s'interpréter comme une catégorie de foncteurs.

Ceci posé, on appellera limite projective du foncteur F, et on désignera par $\varprojlim F$ un objet final (s'il existe) de la catégorie des F-systèmes projectifs.

Si cette limite projective existe pour tout foncteur F de but $\mathcal{C}$, ayant pour source une petite catégorie (resp. une catégorie finie), on dira que la catégorie $\mathcal{C}$ admet des limites projectives (resp. des limites projectives finies).

Limites projectives particulières.

(a) Produits directs. - C'est le cas où I est une catégorie discrète. La donnée du foncteur F revient à celle d'une application

$$i \longmapsto a_i$$

de $\mathrm{Ob}\ I$ dans $\mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$.

La limite projective de F , dite alors produit direct des objets a_i , est notée $\prod_{i\in I} a_i$.

(b) Noyau d'un ensemble de flèches. - Soient a et b deux objets de $\mathcal{C}$, et $U \subset \mathrm{Hom}(a\ ,\ b)$. On appellera noyau de U , et on désignera par $\mathrm{Ker}\ U$ la donnée d'une flèche de but a :

$$\mathrm{Ker}\ U = k : K \longrightarrow a$$

ayant les propriétés suivantes :

1° La flèche uk est la même pour tout $u \in U$;

2° Si $k' : K' \longrightarrow a$ est une flèche telle que uk' soit la même pour tout $u \in U$, il existe une flèche unique $\varphi : K' \longrightarrow K$ telle que $k' = k\varphi$ (nous laissons au lecteur le soin de construire la catégorie I et le foncteur F qui permettent de considérer $\mathrm{Ker}\ U$ comme étant $\varprojlim F$).

(c) Produit fibré d'un ensemble de flèches. - Soit un ensemble

$$(u_i : a_i \longrightarrow b)_{i\in I}$$

de flèches de $\mathcal{C}$ ayant toutes le même but b .

On appelle produit fibré de cet ensemble de flèches, et on désigne par $\bigwedge_{i\in I} u_i$ la donnée d'un ensemble de flèches de la forme

$$(\lambda_i : L \longrightarrow a_i)_{i\in I}$$

ayant les propriétés suivantes :

1° La flèche $u_i\,\lambda_i$ est la même pour tout $i \in I$;

2° Si $(\lambda'_i : L' \longrightarrow a_i)_{i\in I}$ est un ensemble de flèches tel que la flèche $u_i\,\lambda'_i$ soit la même pour tout $i \in I$, il existe une flèche unique $\varphi : L' \longrightarrow L$ telle que

$$\lambda'_i = \lambda_i\,\varphi \qquad (\forall\ i \in I) \quad .$$

Nous laissons au lecteur le soin d'interpréter ce produit fibré comme une limite projective.

Un théorème fondamental. - Reprenons l'exemple du produit fibré précédent. Considérons le produit direct

$$\prod_{i\in I} a_i = (p_i : P \to a_i)_{i\in I} ,$$

et le noyau

$$\mathrm{Ker}(u_i\, p_i)_{i\in I} = k : K \to P .$$

Il est facile de voir que les flèches $(p_i\, k : K \to a_i)_{i\in I}$ forment un produit fibré $\bigwedge_{i\in I} u_i$ des flèches u_i .

On voit donc que si, dans la catégorie $\mathcal{C}$, les produits directs et les noyaux existent, il en sera de même des produits fibrés. Plus généralement, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Pour que la catégorie $\mathcal{C}$ admette des limites projectives (resp. finies), il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies :

1° Dans $\mathcal{C}$, le noyau d'un couple de flèches existe toujours.

2° Dans $\mathcal{C}$, les produits directs (resp. finis) existent toujours.

Pseudo-cofinalité. - Soit J une sous-catégorie pleine de I ayant les propriétés suivantes : Pour tout objet i de I , l'ensemble $U(i)$ des flèches de I , ayant pour but i et pour source un objet de J , n'est pas vide et possède un élément $\hat{\imath}$ tel que, pour tout élément u de $U(i)$, il existe $w \in \mathrm{Fl}\, J$ avec $u = \hat{\imath} w$. On dira dans ce cas que J est une sous-catégorie pseudo-cofinale (à gauche) de I .

Nous aurons alors besoin du lemme suivant.

LEMME 1. - Soient J une sous-catégorie pseudo-cofinale de I , et un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ dont la restriction $F|J$ à J admet une limite projective. Alors F admet aussi une limite projective.

Supposons que $(\lambda_j : L \to F_j)_{j\in \mathrm{Ob} J}$ soit la limite projective du foncteur $F|J$. La limite projective de F sera

$$(\lambda_i' : L \to F_i)_{i\in \mathrm{Ob} I} ,$$

avec

$$\lambda_i' = \lambda_i \qquad \text{si } i \in \mathrm{Ob}\, J ,$$

$$\lambda_i' = F_{\hat{\imath}}\, \lambda_j \qquad \text{si } i \notin \mathrm{Ob}\, J \text{ et } \hat{\imath} : j \to i .$$

2. Problèmes étudiés dans cet exposé.

La démonstration du théorème 1 n'est pas constructive et ne donne aucun moyen de déterminer la limite projective d'un foncteur F en utilisant des produits directs et des noyaux. Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'indiquer diverses méthodes qui permettent de le faire, et ceci de plusieurs façons possibles. Pour éviter des descriptions fastidieuses, nous serons souvent conduits à remplacer la définition de la catégorie I et du foncteur F par la donnée d'un diagramme qui les définira sans ambiguïté. Donnons d'abord quelques exemples élémentaires d'applications de ces méthodes :

EXEMPLE 1 : Construction d'un produit fibré au moyen d'un produit direct et d'un noyau. Cet exemple a déjà été indiqué plus haut.

EXEMPLE 2 : Associativité du produit direct. Soient une famille d'objets $(a_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{C}$ indexée par l'ensemble I, et une partition $I = \sum\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$ de I. On a la formule d'associativité :

$$\prod_{i\in I} a_i = \prod_{\alpha\in A} \Big(\prod_{i\in I_\alpha} a_i \Big) \; .$$

Plus précisément, si les flèches $(p_i : P_\alpha \to a_i)_{i\in I_\alpha}$ font de P_α le produit direct $\prod\limits_{i\in I_\alpha} a_i$, et si les flèches $(\pi_\alpha : P \to P_\alpha)_{\alpha\in A}$ font de P le produit direct $\prod\limits_{\alpha\in A} P_\alpha$, les flèches $(p_i\, \pi_\alpha : P \to a_i)_{\left\{\substack{i\in I_\alpha \\ \alpha\in A}\right\}}$ font de P le produit direct $\prod\limits_{i\in I} a_i$.

EXEMPLE 3 : L'associativité précédente peut se généraliser. Soient a_1, a_2 et a_3 trois objets de $\mathcal{C}$, $(p_i : b \to a_i)_{i=1,2}$ le produit direct $a_1 \times a_2$, et $(q_i : c \to a_i)_{i=2,3}$ le produit direct $a_2 \times a_3$. Alors le produit direct $a_1 \times a_2 \times a_3$ "peut s'identifier" au produit fibré $p_2 \wedge q_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & & d \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & b \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & & c \arrow[dl, "q_2"'] \arrow[dr, "q_3"] & \\
a_1 & & a_2 & & a_3
\end{tikzcd}$$

fig. 1 .

EXEMPLE 4 : Soient quatre flèches f , g , u , v de la catégorie $\mathcal{C}$ telles que

$$\beta(u) = \beta(f) \ , \qquad \sigma(u) = \beta(v) \qquad \text{et} \qquad \sigma(f) = \beta(g) \ .$$

La limite projective du foncteur F défini par le diagramme

$$\begin{tikzcd} & & \cdot \arrow[d, "g"] \\ & & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[r, "v"'] & \cdot \arrow[r, "u"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

fig. 2

peut se construire de plusieurs manières. D'abord, on "peut l'identifier" au produit fibré $fg \wedge uv$. Ensuite, on peut prendre successivement les produits fibrés :

$$(u' \ , \ f') = f \wedge u \ ,$$

$$(v' \ , \ f'') = f' \wedge v \ ,$$

$$(u'' \ , \ g') = g \wedge u' \ ,$$

$$(v'' \ , \ g'') = g' \wedge v' \ .$$

Les diverses flèches issues de $\sigma v''$ font de $\sigma v''$ la limite projective du foncteur F , et en particulier :

$$(u''v'' \ , \ f''g'') = fg \wedge uv \ .$$

$$\begin{tikzcd} F_\omega \arrow[r, "v''"] \arrow[d, "g''"] & F_k \arrow[r, "u''"] \arrow[d, "g'"] & F_d \arrow[d, "g"] \\ F_j \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "f''"] & F_i \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "f'"] & F_e \arrow[d, "f"] \\ F_a \arrow[r, "v"] & F_b \arrow[r, "u"] & F_c \end{tikzcd}$$

fig. 3 .

EXEMPLE 5 : Soit à prendre la limite projective du foncteur F défini par le diagramme

$$\begin{tikzcd} F_a \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "w"'] & F_b \arrow[r, bend left, "s"] \arrow[r, bend right, "t"'] & F_c \end{tikzcd}$$

fig. 4 .

On peut considérer successivement :

$$k = \mathrm{Ker}(s\ ,\ t)\quad ,$$

$$k' = \mathrm{Ker}(v\ ,\ w)\quad ,$$

$$(\lambda\ ,\ \mu) = vk' \wedge k\quad .$$

Les "flèches convenables" issues de $\sigma\lambda$ font de $\sigma\lambda$ la limite projective cherchée.

On peut considérer également :

$$k'' = \mathrm{Ker}(sv\ ,\ sw\ ,\ tv\ ,\ tw)\quad ,$$

$$(\alpha\ ,\ \beta) = k' \wedge k''\quad .$$

Les "flèches convenables" issues de $\sigma\alpha$ font encore de $\sigma\alpha$ la limite projective cherchée.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[rr, "\mu"'] \arrow[d, "\lambda"'] & & {} \arrow[d, "k"] & \\
{} \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "\alpha"'] & F_a \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "w"'] & F_b \arrow[r, bend left, "s"] \arrow[r, bend right, "t"'] & F_c \\
{} \arrow[r, "\beta"] & {} \arrow[u, "k''"'] & &
\end{tikzcd}$$

fig. 5 .

La vérification des affirmations contenues dans les exemples précédents se fait sans peine. Cependant, des diagrammes plus compliqués conduiraient vite à des vérifications fastidieuses. D'où l'utilité de dégager des règles suffisamment générales pour se passer de ces vérifications et pour pouvoir énoncer les résultats sans avoir à les "deviner".

Les règles que nous indiquons ici sont déduites de deux idées générales :

La première consiste à augmenter peu à peu la catégorie I et le foncteur F jusqu'à ce que l'on obtienne une catégorie d'indices suffisamment simple. Cette idée est développée dans le § 3.

La deuxième consiste à ramener la construction d'une limite projective à celle de ce que nous appelons un produit fibré généralisé, et à donner les moyens qui permettent de construire ce produit fibré généralisé à l'aide de produits directs et de noyaux. A partir de là, on obtient en particulier une démonstration constructive du fait que, si la catégorie $\mathcal{C}$ admet des produits directs finis et des noyaux pour tout couple de flèches, elle admet des limites projectives finies.

3. Extensions de type T .

Soient une petite catégorie J , une sous-catégorie I de J , et un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$. Une extension de F à J sera par définition un foncteur $G : J \to \mathcal{C}$ tel que la restriction $G|I$ soit égale à F .

Etant données deux telles extensions G et G' , un I-morphisme de G' dans G sera, par définition, un morphisme fonctoriel

$$\varphi : G' \to G$$

tel que

$$\varphi_i = 1_{F_i} \qquad (\forall\ i \in \mathrm{Ob}\ I) \ .$$

On en déduit sans peine la catégorie $\mathcal{E}$ des extensions de F à J . Un objet final de la catégorie $\mathcal{E}$ (s'il existe) sera dit une extension cartésienne du foncteur F à la catégorie J .

EXEMPLE : Supposons que la catégorie J soit la catégorie obtenue en ajoutant à I un objet initial ω (voir plus loin une définition précise). Pour définir une extension G de F , il suffit de se donner les flèches $G(\omega \to i) = \lambda_i$ et, pour que G soit une extension cartésienne de F , on voit immédiatement qu'il faut et qu'il suffit que les flèches λ_i fassent de $G(\omega)$ une limite projective du foncteur F .

Une extension J de la catégorie I (c'est-à-dire une catégorie J dont I est une sous-catégorie) sera dite une A-extension si elle vérifie la condition suivante :

Toute flèche de J , ayant pour source un objet de I , est une flèche de I .

Ceci posé, on a le lemme suivant.

LEMME 2. - *Soient* :

- *Une* A-*extension* J *de la catégorie* I ;
- *Deux foncteurs* F *et* F' *de* I *dans une catégorie* $\mathcal{C}$ *et un morphisme fonctoriel* φ *de* F' *dans* F ;
- *Une extension cartésienne* G *de* F *à la catégorie* J , *et une extension (quelconque)* G' *de* F' *à cette même catégorie.*

Dans ces conditions, il existe un morphisme fonctoriel, et un seul, $\overline{\varphi}$ *de* G' *dans* G *qui prolonge* φ , *c'est-à-dire tel que*

$$\overline{\varphi}_i = \varphi_i \qquad (\forall\ i \in \mathrm{Ob}\ I) \ .$$

Supposons réalisées les conditions du lemme. Nous allons d'abord définir un foncteur H de J dans $\mathcal{C}$ de la façon suivante :

Soit $u \in Fl\, J$. On a à considérer trois cas :

<u>1er cas</u> : $u \in Fl\, I$. - On posera $H(u) = F(u)$. Le foncteur H sera donc une extension de F à J .

Si $u \notin Fl\, I$, l'hypothèse suivant laquelle J est une A-extension de I entraîne $\sigma u \notin Ob\, I$. Il reste donc deux cas à examiner.

<u>2e cas</u> : $\beta u \notin Ob\, I$. - On posera alors $H(u) = G'(u)$. En particulier si j est un objet de J , qui n'appartient pas à I , on voit (en prenant $u = 1_j$) que l'on aura $H(j) = G'(j)$.

<u>3e cas</u> : $j = \sigma u \notin Ob\, I$ et $i = \beta u \in Ob\, I$. - On posera alors $H(u) = \varphi_i\, G'(u)$.

$$\begin{tikzcd}
H_j = G'_j \arrow[rr, "G'_u"] \arrow[d, dashed, "\psi_j"] \arrow[drr, "H_u"] & & F'_i = G'_i \arrow[d, "\varphi_i"] \\
G_j \arrow[rr, "G_u"] & & F_i = G_i = H_i
\end{tikzcd}$$

fig. 6 .

Vérifions que l'on définit bien ainsi un foncteur, c'est-à-dire que toutes les fois que l'on a deux flèches $u : k \rightarrow m$ et $v : m \rightarrow n$ de J , on a bien l'égalité

$$H(vu) = H(v)\, H(u) \quad .$$

On a à considérer divers cas possibles suivant l'appartenance ou non des différents objets k , m , n à la catégorie I .

<u>1er cas</u> : $k \in Ob\, I$. - Comme J est une A-extension, on aura $u \in Fl\, I$ et, par suite, $v \in Fl\, I$. Alors :

$$H(vu) = F(vu) = F(v)\, F(u) = H(v)\, H(u) \quad .$$

<u>2e cas</u> : $k \notin Ob\, I$, $m \in Ob\, I$. - On a encore $v \in Fl\, I$. Alors :

$$\begin{aligned} H(vu) = \varphi_n\, G'(vu) = \varphi_n\, G'(v)\, G'(u) = \varphi_n\, F'(v)\, G'(u) &= F(v)\, \varphi_m\, G'(u) \\ &= F(v)\, H(u) = H(v)\, H(u) \quad . \end{aligned}$$

<u>3e cas</u> : k , $m \notin Ob\, I$, $n \in Ob\, I$. - On a :

$$H(vu) = \varphi_n\, G'(vu) = \varphi_n\, G'(v)\, G'(u) = H(v)\, G'(u) = H(v)\, H(u) \quad .$$

<u>4e cas</u> : $k, m, n \notin \text{Ob}\, I$.

$$H(vu) = G'(vu) = G'(v)\ G'(u) = H(v)\ H(u) \quad .$$

H est donc bien un foncteur qui prolonge le foncteur F à la catégorie J . Comme G est une extension cartésienne de F , il existe un I-morphisme fonctoriel unique ψ de H dans G .

Montrons que l'on peut définir un morphisme fonctoriel

$$\overline{\varphi} : G' \to G$$

en posant

$$\overline{\varphi}_i = \varphi_i \qquad \text{si} \quad i \in \text{Ob}\, I \quad ,$$

$$\overline{\varphi}_j = \psi_j \qquad \text{si} \quad j \notin \text{Ob}\, J \quad .$$

Il nous faut montrer que, pour toute flèche $u : k \to m$, on a l'égalité

$$\overline{\varphi}_m\ G'(u) = G(u)\ \overline{\varphi}_k \quad .$$

<u>1er cas</u> : $k \in \text{Ob}\, I$. - Alors $u \in \text{Fl}\, I$, et

$$\overline{\varphi}_m\ G'(u) = \varphi_m\ G'(u) = \varphi_m\ F'(u) = F(u)\ \varphi_k = G(u)\ \overline{\varphi}_k \quad .$$

<u>2e cas</u> : $k \notin \text{Ob}\, I$ et $m \in \text{Ob}\, I$. - On a :

$$\overline{\varphi}_m\ G'(u) = \varphi_m\ G'(u) = H(u) = \psi_m\ H(u) = G(u)\ \psi_k = G(u)\ \overline{\varphi}_k \quad .$$

<u>3e cas</u> : $k, m \notin \text{Ob}\, I$. - On a :

$$\overline{\varphi}_m\ G'(u) = \psi_m\ H(u) = G(u)\ \psi_k = G(u)\ \overline{\varphi}_k \quad .$$

Il nous reste maintenant à démontrer que $\overline{\varphi}$ est le seul morphisme fonctoriel de G' dans G qui prolonge φ . Soit donc un morphisme fonctoriel

$$\varphi' : G' \to G$$

tel que

$$\varphi'_i = \varphi_i \qquad (\forall\ i \in \text{Ob}\, I) \quad .$$

Il faut donc montrer que $\varphi' = \overline{\varphi}$.

Pour cela, montrons que l'on peut définir un morphisme fonctoriel $\psi' : H \to G$ en posant :

$$\psi'_i = 1_{F_i} \qquad \text{si} \quad i \in \mathrm{Ob}\, I \ ,$$

$$\psi'_j = \varphi'_j \qquad \text{si} \quad j \notin \mathrm{Ob}\, I \ .$$

Il nous faut montrer que, pour toute flèche $u : k \to m$ de J , on a l'égalité

$$\psi'_m\, H(u) = G(u)\, \psi'_k \ .$$

<u>1er cas</u> : $k \in \mathrm{Ob}\, I$. - Alors $u \in \mathrm{Fl}\, I$ et

$$\psi'_m\, H(u) = 1_{F_m}\, H(u) = H(u) = F(u) = G(u) = G(u)\, 1_{F_k} = G(u)\, \psi'_k \ .$$

<u>2e cas</u> : $k \notin \mathrm{Ob}\, I$ et $m \in \mathrm{Ob}\, I$.

$$\psi'_m\, H(u) = 1_{F_m}\, H(u) = H(u) = \varphi_m\, G'(u) = \varphi'_m\, G'(u) = G(u)\, \varphi'_k = G(u)\, \psi'_k \ .$$

<u>3e cas</u> : $k , m \notin \mathrm{Ob}\, I$.

$$\psi'_m\, H(u) = \varphi'_m\, G'(u) = G(u)\, \varphi'_k = G(u)\, \psi'_k \ .$$

Donc ψ' est bien un I-morphisme fonctoriel de H dans G et, comme G est une extension cartésienne de F , on a $\psi' = \psi$, et par suite

$$\varphi'_j = \psi_j = \overline{\varphi}_j \qquad (\forall\ j \notin \mathrm{Ob}\, I) \ ,$$

donc $\varphi' = \overline{\varphi}$, ce qui achève de montrer le lemme 2.

THÉORÈME 2 (Sur les extensions cartésiennes successives). - <u>Soient une petite catégorie</u> K , <u>une sous-catégorie</u> J <u>de</u> K , <u>et une sous-catégorie</u> I <u>de</u> J . <u>Soient d'autre part des foncteurs</u> :

$$F : I \to \mathcal{C} \ ,$$

$$G : J \to \mathcal{C} \ ,$$

$$H : K \to \mathcal{C} \ .$$

1° <u>Supposons que</u> K <u>soit une</u> A-<u>extension de</u> J . <u>Alors, si</u> G <u>est une extension cartésienne de</u> F <u>et</u> H <u>une extension cartésienne de</u> G , <u>le foncteur</u> H <u>est aussi une extension cartésienne de</u> F .

2° <u>Si</u> G <u>et</u> H <u>sont des extensions cartésiennes de</u> F , <u>le foncteur</u> H <u>est une extension cartésienne de</u> G .

Démonstration du 1°. - Soit une extension H' de F à K. Comme G est une extension cartésienne de F, il existe un I-morphisme fonctoriel unique φ de $G' = H'|J$ dans G. Le lemme 2 montre qu'il existe un morphisme fonctoriel $\psi : H' \to H$ qui est le seul à prolonger φ. Donc ψ est un I-morphisme fonctoriel de H' dans H.

Soit $\bar{\psi} : H' \to H$ un I-morphisme fonctoriel. Il induit un I-morphisme fonctoriel $\bar{\varphi} : G' \to G$. Donc $\bar{\varphi} = \varphi$ et $\bar{\psi}$ prolonge φ. Donc $\bar{\psi} = \psi$, ce qui achève de montrer que H est une extension cartésienne de F.

Démonstration du 2°. - Soit une extension H' de G à K. Comme H' est une extension de F à K, il existe un I-morphisme fonctoriel unique $\psi : H' \to H$.

La restriction φ de ψ à J est un I-morphisme fonctoriel de G dans lui-même. Comme G est une extension cartésienne de F, on a $\varphi = 1_G$, ce qui entraîne que ψ est un J-morphisme fonctoriel.

Réciproquement, donnons-nous un J-morphisme fonctoriel $\psi' : H' \to H$. C'est un I-morphisme fonctoriel, donc $\psi' = \psi$, ce qui achève de montrer que H est une extension cartésienne de G.

Nous allons maintenant définir la notion d'extension de type T. Pour cela, on se donne :

- Une petite catégorie I,
- Un ensemble partiellement ordonné Ω,
- Une application $\omega \longmapsto I^{\omega}$ qui à tout élément ω de Ω fait correspondre un sous-ensemble I^{ω} de $\mathrm{Ob}\, I$ de telle sorte que les deux conditions suivantes soient réalisées :

(T_1) $i \in I^{\omega}$ et $\mathrm{Hom}(i , j) \neq \emptyset \implies j \in I^{\omega}$,
(T_2) $\omega' \leqslant \omega \implies I^{\omega} \subset I^{\omega'}$.

On peut alors définir une nouvelle petite catégorie J, notée

$$(I , \Omega ; (I^{\omega})_{\omega\in\Omega}) ,$$

laquelle sera une A-extension de I. On procède pour cela de la façon suivante :

$\mathrm{Ob}\, J$ sera la somme des ensembles $\mathrm{Ob}\, I$ et Ω (on identifiera pour simplifier $\mathrm{Ob}\, I$ et Ω aux sous-ensembles correspondants de $\mathrm{Ob}\, J$). $\mathrm{Fl}\, J$ sera la somme

$$\mathrm{Fl}\, I \oplus \mathrm{Fl}\, \Omega \oplus \left(\bigoplus_{\omega\in\Omega} I^{\omega} \right)$$

(on identifiera encore $\mathrm{Fl}\ I$ et $\mathrm{Fl}\ \Omega$ aux sous-ensembles correspondants de $\mathrm{Fl}\ J$).

Bien-entendu, on assimile ici l'ensemble partiellement ordonné Ω à la catégorie correspondante. Si $\omega' \leqslant \omega$, on notera $t_{\omega\omega'}$ la flèche $\omega' \to \omega$, unique élément de $\mathrm{Hom}(\omega', \omega)$.

Si $u : i \to j$ est une flèche de I, on la considèrera encore comme une flèche de source i et de but j dans J.

Si $t_{\omega\omega'}$ est une flèche de Ω, on la considèrera encore comme une flèche de source ω' et de but ω dans J.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on a une application canonique

$$I^{\omega} \to \mathrm{Fl}\ J .$$

Si $i \in I^{\omega}$, on notera $t_{i\omega}$ la flèche de J, image de i par cette application canonique. Ce sera une flèche de source ω et de but i.

Nous allons définir la composition des flèches dans J.

Soient $u : k \to m$ et $v : m \to n$ deux flèches de J. La flèche vu sera ainsi définie :

<u>1er cas</u> : $u, v \in \mathrm{Fl}\ I$ (resp. $\mathrm{Fl}\ \Omega$). - Le produit des flèches u et v dans J sera le produit des flèches u et v dans I (resp. Ω) de telle sorte que I <u>et</u> J <u>seront des sous-catégories pleines de</u> J.

<u>2e cas</u> : $k = \omega' \in \mathrm{Ob}\ \Omega$; $m = \omega \in \mathrm{Ob}\ \Omega$; $n = i \in \mathrm{Ob}\ I$. - On posera

$$t_{i\omega}\, t_{\omega\omega'} = t_{i\omega'} \qquad \text{(ce qui est possible à cause de } (T_2)) .$$

<u>3e cas</u> : $k = \omega \in \mathrm{Ob}\ \Omega$; $m = i \in \mathrm{Ob}\ I$; $n = j \in \mathrm{Ob}\ I$. - On posera

$$vt_{i\omega} = t_{j\omega} \qquad \text{(ce qui est possible à cause de } (T_1)) .$$

En examinant les différents cas possibles, il est alors facile de vérifier que l'on a toujours la relation d'associativité

$$(wv)u = w(vu) ,$$

c'est-à-dire que J est bien une catégorie.

Une extension de cette forme sera dite <u>extension de type</u> T de la catégorie I.

EXEMPLE : Soient Ω réduit au seul élément ω, et $I^{\omega} = \mathrm{Ob}\ I$. Alors J est la catégorie obtenue en rajoutant à I l'objet initial ω.

LEMME 3. - <u>Soient</u> $J = (I , \Omega ; (I^{\omega})_{\omega\in\Omega})$ <u>une extension de type</u> T <u>de la catégorie</u> I , <u>et un sous-ensemble</u> Ω' <u>de</u> Ω <u>que l'on considèrera comme une sous-catégorie pleine de</u> Ω . <u>La sous-catégorie pleine</u> J' <u>de</u> J , <u>définie par l'égalité</u> :

$$\mathrm{Ob}\, J' = \mathrm{Ob}\, I \cup \Omega' ,$$

<u>peut s'identifier à la catégorie</u> $(I , \Omega' ; (I^{\omega})_{\omega\in\Omega'})$.

C'est évident.

LEMME 4. - <u>Soient</u> J <u>une extension de type</u> T <u>de la catégorie</u> I , <u>et</u> K <u>une extension de type</u> T <u>de la catégorie</u> J . <u>Alors</u> K <u>est une extension de type</u> T <u>de la catégorie</u> I .

Soient

$$J = (I , \Omega ; (I^{\omega})_{\omega\in\Omega}) ,$$

$$K = (J , \Delta ; (J^{\delta})_{\delta\in\Delta}) .$$

Posons $\Xi = \Omega \oplus \Delta$. Si ω (resp. δ) est un élément de Ω (resp. Δ), on notera $\overline{\omega}$ (resp. $\overline{\delta}$) son image canonique dans Ξ . On voit immédiatement que l'on définit une structure d'ordre sur Ξ de la façon suivante :

Si $\xi , \eta \in \Xi$, on posera $\xi \leqslant \eta$ si (et seulement si) on est dans un des trois cas suivants :

<u>1er cas</u> : $\xi = \overline{\omega}$, $\eta = \overline{\omega}'$ $(\omega , \omega' \in \Omega)$ et $\omega \leqslant \omega'$.
<u>2e cas</u> : $\xi = \overline{\delta}$, $\eta = \overline{\delta}'$ $(\delta , \delta' \in \Delta)$ et $\delta \leqslant \delta'$.
<u>3e cas</u> : $\xi = \overline{\delta}$, $\eta = \overline{\omega}$ $(\delta \in \Delta ; \omega \in \Omega)$ et $\omega \in J^{\delta}$.

ξ étant un élément de Ξ , nous noterons I^{ξ} le sous-ensemble de $\mathrm{Ob}\, I$ ainsi défini :

Si $\xi = \overline{\omega}$ et $\omega \in \Omega$, on pose $I^{\xi} = I^{\omega}$.
Si $\xi = \overline{\delta}$ et $\delta \in \Delta$, on pose $I^{\xi} = J^{\delta} \cap \mathrm{Ob}\, I$.

On vérifie alors sans peine que la famille $(I^{\xi})_{\xi\in\Xi}$ remplit les conditions (T_1) et (T_2), et que la catégorie K peut s'identifier à la catégorie $(I , \Xi ; (I^{\xi})_{\xi\in\Xi})$. D'où le lemme.

THÉORÈME 3. - <u>Soient un foncteur</u> $F : I \to \mathcal{C}$, <u>et une</u> T-<u>extension</u>

$$J = (I , \Omega ; (I^{\omega})_{\omega\in\Omega})$$

de la catégorie $\mathcal{C}$. Supposons que, pour tout $\omega \in \Omega$, la restriction de F à la sous-catégorie pleine de I ayant I^{ω} pour ensemble d'objets admette une limite projective $(\lambda_{i\omega} : L_{\omega} \to F_i)_{i \in I^{\omega}}$.

Il existe alors une extension cartésienne G de F à J qui est ainsi définie:

$$G(\omega) = L_{\omega} \qquad (\forall\ \omega \in \Omega) \quad ,$$

$$G(t_{i\omega}) = \lambda_{i\omega} \qquad (\forall\ \omega \in \Omega\ ;\ \ i \in I^{\omega}) \quad ,$$

$$G(t_{\omega\omega'}) = \lambda_{\omega\omega'} \qquad (\forall\ t_{\omega'\omega} \in \mathrm{Fl}\ \Omega) \quad ,$$

où $\lambda_{\omega\omega'}$ est la flèche

$$\lambda_{\omega\omega'} : L_{\omega'} \to L_{\omega}$$

définie de façon unique par les égalités

$$\lambda_{i\omega'} = \lambda_{i\omega}\ \lambda_{\omega\omega'} \qquad (\forall\ i \in I^{\omega}) \quad .$$

Vérifions d'abord que l'on définit bien ainsi un foncteur G . Soient donc deux flèches u et v de J telles que $\beta(u) = \sigma(v)$. Vérifions l'égalité

$$G(vu) = G(v)\ G(u) \quad .$$

Quatre cas sont à examiner.

1er cas : $u , v \in \mathrm{Fl}\ I$. - Alors

$$G(vu) = F(vu) = F(v)\ F(u) = G(v)\ G(u) \quad .$$

2e cas :

$$\begin{cases} u = t_{i\omega} & (\omega \in \Omega\ ;\ \ i \in I^{\omega}) \quad , \\ v : i \to j \in \mathrm{Fl}\ I & . \end{cases}$$

Alors

$$G(vu) = G(t_{j\omega}) = \lambda_{j\omega} \quad ,$$

$$G(v)\ G(u) = F(v)\ G(t_{i\omega}) = F(v)\ \lambda_{i\omega} \quad ,$$

et on a bien $\lambda_{j\omega} = F(v)\ \lambda_{i\omega}$.

3e cas :

$$\begin{cases} u = t_{\omega\omega'} & (\omega\ ,\ \omega' \in \Omega) \quad , \\ v = t_{i\omega} & (i \in I^{\omega}) \quad . \end{cases}$$

Alors

$$G(vu) = G(t_{i\omega'}) = \lambda_{i\omega'} \quad ,$$

$$G(v)\ G(u) = G(t_{i\omega})\ G(t_{\omega\omega'}) = \lambda_{i\omega}\ \lambda_{\omega\omega'} \quad ,$$

et on a bien $\lambda_{i\omega'} = \lambda_{i\omega}\ \lambda_{\omega\omega'}$.

4e cas :

$$\begin{cases} u = t_{\omega'\omega''} \\ v = t_{\omega\omega'} \end{cases} \qquad (\omega\ ,\ \omega'\ ,\ \omega'' \in \Omega) \quad .$$

Alors

$$G(vu) = G(t_{\omega\omega''}) = \lambda_{\omega\omega''} \quad ,$$

$$G(v)\ G(u) = \lambda_{\omega\omega'}\ \lambda_{\omega'\omega''} \quad .$$

Pour tout $i \in I^{\omega}$, on a les égalités

$$\lambda_{i\omega}\ \lambda_{\omega\omega''} = \lambda_{i\omega''} = \lambda_{i\omega'}\ \lambda_{\omega'\omega''} = \lambda_{i\omega}(\lambda_{\omega\omega'}\ \lambda_{\omega'\omega''}) \quad .$$

Comme les flèches $(\lambda_{i\omega})_{i\in I^{\omega}}$ forment une famille monomorphique, on en déduit bien

$$\lambda_{\omega\omega''} = \lambda_{\omega\omega'}\ \lambda_{\omega'\omega''} \quad .$$

G est donc bien un foncteur extension de F . Montrons que c'est une extension cartésienne de F .

Soit G' un foncteur qui prolonge F à J , et soit $\omega \in \Omega$. Les flèches $G'(t_{i\omega})\ :\ G'_{\omega} \to F_i$ forment un $F|I^{\omega}$-système projectif. Il existe donc une flèche

$$\varphi_{\omega}\ :\ G'_{\omega} \to G_{\omega} = L_{\omega}$$

définie de façon unique par les égalités :

(1) $$G'(t_{i\omega}) = G(t_{i\omega})\ \varphi_{\omega} \qquad (\forall\ i \in I^{\omega}) \quad .$$

Montrons que les $(\varphi_{\omega})_{\omega\in\Omega}$ définissent un I-morphisme fonctoriel φ de G' dans G .

Il faut donc vérifier que, pour toute flèche u de J , on a

(2) $$\varphi_{\beta u}\ G'(u) = G(u)\ \varphi_{\sigma u} \quad .$$

Trois cas sont à examiner :

<u>1er cas</u> : $u \in \mathrm{Fl}\ I$. – Dans ce cas,

$$\varphi_{\beta u} = 1_{F(\beta u)} , \qquad \varphi_{\sigma u} = 1_{F(\sigma u)} \qquad \text{et} \qquad G'(u) = G(u) = F(u) ,$$

d'où (2).

<u>2e cas</u> : $u = t_{i\omega}$ $(\omega \in \Omega ;\ i \in I^{(\omega)})$. – On a alors

$$\varphi_{\beta u} = 1_{F(i)} \qquad \text{et} \qquad \varphi_{\sigma u} = \varphi_\omega ,$$

d'où (2).

<u>3e cas</u> : $u = t_{\omega\omega'}$ avec $\omega , \omega' \in \Omega$. – On a

$$\varphi_{\beta u} = \varphi_\omega \qquad \text{et} \qquad \varphi_{\sigma u} = \varphi_{\omega'} .$$

D'autre part, pour tout $i \in I$:

$$G(t_{i\omega})\ \varphi_\omega\ G'(t_{\omega\omega'}) = G'(t_{i\omega})\ G'(t_{\omega\omega'}) = G'(t_{i\omega'}) = G(t_{i\omega'})\ \varphi_{\omega'} = G(t_{i\omega})\ G(t_{\omega\omega'})\ \varphi_{\omega'}$$

et comme la famille $(G(t_{i\omega}))_{i\in I^{(\omega)}}$ est monomorphique, on en déduit

$$\varphi_\omega\ G'(t_{\omega\omega'}) = G(t_{\omega\omega'})\ \varphi_{\omega'} .$$

D'où encore (2).

φ est donc bien un I-morphisme fonctoriel de G' dans G. Montrons que c'est le seul. Soit donc un I-morphisme fonctoriel ψ de G' dans G. Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$G(t_{i\omega})\ \psi_\omega = G'(t_{i\omega}) \qquad (\forall\ i \in I^{(\omega)}) .$$

Les conditions d'unicité (1) entraînent donc $\psi_\omega = \varphi_\omega$ $(\forall\ \omega \in \Omega)$, donc $\varphi = \psi$, ce qui achève de montrer le théorème.

Soit maintenant un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$. Supposons que l'on ait une suite d'extensions de la catégorie I :

$$I = J_0 \subset J_1 \subset \ldots \subset J_n ,$$

chaque J_m étant une extension de type T de la catégorie précédente J_{m-1} $(1 \leqslant m \leqslant n)$, et J_n admettant un objet initial ω_0.

Supposons que le procédé du théorème 3 permette de définir pour tout m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ un foncteur

$$G_m : J_m \to \mathcal{C} ,$$

extension cartésienne à J_m du foncteur G_{m-1} (avec $G_0 = F$).

On peut se demander alors si les flèches

$$[G_n(\omega_0 \to i)]_{i\in \mathrm{Ob}I}$$

définissent une limite projective du foncteur F.

On peut démontrer qu'il en est effectivement toujours ainsi. Nous ne le ferons que dans le cas où la catégorie $\mathcal{C}$ est supposée avoir des limites projectives.

L'application répétée du théorème 2 montre en effet que G_n est une extension cartésienne à J_n du foncteur F. Comme J_n est une extension de type T de la catégorie I (lemme 4), et comme $\mathcal{C}$ admet des limites projectives, l'extension cartésienne J_n se construit par la méthode indiquée au théorème 3, ce qui entraîne le résultat annoncé.

Comme application de cette méthode, démontrons les résultats indiqués dans l'exemple 4 du § 2.

En se reportant à la figure 3, on peut considérer que la catégorie I a cinq objets notés a, b, c, d et e. On fait l'extension $J_1 = (I, \Omega_1 ; (I^{\omega})_{\omega\in\Omega_1})$ dans laquelle

$$\Omega_1 = \{i\}, \qquad I^{\omega} = \{b, c, e\}.$$

Le théorème 3 montre que l'extension cartésienne G_1 de F à J_1 se fait à partir de la limite projective de $F|I^{\omega}$, c'est-à-dire en posant :

$$G_1(t_{ei}) = u', \qquad G_1(t_{bi}) = f'$$

(u' et f' étant définis comme il a été dit plus haut).

On fait ensuite l'extension $J_2 = (J_1, \Omega_2 ; (J_1^{\omega})_{\omega\in\Omega_2})$ dans laquelle

$$\Omega_2 = \{j, k\} \qquad \text{(sans relation d'ordre entre } j \text{ et } k\text{)},$$

$$J_1^j = \{a, b, c, e, i\}, \qquad J_1^k = \{b, c, d, e, i\}.$$

Le théorème 3 permet encore de construire G_2.

La sous-catégorie pleine de J_1^j, dont l'ensemble des objets est (a, b, i), est pseudo-cofinale dans J_1^j. On voit donc, à partir du lemme 1, que l'on peut poser

$$G_2(t_{aj}) = f'', \qquad G_2(t_{ij}) = v',$$

de même

$$G_2(t_{dk} = u''), \qquad G_2(t_{ik}) = g'.$$

On fait enfin l'extension $J_3 = (J_2 , \Omega_3 ; (J_2^{\omega})_{\omega\in\Omega_3})$, dans laquelle

$$\Omega_3 = \{\omega\} , \qquad J_2^{\omega} = \mathrm{Ob}\ J_2 \ .$$

La sous-catégorie pleine de J_2 , dont l'ensemble des objets est $\{i , j , k\}$, étant pseudo-cofinale dans J_2 , on voit encore que

$$G_3(t_{j\omega}) = g'' , \qquad G_3(t_{k\omega}) = v'' \ .$$

D'où la construction indiquée plus haut.

Pour obtenir la première construction indiquée dans l'exemple (au moyen du produit fibré $fg \wedge uv$), il suffit de remarquer que la sous-catégorie pleine de I , dont l'ensemble des objets est $\{a , c , b\}$, est pseudo-cofinale dans I .

Nous laissons au lecteur le soin de traîter de manière analogue l'exemple 2 (associativité du produit direct) et l'exemple 3.

Par contre, la méthode exposée dans ce paragraphe ne permet pas de traîter l'exemple 5, d'où la nécessité de donner de nouvelles méthodes qui vont faire l'objet du paragraphe suivant.

4. Produits fibrés généralisés.

Etant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, on appellera donnée de produit fibré généralisé dans $\mathcal{C}$ la donnée de deux applications

$$f : X \to \mathrm{Ob}\ \mathcal{C} ,$$

$$g : Y \to \mathrm{Ob}\ \mathcal{C} ,$$

(X et Y étant des ensembles), et la donnée, pour tout couple $(x , y) \in X \times Y$, d'un sous-ensemble

$$A_{xy} \subset \mathrm{Hom}(f(x) , g(y)) \ .$$

Cette donnée pourra être désignée par $(f(x) , A_{xy})_{(x,y)\in X\times Y}$.

Φ étant une telle donnée de produit fibré généralisé, on appellera Φ-système adéquat la donnée $(\lambda_x : L \to f(x))_{x\in X}$ d'une famille de flèches indexée par X, ayant toutes la même source, et telles que

$$u \in A_{xy} , \quad v \in A_{x'y} \implies u\lambda_x = v\lambda_y \qquad (\forall\ (x , x' , y) \in X \times X \times Y) \ .$$

Les Φ-systèmes adéquats forment une catégorie si l'on considère qu'une flèche du Φ-système adéquat $(\lambda'_x : L' \to f(x))_{x\in X}$ dans le Φ-système adéquat

$$(\lambda_x : L \to f(x))_{x \in X} ,$$

est une flèche $k : L' \to L$ telle que

$$\lambda'_x = \lambda_x k \qquad (\forall x \in X) .$$

Si cette catégorie possède un objet final, celui-ci sera dit un <u>produit fibré généralisé de donnée</u> Φ .

EXEMPLE 1. - <u>Produits fibrés ordinaires</u>. Dans le cas où $Y = \{y\}$ et où $A_{xy} = \{u_x\}$ $(\forall x \in X)$, ce produit fibré généralisé est le produit fibré des flèches $(u_x)_{x \in X}$.

EXEMPLE 2. - <u>Produits directs</u>. Dans le cas où $A_{xy} = \emptyset$ $(\forall x , y)$, on n'a pas à définir g , et le produit fibré généralisé est le produit direct $\prod_{x \in X} f(x)$.

EXEMPLE 3. - <u>Noyau généralisé</u>. C'est le cas où $X = \{x\}$.

On remarquera qu'une donnée de noyau généralisé peut être caractérisée par l'objet $a = f(x)$ de $\mathcal{C}$ et par les ensembles $A_y = A_{xy}$. Une telle donnée peut donc être notée $(a , A_y)_{y \in Y}$.

EXEMPLE 4. - <u>Noyau ordinaire</u>. Dans le cas où $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$, le noyau généralisé est le noyau ordinaire $\operatorname{Ker} A_{xy}$.

THÉORÈME 4. - <u>La construction d'une limite projective peut se ramener à celle d'un produit fibré généralisé.</u>

I étant une petite catégorie, soit un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$. On va définir une donnée de produit fibré $\hat{F}$ de la façon suivante :

On prend pour ensemble X un sous-ensemble de $\operatorname{Ob} I$, tel que $\forall i \in \operatorname{Ob} I$, $\exists x \in X$ avec $\operatorname{Hom}(x , i) \neq \emptyset$. (Un tel ensemble existe toujours, et en général de bien des façons. On peut prendre par exemple $X = \operatorname{Ob} I$.)

On prend pour ensemble Y l'ensemble $\operatorname{Ob} I$.

$$f : x \longmapsto F(x) ,$$

$$g : y \longmapsto F(y) ,$$

$$A_{xy} = (F(u))_{u \in \operatorname{Hom}(x,y)} .$$

Soit alors un F-système projectif $\lambda : (\lambda_i : L \to F_i)_{i \in \operatorname{Ob} I}$. Il est facile de voir que les flèches $(\lambda_x : L \to F_x)_{x \in X}$ définissent un $\hat{F}$-système adéquat noté $S(\lambda)$, et que S se prolonge naturellement en un foncteur (encore noté S) de la catégorie des F-systèmes projectifs dans celle des $\hat{F}$-systèmes adéquats.

Réciproquement, donnons-nous un $\hat{F}$-système adéquat μ : $(\mu_x : L \rightarrow F_x)_{x\in X}$. On peut définir un F-système projectif $(\lambda_i : L \rightarrow F_i)_{i\in \mathrm{Ob}I}$ de la façon suivante :

Soit $x \in X$ tel que $\mathrm{Hom}(x , i) \neq \emptyset$, et soit $u \in \mathrm{Hom}(x , i)$. On posera

$$\lambda_i = F(u)\ \lambda_x \ .$$

Il est facile de voir que cette flèche λ_i ne dépend que de l'objet i et que l'on définit ainsi un F-système projectif. En notant celui-ci $T(\mu)$, on voit sans peine que T définit naturellement un foncteur de la catégorie des $\hat{F}$-systèmes adéquats dans celle des F-systèmes projectifs.

ST et TS étant des foncteurs identiques, il en résulte que S définit un isomorphisme de la catégorie des F-systèmes projectifs sur celle des $\hat{F}$-systèmes adéquats et que T en est le foncteur inverse.

A une limite projective de F va donc correspondre un produit fibré généralisé de donnée $\hat{F}$, et réciproquement. D'où le théorème.

THÉORÈME 5. - Soit $\Phi = (f(x) , A_{xy})_{(x,y)\in X\times Y}$ une donnée de produit fibré généralisé. A tout couple $(x , y) \in X \times Y$ associons un sous-ensemble A'_{xy} de A_{xy}, et soit $(\lambda'_x : L' \rightarrow f(x))_{x\in X}$ un produit fibré généralisé de donnée

$$\Phi' = (f(x) , A'_{xy})_{(x,y)\in X\times Y} \ .$$

Pour tout $y \in Y$, posons

$$B_y = (u\lambda'_x)_{x\in X, u\in A_{xy}} \ .$$

Soit $k : L \rightarrow L'$ un noyau généralisé de donnée $\Psi = (L' , B_y)_{y\in Y}$.

Alors le système $\tilde{\lambda} = (\lambda_x = \lambda'_x\ k)_{x\in X}$ est un produit fibré généralisé de donnée Φ.

Soient $u \in A_{ay}$, $v \in A_{by}$. On aura :

$$u\lambda_a = u\lambda'_a\ k \ , \qquad v\lambda_b = v\lambda'_b\ k \ .$$

Les appartenances $u\lambda'_a , v\lambda'_b \in B_y$ entraînent $u\lambda'_a\ k = v\lambda'_b\ k$, ce qui montre que $(\lambda_x)_{x\in X}$ est un Φ-système adéquat.

Soit maintenant un Φ-système adéquat $\tilde{\mu} = (\mu_x : M \rightarrow f(x))_{x\in X}$. C'est encore un Φ'-système adéquat. Il existe donc une flèche $\mu : M \rightarrow L'$ définie de manière unique par les égalités :

(3)
$$\mu_x = \lambda'_x\ \mu \qquad (\forall\ x \in X) \ .$$

La flèche μ est un Ψ-système adéquat : Soient en effet $u\lambda'_a$, $v\lambda'_b \in B_y$ avec $u \in A_{ay}$ et $v \in A_{by}$. On aura

$$u\lambda'_a \mu = u\mu_a , \qquad v\lambda'_b \mu = v\mu_b .$$

Or $u\mu_a = v\mu_b$ (puisque $\tilde{\mu}$ est adéquat). La flèche μ est bien un Ψ-système adéquat, et il existe donc une flèche $m : M \to L$ définie de façon unique par l'égalité

$$\mu = km . \tag{4}$$

On aura

$$\mu_x = \lambda_x m \qquad (\forall\ x \in X) , \tag{5}$$

et par suite m est un morphisme de $\tilde{\mu}$ dans $\tilde{\lambda}$. Il nous reste à démontrer que ce morphisme est unique, c'est-à-dire que les égalités (5) définissent complètement m .

Soit donc une flèche $m' : M \to L$ telle que

$$\mu_x = \lambda_x m' \qquad (\forall\ x \in X) . \tag{5'}$$

On aura

$$\lambda'_x km' = \lambda_x m' = \mu_x \qquad (\forall\ x \in X) .$$

Les égalités (3) entraînent alors

$$km' = \mu ,$$

et l'égalité (4)

$$m' = m ,$$

d'où le théorème.

REMARQUE 1. - Les flèches $(\lambda'_x)_{x\in X}$ formant un Φ'-système adéquat, on voit que le sous-ensemble $B'_y = (u\lambda'_x)_{x\in X, u\in A'_{xy}}$ de B_y se réduit à un seul élément.

REMARQUE 2. - Le théorème 5 semble être un cas particulier d'un théorème général d'associativité dans le calcul des produits fibrés généralisés que nous n'avons pas encore complètement dégagé et qui comprendrait comme autres cas particuliers les théorèmes 6 et 7.

Si dans l'énoncé du théorème 5 on prend $A'_{xy} = \emptyset$ $(\forall\ x , y)$, la famille des flèches $(\lambda'_x)_{x\in X}$ n'est autre que le produit direct $\prod_{x\in X} f(x)$, et par suite :

COROLLAIRE. - Le calcul d'un produit fibré généralisé peut se ramener à ceux d'un produit direct et d'un noyau généralisé.

EXEMPLE : Soient

$$I = \{1 , 2\} , \quad J = \{1 , 2\} ,$$

$$f(1) = a_1 , \quad f(2) = a_2 , \quad g(1) = b_1 , \quad g(2) = b_2 ,$$

$$A_{11} = \{t\} , \quad A_{12} = \{u\} , \quad A_{21} = \{v\} , \quad A_{22} = \{w\} .$$

Soient $\{v' , t'\}$ le produit fibré $t \wedge v$, et $k = \mathrm{Ker}(uv' , wt')$. Le produit fibré généralisé de donnée Φ est le couple de flèches $\{v'k , t'k\}$. On le voit en prenant :

$$A'_{11} = A_{11} , \quad A'_{21} = A_{21} , \quad A'_{12} = \emptyset = A'_{22} .$$

On a alors

$$B_1 = \{vt' , tv'\} = \{vt'\} ,$$

$$B_2 = \{uv' , wt'\} ,$$

et il est facile de voir que la donnée de noyau généralisé (B_1 , B_2) a pour noyau généralisé le noyau ordinaire $k = \mathrm{Ker}\, B_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "k"] & \\
 & \cdot \arrow[dl, "v'"'] \arrow[dr, "t'"] & \\
a_1 \arrow[d, "t"'] \arrow[drr, "u" near start] & & a_2 \arrow[d, "w"] \arrow[dll, "v" near start] \\
b_1 & & b_2
\end{tikzcd}$$

fig. 7 .

Le théorème suivant va permettre de montrer que le calcul d'un noyau généralisé se ramène à un calcul de noyaux ordinaires et de produits directs.

THÉORÈME 6. - Soient $\Phi = (a , A_y)_{y \in Y}$ une donnée de noyau généralisé, et, pour tout $y \in Y$, un noyau (ordinaire) $k_y : b_y \to a$ de A_y . Soit d'autre part $(p_y : b \to b_y)_{y \in Y}$ le produit fibré des flèches k_y .
Alors la flèche $k = k_y p_y$ (qui ne dépend pas de y) est un noyau généralisé de donnée Φ .

Soient u , $v \in A_y$. On a $uk_y = vk_y$, donc $uk = vk$, et k est un Φ-système adéquat.

Soit $\mu : m \to a$ un Φ-système adéquat. Pour tout $y \in Y$, la flèche μ est un (a , A_y)-système adéquat. Il existe donc une flèche $\mu_y : m \to b_y$ complètement définie par l'égalité

(6) $$\mu = k_y \mu_y \quad ,$$

et comme les flèches $k_y \mu_y$ sont indépendantes de y , il existe une flèche $q : m \to b$ complètement définie par les égalités

(7) $$\mu_y = p_y q \qquad (\forall\ y \in Y) \quad .$$

On a donc

(8) $$\mu = kq \quad ,$$

ce qui montre que q est un morphisme du (a , A_y)-système adéquat dans le système k . Il nous reste à montrer que c'est le seul, c'est-à-dire que l'égalité (8) détermine complètement q . Soit donc un morphisme de μ dans k , c'est-à-dire une flèche $q' : m \to b$ telle que

(8') $$\mu = kq' \quad .$$

Tout revient à montrer que $q' = q$.

On a

$$k_y\, p_y\, q' = kq' = \mu \quad .$$

Les égalités (6) montrent donc que

$$\mu_y = p_y\, q' \qquad (\forall\ y \in Y) \quad ,$$

et les égalités montrent alors que $q = q'$. D'où le théorème.

Comme on sait que la construction d'un produit fibré se ramène à celle d'un produit direct et d'un noyau ordinaire (voir § 1), les théorèmes 5 et 6 montrent que la construction de tout produit fibré généralisé (et par suite de toute limite projective) peut se ramener à des constructions de produits et de noyaux ordinaires. En particulier :

COROLLAIRE. - Si la catégorie $\mathcal{C}$ admet des produits directs et des noyaux ordinaires, elle admet des limites projectives.

Pour retrouver le théorème 1 à partir de ce corollaire, il faudrait montrer que l'on peut construire n'importe quel noyau ordinaire à partir de produits directs et de noyaux de couples de flèches. Nous ne savons le faire que pour un noyau d'un ensemble fini de flèches, et ce sera une conséquence du théorème suivant.

THÉORÈME 7. - Soient, dans une catégorie $\mathcal{C}$:

$A \subset \mathrm{Hom}(a, b)$ un ensemble de flèches de source a et de but b,
$A = \sum_{p\in P} A_p$ une partition de A telle que $A_p \neq \emptyset$ $(\forall\, p \in P)$,
$k_p : a_p \to a$ un noyau de A_p $(\forall\, p \in P)$,
$(\lambda_p : c \to a_p)_{p\in P}$ le produit fibré $\bigwedge_{p\in P} \lambda_p$,
$t = k_p \lambda_p : c \to a$ (flèche qui ne dépend pas de $p \in P$),
$t_p = ut$ avec $u \in A_p$ (flèche qui ne dépend pas de $u \in A_p$),
$s = \mathrm{Ker}[(t_p)_{p\in P}] : L \to c$.

Alors la flèche $k = ts$ est le noyau de A.

On voit d'abord immédiatement que les flèches uk ne dépendent pas de $u \in A$. Soit maintenant une flèche $k' : L' \to a$ telle que toutes les flèches uk' $(u \in A)$ soient égales.

Pour tout $p \in P$, il existe une flèche $k'_p : L' \to a_p$ complètement définie par l'égalité

(9) $$k' = k_p k'_p ,$$

et une flèche $r : L' \to c$ complètement définie par les égalités

(10) $$k'_p = \lambda_p r \qquad (\forall\, p \in P) .$$

Soit $u \in A_p$. On aura :

$$t_p r = utr = uk_p \lambda_p r = uk_p k'_p = uk' ,$$

qui ne dépend pas de $u \in A$, et donc ne dépend pas de $p \in P$.

Par suite, il existe une flèche $\rho : L' \to L$ complètement définie par l'égalité

(11) $$r = s\rho .$$

On a donc :

$$k' = k_p k'_p = k_p \lambda_p r = tr = ts\rho = k\rho .$$

Il nous reste à montrer que l'égalité

$$k' = k\rho$$

détermine complètement ρ . Soit donc une flèche $\rho' : L' \to L$ telle que

$$k' = k\rho' \quad .$$

On aura alors

$$k' = k\rho' = ts\rho' = k_p \lambda_p s\rho' \qquad (\forall\ p \in P) \quad .$$

L'égalité (9) montre que

$$k'_p = \lambda_p s\rho' \qquad (\forall\ p \in P) \quad .$$

Les égalités (10) montrent que

$$r = s\rho' \quad ,$$

et l'égalité (11) montre que $\rho = \rho'$. D'où le théorème.

COROLLAIRE 1. - Si A a un nombre fini d'éléments, Ker A peut se construire au moyen de produits directs finis et de noyaux de couples de flèches.

Montrons cela par récurrence sur le nombre n des éléments de A . C'est évident si $n = 0$, 1 , 2 . Supposons le théorème démontré toutes les fois que l'ensemble A a strictement moins de n éléments, et supposons que A ait n éléments $(n > 2)$. On fait une partition de A en deux ensembles A_1 et A_2 , ayant strictement moins de n éléments, et on applique la construction définie dans le théorème 7. Cette construction ne fait intervenir que celles de noyaux d'ensembles de flèches ayant strictement moins de 2 éléments, et un produit fibré de deux flèches qui se ramène à un produit direct et à un noyau d'un couple de flèches. D'où le corollaire.

COROLLAIRE 2. - Si I est une catégorie n'ayant qu'un nombre fini de flèches, la construction de la limite projective d'un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ se ramène à celle d'un nombre fini de produits directs finis et de noyaux de couples de flèches.

C'est une conséquence immédiate de tout ce paragraphe.

On retrouve en particulier le fait que si la catégorie $\mathcal{C}$ possède des produits directs finis et des noyaux de couples de flèches, elle possède des limites projectives finies.

EXEMPLE : Montrons comment ce qui précède permet de traîter l'exemple 5 du paragraphe 2. Le théorème 4 montre que la construction de la limite projective de F peut se ramener à celle du noyau généralisé dont la donnée Φ est ainsi définie :

$$I = \{a\} , \quad J = \{a , b , c\} ,$$

$$f(a) = g(a) = F_a , \quad g(b) = F_b , \quad f(c) = F_c ,$$

$$A_{aa} = \{1_{F_a}\} , \quad A_{ab} = \{v , w\} , \quad A_{ac} = \{sv , sw , tv , tw\} .$$

Le théorème 6 conduit à introduire les noyaux

$$k' = \text{Ker } A_{ab} \quad \text{et} \quad k'' = \text{Ker } A_{ac} ,$$

et le produit fibré $\{\alpha , \beta\} = k' \wedge k''$. $k'\alpha = k''\beta$ est alors le noyau généralisé cherché.

Quant à la première méthode indiquée dans cet exemple 5, nous laissons au lecteur le soin de la déduire des considérations simultanées des § 3 et § 4, quoique, ici encore, l'introduction de l'hypothétique "théorème général d'associativité des produits fibrés généralisés" (dont nous n'avons pas voulu donner une liste fastidieuse de cas particuliers) permette de l'obtenir beaucoup plus simplement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] POITOU (G.) et JAFFARD (P.). - Introduction à la théorie des catégories. - Paris, OFFILIB, 1965 (Faculté des Sciences de Lille).