Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Klaus Keimel

Demi-groupes compacts solénoïdaux et cylindriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1965-1966), exp. n° 19, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_2_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
19e année, 1965/66, n° 19

25 avril 1966

DEMI-GROUPES COMPACTS SOLÉNOÏDAUX ET CYLINDRIQUES

par Klaus KEIMEL

(d'après HOFMANN-MOSTERT [1])

Dans cet exposé, il ne s'agira pas de la théorie générale des demi-groupes compacts ; nous nous proposons de fournir des exemples et classes d'exemples qui sont caractéristiques des demi-groupes compacts. A une exception près, on trouvera ces exemples dans le livre de K. H. HOFMANN et P. S. MOSTERT "Elements of compact semi-groups" qui paraîtra cet été.

1. Préliminaires.

Un demi-groupe topologique est un ensemble S muni d'une structure d'espace topologique séparé et d'une loi de composition associative

$$(x\ ,\ y) \longmapsto xy\ :\ S \times S \longrightarrow S$$

de sorte que cette application est continue. Un morphisme de demi-groupes topologiques est un homomorphisme de demi-groupes qui est continu.

A partir de maintenant, notons S un demi-groupe compact possédant un élément unité 1 . On peut définir un pré-ordre sur S par

$$a \leqslant b \quad \text{si et seulement si} \quad a \in bS \cap Sb \quad .$$

La relation $\leqslant$ est en effet un pré-ordre, dont le graphe est fermé dans $S \times S$. La relation d'équivalence associée à cet ordre est la relation $\mathcal{H}$ de Green, définie par

$$a\ \mathcal{H}\ b \quad \text{si et seulement si} \quad a \leqslant b \quad \text{et} \quad b \leqslant a \quad .$$

La relation $\mathcal{H}$ est fermée ; donc $S/\mathcal{H}$ est un espace compact ordonné, le graphe de l'ordre étant fermé. Cela entraîne que chaque élément de $S/\mathcal{H}$ est compris entre un élément maximal et un élément minimal de $S/\mathcal{H}$. Evidemment la classe $H(1)$ de 1 mod $\mathcal{H}$ est la plus grande classe de S mod $\mathcal{H}$. Si e est un élément idempotent de S , alors la classe $H(e)$ de e modulo $\mathcal{H}$ est le groupe maximal dans S contenant e . Il est bien connu que chaque demi-groupe compact admet un idéal minimum M , qui est fermé et qui est réunion des groupes compacts. Ces groupes de l'idéal M sont les classes minimales de S mod $\mathcal{H}$. Ainsi le pré-ordre $\leqslant$ nous sert à nous donner une image intuitive d'un demi-groupe compact.

Dans un demi-groupe abélien S , l'idéal minimum M est un groupe ; la relation $\mathcal{H}$ est compatible avec la multiplication ; alors $S/\mathcal{H}$ est un demi-groupe compact abélien ordonné.

EXEMPLE 1.1. - Nous noterons par $\mathbb{H}$ le demi-groupe additif des nombres réels non négatifs. Nous compactifions $\mathbb{H}$ par un élément ∞ , et étendons l'addition de $\mathbb{H}$ à $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ par

$$\infty + x = \infty = x + \infty \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{H} \ .$$

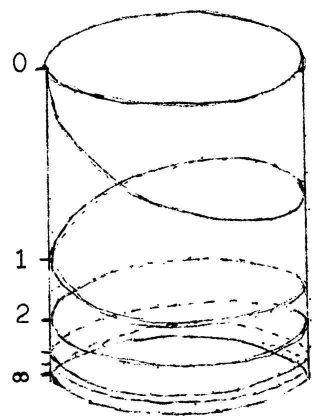
Pour tout $r \in \mathbb{H}^*$, l'intervalle $[r , \infty]$ est un idéal de $\mathbb{H}^*$. Alors

$$\mathbb{H}^*_r = \mathbb{H}^*/[r , \infty] \ ,$$

obtenu à partir de H^* en identifiant l'idéal $[r , \infty]$ à un point, est encore un demi-groupe compact ; et toute image de $\mathbb{H}^*$ par un morphisme est isomorphe à $\mathbb{H}^*_r$ pour un $r \in \mathbb{H}^*$.

2. Demi-groupes solénoïdaux.

EXEMPLE 2.1. - Soient $\mathbb{R}$ le groupe des nombres réels et $\mathbb{Z}$ le groupe des entiers. Considérons $\mathbb{H}^* \times \mathbb{T}$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. C'est un demi-groupe compact avec un élément unité. Les classes mod $\mathcal{H}$ sont les cercles $\{r\} \times \mathbb{T}$, et on a



$$(H^* \times \mathbb{T})/\mathcal{H} \cong \mathbb{H}^* \ .$$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}$ l'application canonique. L'ensemble

$$S_f = \{(h , f(h)) \ ; \ h \in \mathbb{H}\} \cup (\infty \times \mathbb{T})$$

est un sous-demi-groupe fermé de $\mathbb{H}^* \times \mathbb{T}$. Les classes de S_f mod $\mathcal{H}$ ne contiennent qu'un seul point, sauf l'idéal minimal $\infty \times \mathbb{T}$. L'application $\sigma_f : \mathbb{H} \longrightarrow S_f$, définie par $\sigma_f(h) = (h , f(h))$, est un morphisme dont l'image est partout dense dans S_f .

Cela conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 2.2. - Un <u>demi-groupe solénoïdal</u> est un morphisme f de $\mathbb{H}$ dans un demi-groupe compact S , dont l'image est partout dense dans S . Si $g : \mathbb{H} \longrightarrow T$ est un deuxième demi-groupe solénoïdal, on appelle <u>morphisme de</u> f <u>dans</u> g un morphisme $\varphi : S \longrightarrow T$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & S \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbf{H} \arrow[r, "g"] & T \end{tikzcd}$$

commute.

On a donc bien défini la catégorie des demi-groupes solénoïdaux. C'est évidemment une généralisation de la catégorie des groupes solénoïdaux, qu'on peut définir en remplaçant ci-dessus $\mathbf{H}$ par $\mathbf{R}$, et "demi-groupe compact S " par "groupe compact G ".

La définition entraîne immédiatement le lemme suivant :

LEMME 2.3. - *Si* $f : \mathbf{H} \longrightarrow S$ *est un demi-groupe solénoïdal,* S *est abélien et possède un élément unité* $f(0)$. *S'il existe un morphisme de demi-groupes solénoïdaux* φ *de* f *dans* g, *alors* φ *est surjectif et unique.*

Le même résultat est valable pour les groupes solénoïdaux. La proposition suivante montre que la catégorie des groupes solénoïdaux est en effet canoniquement plongée dans la catégorie des demi-groupes solénoïdaux.

PROPOSITION 2.4. - *Si* $f : \mathbf{H} \longrightarrow G$ *est un demi-groupe solénoïdal et* G *un groupe, alors* f *possède une extension* $\overline{f} : \mathbf{R} \longrightarrow G$ *à un groupe solénoïdal. Si réciproquement* $f : \mathbf{R} \longrightarrow G$ *est un groupe solénoïdal, alors* $f|_{\mathbf{H}} : \mathbf{H} \longrightarrow G$ *est un demi-groupe solénoïdal.*

Démonstration. - Si $f : \mathbf{H} \longrightarrow G$ est un demi-groupe solénoïdal, on définit $\overline{f} : \mathbf{R} \longrightarrow G$ par

$$\overline{f}(r) = f(r) \text{ , et } \overline{f}(-r) = f(r)^{-1} \text{ pour tout } r \in \mathbf{H} .$$

On vérifie facilement que $\overline{f}$ est un morphisme dont l'image est partout dense dans G. La réciproque est démontrée par le lemme suivant, en prenant $h = 0$.

LEMME 2.5. - *Si* $f : \mathbf{R} \longrightarrow G$ *est un groupe solénoïdal,* $f([h , \infty))$ *est partout dense dans* G *pour tout* $h \in \mathbf{H}$.

Démonstration. - Soit $g \in G$. Le demi-groupe fermé $\Gamma(g) = \{g , g^2 , \ldots\}^-$ dans G est un demi-groupe compact abélien. Donc son idéal minimal M est un groupe. L'élément neutre de M, étant idempotent, est nécessairement égal à l'élément neutre 1 de G. Alors

$$1.\Gamma(g) \subset M\Gamma(g) \subset M \text{ entraîne } M = \Gamma(g) .$$

En particulier, $\Gamma(g)$ est un groupe et contient g^{-1}. Il s'ensuit que chaque sous-demi-groupe H fermé d'un groupe compact est lui-même un groupe, parce que, pour tout $g \in H$,

$$g^{-1} \in \Gamma(g) \subset H \quad .$$

Appliquons cela au sous-demi-groupe fermé $f([h , \infty))^{-}$ de G , qui est alors un groupe. Avec $f(s)$ pour $s \geqslant h$, il contient aussi $f(s)^{-1} = f(-s)$, donc

$$f(\mathbb{R}) \subset f([h , \infty))^{-} \quad ,$$

ce qui démontre le lemme.

Dans la théorie des groupes compacts, on connait bien le théorème suivant :

THÉORÈME 2.6. - *La catégorie des groupes solénoïdaux possède un objet initial*.

Autrement dit, il existe un groupe solénoïdal $\mathbf{a} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{A}$ tel que, pour tout groupe solénoïdal $f : \mathbb{R} \longrightarrow G$, il existe un morphisme et un seul $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow G$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\mathbf{a}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{A} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & G \end{tikzcd}$$

commute.

On démontre ce théorème en utilisant la dualité de Pontrjagin des groupes abéliens localement compacts. Le dual d'un groupe solénoïdal $f : \mathbb{R} \longrightarrow G$ est un monomorphisme $\hat{f}$ du groupe discret $\hat{G}$ dans $\mathbb{R}$. Evidemment, il existe un, et seulement un, homomorphisme $\hat{\varphi}$ de $\hat{G}$ dans $\mathbb{R}_d$, le groupe $\mathbb{R}$ avec la topologie discrète, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} & \mathbb{R}_d \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \\ \mathbb{R} \arrow[u, "\mathrm{id}"] & \hat{G} \arrow[l, "\hat{f}"'] \arrow[u, "\hat{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

commute. Si on traduit cela par dualité dans la catégorie des groupes solénoïdaux, on voit que $\widehat{\mathrm{id}} : \mathbb{R} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}_d}$ est un objet initial.

On va démontrer le théorème correspondant.

THÉORÈME 2.7. - *La catégorie des demi-groupes solénoïdaux possède un objet initial* $\sigma : \mathbb{H} \longrightarrow \Sigma$.

On dit aussi : Σ *est le demi-groupe solénoïdal universel*.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin d'une généralisation de la construction de l'exemple 2.1 :

Soit $f : \underset{\sim}{R} \longrightarrow G$ un groupe solénoïdal. Nous considérons dans $\underset{\sim}{H}^* \times G$ le sous-ensemble

$$S_f = \{(h , f(h)) \; ; \; h \in \underset{\sim}{H}\} \cup (\infty \times G) \quad .$$

S_f est un sous-demi-groupe fermé. Soit $\sigma_f : \underset{\sim}{H} \longrightarrow S_f$ défini par

$$\sigma_f(h) = (h , f(h)) \quad .$$

Evidemment, σ_f est un isomorphisme de $\underset{\sim}{H}$ sur son image.

LEMME 2.8. - $\sigma_f : \underset{\sim}{H} \longrightarrow S_f$ <u>est un demi-groupe solénoïdal</u>.

<u>Démonstration</u>. - Il faut démontrer que chaque élément (∞ , g) , $g \in G$, peut être approché par des éléments de la forme $(h , f(h))$. C'est le cas si, pour chaque $h \in \underset{\sim}{H}$ et chaque voisinage U de g dans G , il existe un $s \geqslant h$ tel que $f(h) \in U$. Mais cela est démontré par le lemme 2.5.

Soient maintenant $f : \underset{\sim}{H} \longrightarrow S$ un demi-groupe solénoïdal, M l'idéal minimal de S qui est un groupe, e l'élément neutre de ce groupe. Alors $g : S \longrightarrow M$, défini par $g(x) = ex$, est un morphisme, et

$$f' = g \circ f : \underset{\sim}{H} \longrightarrow M$$

est prolongeable à un groupe solénoïdal.

LEMME 2.9. - <u>Il existe un morphisme</u> $\varphi_1 : S_{f'} \longrightarrow S$ <u>tel que</u> $\varphi_1 \circ \sigma_{f'} = f$.

<u>Démonstration</u>. - On définit l'application $\varphi_1 : S_{f'} \longrightarrow S$ par

$$\varphi_1(h , f'(h)) = f(h) \quad \text{pour } h \in \underset{\sim}{H} \quad ,$$

$$\varphi_1(\infty , m) \quad = m \quad \text{pour } m \in M \quad ,$$

de façon que $\varphi_1 \circ \sigma_{f'} = f$ soit vrai. φ_1 restreint à chacun de ces deux domaines, est un morphisme. De plus, pour chaque $h \in \underset{\sim}{H}$ et $m \in M$,

$$\varphi_1(h , f'(h)) \, \varphi_1(\infty , m) = f(h)m = f(h)em = f'(h)m = \varphi_1(\infty , f'(h)m) \quad ,$$

c'est-à-dire que φ_1 est un homomorphisme de demi-groupes. Supposons que

$$(h , f'(h)) = (h , ef(h))$$

tende vers (∞ , m) pour un filtre $\mathfrak{F}$ sur $\underset{\sim}{H}^*$. Alors $f(h)$ tend vers $m' \in M$ pour un filtre $\mathfrak{F}'$ plus fin que $\mathfrak{F}$; donc $ef(h) = f'(h)$ tend vers $em' = m' = m$ pour le filtre $\mathfrak{F}'$. C'est vrai pour tout filtre $\mathfrak{F}'$ plus fin que $\mathfrak{F}$ tel que $f(h)$ soit convergent par rapport à $\mathfrak{F}'$. Donc

$$f(h) = \varphi_1(h\ ,\ f'(h)) \text{ tend vers } m = \varphi_1(\infty\ ,\ m)\quad ,$$

ce qui démontre la continuité de φ_1 .

LEMME 2.10. - Il existe un morphisme $\varphi_2 : \Sigma \longrightarrow S_{f'}$ tel que $\varphi_2 \circ \sigma = \sigma_{f'}$.

Démonstration. - Le demi-groupe solénoïdal $f' : \underset{\sim}{H} \longrightarrow M$ est prolongeable à un groupe solénoïdal $\overline{f'} : \underset{\sim}{R} \longrightarrow M$ d'après 2.4. D'après le théorème 2.6, il existe un morphisme $\psi : \underset{\sim}{A} \longrightarrow M$ tel que $\psi \circ \underset{\sim}{a} = \overline{f'}$. Alors

$$\mathrm{id} \times \psi : \underset{\sim}{H}^* \times \underset{\sim}{A} \longrightarrow \underset{\sim}{H}^* \times M$$

est un morphisme. Soit $\varphi_2 = (\mathrm{id} \times \psi)|_{\Sigma}$. L'image de φ_2 est $S_{f'}$ parce que, pour l'ensemble des $\sigma(h)$ partout dense dans Σ , on a

$$\varphi_2 \circ \sigma(h) = \varphi_2(h\ ,\ \underset{\sim}{a}(h)) = (h\ ,\ \psi \circ \underset{\sim}{a}(h)) = (h\ ,\ f'(h)) = \sigma_{f'}(h)\quad .$$

Maintenant la démonstration du théorème 2.7 est facile parce que, d'après 2.9 et 2.10, nous avons un morphisme $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 : \Sigma \longrightarrow S$ qui vérifie

$$\varphi \circ \sigma = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \sigma = \varphi_1 \circ \sigma_{f'} = f\quad ,$$

et qui est unique d'après 2.3.

Le lemme 2.9 donne en même temps la structure de tous les demi-groupes solénoïdaux : $\varphi_1 : S_{f'} \longrightarrow S$ induit un morphisme

$$\varphi_{\mathcal{H}} : S_{f'}/\mathcal{H} \longrightarrow S/\mathcal{H}\quad .$$

Donc $S/\mathcal{H}$ est isomorphe à $\underset{\sim}{H}^*_r$ pour un r de $\underset{\sim}{H}^*$, parce que $S_{f'}/\mathcal{H}$ est isomorphe à $\underset{\sim}{H}^*$. Il n'est pas difficile de voir que S est isomorphe au sous-demi-groupe

$$\{(h\ ,\ f'(h))\ ;\ h \in \underset{\sim}{H}^* \setminus [r\ ,\ \infty)\} \cup (\infty \times M)$$

de $\underset{\sim}{H}^*_r \times M$. On en tire que, pour chaque demi-groupe solénoïdal $f : \underset{\sim}{H} \longrightarrow S$, $S/\mathcal{H}$ est isomorphe à $\underset{\sim}{H}^*_r$ pour un $r \in \underset{\sim}{H}^*$.

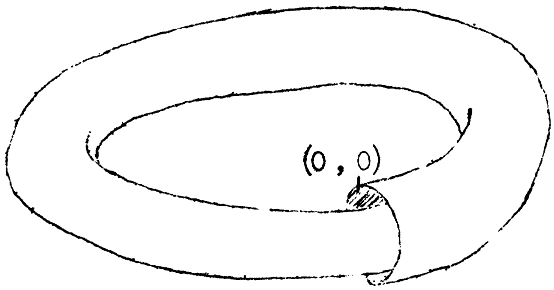
3. Demi-groupes cylindriques.

DÉFINITION 3.1. - On appelle demi-groupe cylindrique chaque demi-groupe compact S qui est image de $\Sigma \times G$ par un morphisme, où G est un groupe compact quelconque, Σ le demi-groupe **solénoïdal** universel du théorème 2.7.

On remarque que, dans $\Sigma \times G$, la relation $\mathcal{H}$ est compatible avec la multiplication, et $(\Sigma \times G)/\mathcal{H}$ est isomorphe à $\underset{\sim}{H}^*$. Pour un demi-groupe cylindrique S quelconque, la relation $\mathcal{H}$ est alors compatible avec la multiplication, et $S/\mathcal{H} = \underset{\sim}{H}^*_r$ pour un $r \in \underset{\sim}{H}^*$.

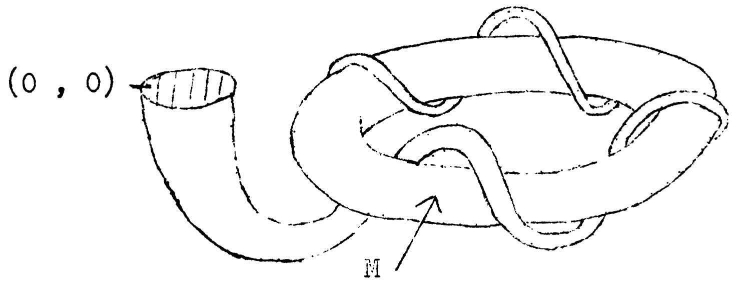
Pour chaque groupe compact G , $S = \mathbb{H}^{*} \times G$ est un demi-groupe cylindrique.

EXEMPLE 3.2. - Soit S_f le demi-groupe de l'exemple 2.1. Soit S le demi-groupe cylindrique $S_f \times \mathbb{T}$, où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. L'idéal minimal de S est un tore $\mathbb{T}^2$. Intuitivement, S est un tuyau isomorphe à $\mathbb{H} \times \mathbb{T}$ qui s'enroule autour de l'idéal minimal qui est un tore.



EXEMPLE 3.3. - Il est bien connu qu'il existe un demi-groupe solénoïdal

$$f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{T}^2 .$$



Dans le demi-groupe cylindrique $P = S_f \times \mathbb{T}$, nous appelons ρ la relation d'équivalence dont les classes se réduisent à un point au dehors de l'idéal minimal M , et sont égales à $(\infty , g) \times \mathbb{T}$ dans M . La relation ρ est fermée et compatible avec la multiplication. Alors $S = P/\rho$ est un demi-groupe cylindrique, dont l'idéal minimal est isomorphe au tore $\mathbb{T}^2$. Ce demi-groupe n'est pas isomorphe au demi-groupe de l'exemple 3.2.

On appelle demi-groupe à un paramètre, un morphisme $f : \mathbb{H} \longrightarrow S$.

PROPOSITION 3.4. - *Soient S un demi-groupe compact, G un sous-groupe fermé de S , $f : \mathbb{H} \longrightarrow S$ un demi-groupe à un paramètre tel que $f(0) \in G$ et $f(\mathbb{H}) \subset Z(G)$, le centralisateur de G ; alors il existe un morphisme, et un seul, $\varphi : \Sigma \times G \longrightarrow S$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "f"'] & \Sigma \times G \arrow[d, "\varphi"] & G \arrow[l, "\psi"'] \arrow[dl, "\text{injection}"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

où ψ est défini par $\psi(g) = ((0 , 0) , g)$ et F par $F(h) = (\sigma(h) , 1)$.

Démonstration. - Le morphisme $f : \mathbb{H} \longrightarrow f(\mathbb{H})^-$ est un demi-groupe solénoïdal. D'après le théorème 2.7, il existe un morphisme et un seul $\varphi_1 : \Sigma \longrightarrow f(\mathbb{H})^- \subset S$ tel que $\varphi_1 \circ \sigma = f$. Soit $\varphi : \Sigma \times G \longrightarrow S$ défini par $\varphi(x , g) = \varphi_1(x)g$, alors φ est une application continue. Le centralisateur

$$Z(G) = \{x \; ; \; x \in S \, , \; gx = xg \; \text{ pour tout } \; g \in G\}$$

est fermé et contient par suite, avec $f(\underset{\sim}{H})$, $f(\underset{\sim}{H})^- = \varphi_1(\Sigma)$. Donc φ est aussi un homomorphisme de demi-groupes. La commutativité du diagramme en résulte aussitôt.

Si, en particulier, S est abélien et $f : \underset{\sim}{H} \longrightarrow S$ un demi-groupe à un paramètre, alors il y a dans S un demi-groupe cylindrique image de $\Sigma \times H(f(0))$.

On a des théorèmes très forts sur l'existence des demi-groupes à un paramètre dans les demi-groupes compacts connexes, de sorte que les demi-groupes cylindriques sont les morceaux les plus importants d'un demi-groupe compact connexe [cf. HOFMANN-MOSTERT].

4. Demi-groupes C-solénoïdaux.

Si l'on regarde les groupes compacts où une image de $\underset{\sim}{R}^n$ est partout dense, on tombe encore sur les groupes solénoïdaux. Mais $\underset{\sim}{H}^2$ est partout dense dans $\underset{\sim}{H}^{*2}$, sans que $\underset{\sim}{H}^{*2}$ soit un demi-groupe solénoïdal. Donc la généralisation d'un demi-groupe solénoïdal à plusieurs dimensions est raisonnable. On peut procéder comme dans le § 2.

DÉFINITION 4.1. - Soit C un cône convexe fermé de $\underset{\sim}{R}^n$ possédant 0 comme sommet et ne contenant pas une droite entière. C est donc un sous-demi-groupe $\underset{\sim}{R}^n$. On appelle <u>demi-groupe C-solénoïdal</u> un morphisme f de C dans un demi-groupe compact S , dont l'image $f(C)$ est partout dense dans S . Si $g : C \longrightarrow T$ est un deuxième demi-groupe C-solénoïdal, on appelle <u>morphisme de</u> f <u>dans</u> g chaque morphisme $\varphi : S \longrightarrow T$ tel que $\varphi \circ f = g$. On a donc bien défini la catégorie des demi-groupes C-solénoïdaux.

LEMME 4.2. - <u>Si</u> $f : C \longrightarrow S$ <u>est un demi-groupe</u> <u>C-solénoïdal</u>, S <u>est abélien</u>. <u>S'il existe un morphisme de</u> f <u>dans</u> $g : C \longrightarrow T$, <u>alors ce morphisme</u> $\varphi : S \longrightarrow T$ <u>est surjectif et unique</u>.

Supposons dès maintenant que C est un <u>cône de type fini</u>, c'est-à-dire que C est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites Γ_i , $i = 1 , \dots , m$, commençant à l'origine.

Les demi-droites Γ_i sont isomorphes à $\underset{\sim}{H}$. Soit $f_i : \underset{\sim}{H} \longrightarrow \Gamma_i$ un isomorphisme. Alors

$$\bigoplus_{i=1}^{m} f_i : \underset{\sim}{H}^m \longrightarrow C$$

est un morphisme surjectif, qu'on peut étendre à une application linéaire de $\underset{\sim}{R}^m$ dans $\underset{\sim}{R}^n$. Si $f : C \longrightarrow S$ est un demi-groupe C-solénoïdal, alors

$$g_i = f \circ f_i \; : \; \underset{\approx}{H} \longrightarrow g_i(\underset{\approx}{H})^-$$

est un demi-groupe solénoïdal. D'après le théorème 2.7, il existe un morphisme $\overline{g}_i \; : \; \Sigma \longrightarrow S$ tel que $\overline{g}_i \circ \sigma = g_i$. Alors

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \overline{g}_i \; : \; \Sigma^m \longrightarrow S$$

est un morphisme tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \underset{\approx}{H}^m \arrow[r, "\sigma^m"] \arrow[d, "\oplus f_i"'] \arrow[dr, "\oplus g_i"] & \Sigma^m \arrow[d, "\oplus \overline{g}_i"] \\ C \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

Si les demi-droites Γ_i sont indépendantes dans $\underset{\approx}{R}^n$, alors $\bigoplus f_i$ est un isomorphisme. En tenant compte de 4.2, on a obtenu que $\sigma^m \; : \; \underset{\approx}{H}^m \longrightarrow \Sigma^m$ soit un objet initial dans la catégorie des demi-groupes $\underset{\approx}{H}^m$-solénoïdaux. Si C n'est pas isomorphe à $\underset{\approx}{H}^m$, alors $\sigma^m \; : \; \underset{\approx}{H}^m \longrightarrow \Sigma^m$ n'est pas un objet de la catégorie des demi-groupes C-solénoïdaux, qui est une sous-catégorie des demi-groupes $\underset{\approx}{H}^m$-solénoïdaux.

THÉORÈME 4.3. - <u>Si</u> C <u>est un cône de type fini</u>, <u>la catégorie des demi-groupes</u> <u>C-solénoïdaux possède un objet initial</u>.

<u>Démonstration</u>. - Regardons tous les demi-groupes $\underset{\approx}{H}^m$-solénoïdaux g qui se factorisent par un demi-groupe C-solénoïdal f . Puisque $\sigma^m \; : \; \underset{\approx}{H}^m \longrightarrow \Sigma^m$ est initial, il existe un morphisme, et un seul, $\varphi_g \; : \; \Sigma^m \longrightarrow S$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \underset{\approx}{H}^m \arrow[r, "\sigma^m"] \arrow[d] \arrow[dr, "g"'] & \Sigma^m \arrow[d, "\varphi_g"] \\ C \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

Soit ρ_g la relation d'équivalence fermée sur Σ^m associée au morphisme φ_g . Soit ρ l'intersection de tous les ρ_g ainsi obtenus. Alors ρ est encore une relation d'équivalence fermée sur Σ^m compatible avec la multiplication. Σ^m/ρ est un demi-groupe compact et, pour tout g , il existe un morphisme

$$\varphi'_g \; : \; \Sigma^m/\rho \longrightarrow S \quad \text{tel que} \quad \varphi_g = \varphi'_g \circ \rho^* \quad ,$$

où $\rho^* \; : \; \Sigma^m \longrightarrow \Sigma^m/\rho$ est l'application canonique. Il y a de plus un morphisme

$\gamma : C \longrightarrow \Sigma^m/\rho$ qui est un demi-groupe C-solénoïdal. D'après l'unicité de φ'_g (4.2), $\gamma : C \longrightarrow \Sigma^m/\rho$ est un demi-groupe C-solénoïdal initial.

On peut définir des demi-groupes C-cylindriques, au moins dans le cas où C est un cône de type fini. La proposition 3.4 peut être énoncée pour les demi-groupes C-cylindriques également.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HOFMANN (K. H.) and MOSTERT (P. S.). - Elements of compact semigroups (à paraître).