Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Monique Bertrand

Quelques résultats d'algèbre non associative

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, nº 2 (1965-1966), exp. nº 18, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_2_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et théorie des nombres)
19e année, 1965/66, n° 18

18 avril 1966

QUELQUES RÉSULTATS D'ALGÈBRE NON ASSOCIATIVE

par Mme Monique BERTRAND

1. Rappels.

On va étudier quelques propriétés concernant certaines algèbres non associatives définies sur un corps.

Etant donné un corps de base, noté F, une algèbre non associative A est alors :

- un anneau non associatif,
- un espace vectoriel sur F ;

pour tout x et tout y de A, pour tout α et tout β de F, on a :

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \ ; \qquad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \ ;$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \ ; \qquad \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \ .$$

On se borne aux algèbres de dimension finie, dont on rappelle la définition :

Il existe dans A, n éléments $e_1, \ldots, e_n$ formant une base, c'est-à-dire que :

- pour tout $x \in A$, il existe $\xi_1, \ldots, \xi_n \in F$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$;
- si $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$, l'égalité $x = y$ entraîne $\xi_i = \eta_i$ pour tout i.

D'autre part, les axiomes précédents entraînent l'existence d'éléments de F notés γ_{ijk} $(i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n, \ k = 1, \ldots, n)$ tels que

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} e_k \qquad \text{pour tout } i \text{ et tout } j \ .$$

C'est ce que l'on appelle la table de multiplication de A.

A tout x de A, on associe les transformations R_x et L_x ; ce sont les multiplications à droite et à gauche définies par x, avec, pour tout $y \in A$,

$$R_x(y) = yx \ ; \qquad L_x(y) = xy \ .$$

On rappelle alors les résultats suivants :

- Si l'algèbre A possède un élément unité, tout $x \in A$ est racine des équations caractéristiques des transformations R_x et L_x.

- Quelle que soit l'algèbre A définie sur F, il existe une équation à droite, unique, vérifiée par tout x de A, telle que son degré soit minimum ; son premier coefficient est 1, ses autres coefficients sont des polynômes en $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (composantes de x).

C'est l'équation minime à droite de x, ou équation principale à droite de A, ou équation au rang à droite de A ; son degré est le degré à droite de A.

En particulier, si A ne possède pas d'élément unité, le polynôme premier membre de l'équation au rang, n'a pas de terme constant.

Mêmes résultats à gauche.

2. Algèbre des transformations de A.

Soit donc une algèbre A ; on définit l'algèbre des transformations de A de la façon suivante :

On considère l'ensemble des polynômes $P[R_{x_1}, \ldots, R_{x_p}, L_{y_1}, \ldots, L_{y_q}]$, où les x_i et les y_j sont des éléments quelconques de A ; l'algèbre des transformations de A, notée $T(A)$, est l'algèbre engendrée par ces polynômes et la transformation identique I. $T(A)$ est alors une sous-algèbre de l'algèbre $M(A)$ des transformations linéaires sur A.

Si n est la dimension de A, cette algèbre $M(A)$ est de dimension n^2. $T(A)$ est donc de dimension finie inférieure ou égale à n^2, puisque c'est une sous-algèbre de $M(A)$.

On va s'intéresser à la dimension de l'algèbre associative $T(A)$, et pour cela se restreindre au cas où A est commutative, c'est-à-dire $R_x = L_x$ pour tout $x \in A$.

1° Si A est associative : pour tout $x, y \in A$, $R_x R_y = R_{xy}$; alors

$$R_{e_i} R_{e_j} = R_{e_i e_j} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} R_{e_k} \qquad \forall\ (i, j) \ ;$$

si donc r désigne le nombre des R_{e_i} linéairement indépendants. la dimension de $T(A)$ est $r + 1$.

On peut se demander si, réciproquement, la propriété $R_x R_y = R_z$, vraie pour tout $(x , y) \in A$, entraîne l'associativité de A : à ce sujet, A. ALBERT a démontré les résultats suivants :

- Une algèbre A , ayant un élément unité à gauche, est associative si, et seulement si, $R(A)$, espace vectoriel des multiplications à droite de A , est une algèbre.
- Soit A_0 une algèbre associative de dimension $n > 1$ sur un corps F infini ; on suppose que A_0 possède un élément unité ; $R(A_0)$ est alors une algèbre ; il existe alors une isotope non associative A de A_0 telle que $R(A_0) = R(A)$.

2° Si A n'est pas associative : la dimension de $T(A)$ est comprise entre $r + 1$ et n^2 . On va définir alors la notion de "grade" de $T(A)$.

3. Grade de $T(A)$.

Soit N la dimension de $T(A)$:

$$r + 1 \leqslant N \leqslant n^2 \quad .$$

- Si $N = r + 1$, on peut prendre pour base de $T(A)$: $I , R_{e_1} , \dots , R_{e_r}$.
- Si $N > r + 1$, on considère les éléments R_{ij} de $T(A)$ définis par :

$R_{ij} = R_{e_i} R_{e_j}$ pour tout couple i , j (de 1 à r). Les R_{ij} ne s'expriment pas tous en fonction de $(I , R_{e_1} , \dots , R_{e_r})$, sinon tous les éléments de $T(A)$ s'exprimeraient ainsi et la dimension N serait $r + 1$.

Il existe donc un nombre s d'éléments R_{ij} linéairement indépendants entre eux et indépendants des $(I , R_{e_1} , \dots , R_{e_r})$.

- Si $N = 1 + r + s$, on a trouvé une base de $T(A)$.
- Si $N > 1 + r + s$, on forme

$$R_{ijk} = R_{e_i} R_{e_j} R_{e_k} \qquad \text{pour tout } (i , j , k) \quad ,$$

et l'on procède de même.

Le nombre N étant fini, cette suite d'opérations s'arrête, et la base obtenue s'écrit :

$$I , \{R_{e_i}\} , \{R_{i_1 i_2}\} , \{R_{i_1 i_2 i_3}\} , \dots , \{R_{i_1 i_2 \dots i_q}\} \quad .$$

L'entier q , qui est le nombre maximum (ou ordre) de facteurs R_{e_i} formant les éléments de la base, est appelé le grade de $T(A)$. L'entier q ne dépend pas, en effet, de la base choisie ; car si pour une base (e_i) , on obtenait un entier q , et, pour une base (e'_i) , un entier $q' < q$, un élément de la première base de $T(A)$, soit $R_{e_1} \dots R_{e_q}$, s'exprimerait linéairement en fonction d'éléments tels que

$$R_{b_{i_1}} \dots R_{b_{i_s}} \qquad \text{avec} \quad s \leqslant q' ,$$

donc en fonction d'éléments tels que

$$R_{e_{i_1}} \dots R_{e_{i_s}} \qquad \text{avec} \quad s \leqslant q' < q ,$$

ce qui est impossible. Donc, $q' = q$.

<u>Condition nécessaire et suffisante pour que</u> $T(A)$ <u>ait pour grade</u> q : dire que $T(A)$ a pour grade q , c'est dire que tout élément de la forme $R_{e_{i_1}} \dots R_{e_{i_{q+1}}}$ est combinaison linéaire d'éléments de la forme I , $R_{e_{i_1}} \dots R_{e_{i_p}}$, avec $p \leqslant q$:

$$R_{e_{i_1}} \dots R_{e_{i_{q+1}}} = F[I , R_{e_i} , R_{e_{i_1}} R_{e_{i_2}} , \dots , R_{e_{i_1}} \dots R_{e_{i_q}}] .$$

Quel que soit l'élément e_k , on aura :

$$R_{e_{i_1}} \dots R_{e_{i_{q+1}}} (e_k) = F[e_k , R_{e_i}(e_k) , \dots , R_{e_{i_1}} \dots R_{e_{i_q}} (e_k)] .$$

Rappelons d'autre part que l'altitude d'un produit non associatif est le nombre de "générations" donnant naissance au produit : ainsi l'altitude de $[(ab)c]d$ est 3 , et celle de $(ab)(cd)$ est 2 .

Il en résulte la condition suivante :

Pour que $T(A)$ soit de grade q au plus, il faut et il suffit que tous les produits d'éléments de la base de A , d'ordre $q + 2$ et d'altitude $q + 1$, s'expriment linéairement en fonction des produits d'ordre inférieur, et cela de manière compatible : c'est-à-dire que, dans l'expression

$$[[(e_k)e_{i_{q+1}}]e_{i_q} \dots]e_{i_1} = \{[[e_k , e_k e_i , \dots , (e_k)e_{i_q}] \dots]e_{i_1}\}$$

en remplaçant e_k par tous les éléments de la base de A , on obtient toutes les autres expressions du système.

L'introduction de cette notion a été suggérée par des problèmes d'algèbre génétique. En effet, étant donnée une population à laquelle on fait subir un nombre quelconque de croisements successifs, on sait alors qu'il suffit de lui faire subir au plus q croisements successifs pour connaître le résultat. On va maintenant appliquer ces notions à l'étude de quelques algèbres non associatives particulières, que l'on rencontre en génétique.

4. "Special train algebras".

Ces algèbres ont été introduites par I. M. H. ETHERINGTON. On va voir que, dans certains cas, le grade de telles algèbres se déduit du degré de l'équation au rang.

Tout d'abord, une algèbre A est dite pondérée sur F s'il existe un homomorphisme $\omega : A \longrightarrow F$, qui soit un homomorphisme d'algèbre non singulier. Si N est le noyau de ω, $A - N$ est de dimension 1. Une algèbre pondérée commutative est dite "special train algebra" lorsque :

- N est nilpotent d'altitude α : tous les produits d'altitude α sont nuls.
- N, N^1, ..., N^k, $N^{\alpha-1}$ [N^k = (ensemble des combinaisons linéaires de produits d'altitude k)] sont des idéaux.

On démontre alors que, dans une telle algèbre, il existe une base :

$$e , u_1 , \dots , u_{n-1}$$

telle que

$$x = \xi e + \sum_1^{n-1} \eta_i u_i \qquad \text{avec} \quad \xi = \omega(x) \quad ;$$

$e^2 = e + (u_i)$, combinaison linéaire des u_i ;
$eu_i = (u_i , u_{i+1} , \dots , u_{n-1})$ pour tout i ;
$u_i u_j = (u_{j+1} , u_{j+2} , \dots , u_{n-1})$ pour tout (i , j), avec $i \leqslant j$.

GONSHOR a alors étudié l'existence d'idempotents dans de telles algèbres : elles possèdent en général un idempotent non nul, unique sous certaines conditions.

Nous nous plaçons dans ce cas : la base est alors donnée par :

$$e^2 = e \ ; \qquad eu_i = (u_i , u_{i+1} , \dots , u_{n-1}) \quad ,$$

$$u_i u_j = (u_{j+1} , u_{j+2} , \dots , u_{n-1}) \quad .$$

Nous allons donner les résultats relatifs à de telles algèbres quand le noyau est nilpotent d'altitude 1, et nilpotent d'altitude 2.

1° Noyau nilpotent d'altitude 1. - Alors $e^2 = e$, $u_i u_j = 0$, $\forall\, i , j$.

$$eu_i = \lambda_i u_i + \sum_{i+1}^{n-1} \beta_{ik} u_k \quad .$$

On forme l'équation au rang de A :

$$x^{k+1} + \delta_1 x^k + \dots + \delta_k x = 0 \qquad 1 \leqslant k < n \quad ,$$

ou encore, avec des racines éventuellement complexes :

$$x(x - \xi)(x - \rho_1 \xi) \dots (x - \rho_{k-1} \xi) = 0 \quad \text{avec} \quad x = \xi e + \sum_{i=1}^{n} \eta_i u_i \text{ , où } \xi = \omega(x) \, .$$

(a) <u>$k = 1$</u> . - $x(x - \xi) = 0$. Alors, comme

$$x^2 - \xi x = \xi \sum_{1}^{n-1} \eta_i (2eu_i - u_i) \quad ,$$

nécessairement

$$eu_i = \frac{1}{2} u_i$$

(en supposant que F a une caractéristique différente de 2).

On voit alors que dans $T(A)$:

$$R_e R_e = -\frac{1}{2} I + \frac{3}{2} R_e \quad ,$$

$$R_e R_{u_i} = \frac{1}{2} R_{u_i} \qquad \text{pour tout } i \quad ,$$

$$R_{u_i} R_e = R_{u_i} \qquad \text{pour tout } i \quad ,$$

$$R_{u_i} R_{u_j} = 0 \qquad \text{pour tout } (i , j) \quad .$$

Le grade de $T(A)$ est donc 1 .

On peut voir d'autre part que R_x , qui vérifie son équation caractéristique, de degré n , vérifie l'équation de degré 2 :

$$R_x^2 = \frac{3}{2} \xi R_x - \frac{\xi^2}{2} I \quad .$$

De plus, tout élément T de $T(A)$, qui s'écrit $T = \alpha I + R_x$, vérifie l'équation :

$$T^2 - (2\alpha + \frac{3}{2} \xi) T + (\alpha^2 + \frac{\xi^2}{2} + \frac{3}{2} \xi\alpha) I = 0 \quad .$$

(b) <u>$k = 2$</u> . - $x(x - \xi)(x - \rho\xi) = 0$, ρ est réel. Alors,

$$x^2 - \xi x = \xi \sum_1^{n-1} \eta_i (2eu_i - u_i) \quad ,$$

$$x(x^2 - \xi x) = \xi^2 \sum_1^{n-1} \eta_i [2(eu_i)e - eu_i] \quad .$$

D'où :

$$x(x - \xi)(x - \rho\xi) = \xi^2 \sum_1^{n-1} \eta_i [2(eu_i)e - (2\rho + 1)eu_i + \rho u_i] \quad .$$

Donc, dire que l'équation au rang est de degré 3, c'est dire que :

$$2(eu_i)e - (2\rho + 1)eu_i + \rho u_i = 0 \qquad \text{pour tout } i \quad .$$

On peut voir alors que :

$$R_e\, R_e\, R_e = (\tfrac{3}{2} + \rho)R_e\, R_e - (\tfrac{3\rho}{2} + \tfrac{1}{2})R_e + \tfrac{\rho}{2}\, I \ ,$$
$$R_{u_i}\, R_e = R_{u_i} \ ,$$
$$R_{u_i}\, R_e\, R_e = R_{u_i} \ ,$$
$$R_e\, R_{u_i}\, R_e = R_e\, R_{u_i} \ ,$$
$$R_e\, R_e\, R_{u_i} = -\tfrac{\rho}{2}\, R_{u_i} + (\rho + \tfrac{1}{2})R_e\, R_{u_i} \ ,$$
$$R_{u_i}\, R_{u_j} = 0 \ .$$

La base est donc contenue dans

$$I \ , \ R_e \ , \ R_{u_i} \ , \ R_e\, R_e \ , \ R_e\, R_{u_i} \quad .$$

Le grade est donc 2 au plus.

Ici encore, R_x vérifie une équation du 3e degré :

$$R_x^3 - \xi(\tfrac{3}{2} + \rho)R_x^2 + \xi^2(\tfrac{3\rho}{2} + \tfrac{1}{2})R_x - \xi^3\, \tfrac{\rho}{2}\, I = 0 \quad .$$

(c) Cas général. – L'équation au rang, de degré $k + 1$, s'écrit :

$$x(x - \xi)(x - \rho_1\, \xi) \ \ldots \ (x - \rho_{k-1}\, \xi) = 0 \quad ,$$

ce qui équivaut à la relation :

$$R_e^k(u_i) = a_1\, R_e^{k-1}(u_i) + \ldots + a_k\, u_i \qquad \text{pour tout } i \quad .$$

Les racines de l'équation :

$$x^k = a_1\, x^{k-1} + \ldots + a_k \ ,$$

sont les λ_i , ce qui prouve que les λ_i distincts sont au nombre de k au plus. D'autre part, on voit facilement par récurrence que ces racines sont :

$$\rho_1 , \rho_2 , \dots , \rho_{k-1} , \frac{1}{2} ;$$

ce qui prouve en même temps que les racines de l'équation au rang sont réelles, puisque ce sont les λ_i .

On va prouver que le grade est k au plus, c'est-à-dire que la base est contenue dans :

$$I , R_e , R_e^2 , \dots , R_e^k ,$$

$$R_{u_i} , R_e R_{u_i} , \dots , R_e^{k-1} R_{u_i} ,$$

(on a toujours $R_{u_i} R_e = R_{u_i}$).

Montrons tout d'abord que :

$$R_e^{k+1} = \beta_k I + \beta_{k-1} R_e + \dots + \beta_0 R_e^k ;$$

c'est-à-dire qu'il existe $\beta_0 , \dots , \beta_k$ tels que :

$$\begin{cases} \beta_0 + \dots + \beta_k = 1 \\ R_e^{k+1}(u_i) = \beta_k u_i + \dots + \beta_0 R_e^k(u_i) \end{cases} ,$$

ou encore, en remplaçant $R_e^k(u_i)$ par sa valeur :

$$\begin{cases} \beta_k + \beta_0 a_k = a_1 a_k \\ \dots \\ \beta_j + \beta_0 a_j = a_1 a_j + a_{j+1} \\ \dots \\ \beta_1 + \beta_0 a_1 = a_1^2 + a_2 \\ \beta_k + \dots + \beta_0 = 1 \end{cases} .$$

En ajoutant membre à membre les k premières égalités, et en utilisant la dernière :

$$\beta_0 \left(\sum_1^k a_i - 1 \right) = (1 + a_1) \left(\sum_1^k a_i - 1 \right) .$$

- Si $\sum_1^k a_i \neq 1$.

$$\beta_0 = 1 + a_1$$
$$\beta_1 = a_2 - a_1$$
$$\cdots$$
$$\beta_j = a_{j+1} - a_j$$
$$\cdots$$
$$\beta_{k-1} = a_k - a_{k-1}$$
$$\beta_k = - a_k \quad .$$

Donc, si 1 n'est pas racine de l'équation dont les coefficients sont les a_i :

$$R_e^{k+1} = - a_k I + (a_k - a_{k-1})R_e + \dots + (a_{j+1} - a_j)R_e^{k-j} + \dots + (1 + a_1)R_e^k \quad .$$

- Si $\sum_1^k a_i = 1$.

Cette condition est nécessaire et suffisante pour que R_e^k s'exprime en fonction des R_e^j , $j < k$: on a alors

$$R_e^k = a_k I + a_{k-1} R_e + \dots + a_1 R_e^{k-1} \quad .$$

D'autre part, on voit facilement que

$$R_e^k R_{u_i} = a_k R_{u_i} + \dots + a_1 R_e^{k-1} R_{u_i} \quad .$$

Le grade est donc k au plus.

On peut voir encore que R_x vérifie une équation de degré $k + 1$. On pose :

$$R_x = \xi R_e + \sum_1^{n-1} \eta_i R_{u_i} \quad ,$$

on calcule R_x^p de $p = 1$ à $p = k$, et par identification, l'on trouve :

$$R_x^{k+1} = - \xi^{k+1} a_k I + \dots + \xi^{p+1}(a_{p+1} - a_p)R_x^{k-p} + \dots + \xi(1 + a_1)R_x^k \quad .$$

2° <u>Noyau nilpotent d'altitude</u> 2 . – La base s'écrit alors :

$$e\ ,\ u_i\ ,\ \omega_j\ , \quad \text{avec} \quad N = (u_i\ ,\ \omega_j)\ ,$$

$$e^2 = e\ ;\quad u_i\ u_k = (\omega_j)\ ;\quad \omega_j\ \omega_k = 0\ ,$$

$$eu_i = (u_i\ ,\ \omega_j)\ ;\quad e\omega_j = (\omega_j)\ ;\quad u_i\ \omega_j = 0\ .$$

Alors,

$$N = (u_i\ ,\ \omega_j)\ ;\quad N^1 = (\omega_j)\ ;\quad N^2 = (0)\ .$$

On pose :

$$x = \xi e + \sum_1^m \delta_i\ u_i + \sum_{m+1}^{n-1} \eta_k\ \omega_k\ .$$

(a) <u>$k = 2$</u> .

$$x(x - \xi)(x - \rho\xi) = 0\ ,$$
$$x^2 = \xi^2\ e + 2\xi \sum \delta_i\ eu_i + 2\xi \sum \eta_k\ e\omega_k + \sum \delta_i\ \delta_j\ u_i\ u_j\ ,$$
$$x^2 - \xi x = \xi \sum \delta_i(2eu_i - u_i) + \xi \sum \eta_k(2e\omega_k - \omega_k) + \sum \delta_i\ \delta_j\ u_i\ u_j\ ,$$
$$x(x^2 - \xi x) = \xi^2 \sum \delta_i[2(eu_i)e - eu_i] + \xi^2 \sum \eta_k[2(e\omega_k)e - e\omega_k]$$
$$+ \sum \xi\ \delta_i\ \delta_j\ e(u_i\ u_j) + \xi \sum \delta_i\ \delta_j[2(eu_i)u_j - u_i\ u_j]\ .$$

D'où, $x(x - \xi)(x - \rho\xi) = 0$ équivaut à

$$\sum \delta_i\ \xi^2[2(eu_i)e - (2\rho + 1)eu_i + \rho u_i] + \sum \eta_i\ \xi^2[2(e\omega_i)e - (2\rho + 1)e\omega_i + \rho\omega_i]$$
$$+ \sum \delta_i\ \delta_j\ \xi[2(eu_i)u_j + (u_i\ u_j)e - (\rho + 1)u_i\ u_j] = 0\ .$$

Cette identité doit être vraie pour tout η_i et tout δ_j ; on voit alors qu'elle est équivalente au système :

$$\begin{cases} 2(eu_i)u_j + (u_i\ u_j)e - (\rho + 1)u_i\ u_j = 0 \\ 2(eu_i)e - (2\rho + 1)eu_i + \rho u_i = 0 \\ 2(e\omega_i)e - (2\rho + 1)e\omega_i + \rho\omega_i = 0\ . \end{cases}$$

Ce système de 3 relations ne permet pas de conclure ; mais on voit d'autre part que, si l'on écrit :

$$u_i\ u_j = \sum \lambda_{ijk}\ \omega_k\ ,$$
$$(u_i\ u_j)e = \sum \lambda_{ijk}\ e\omega_k\ ,$$
$$[(u_i\ u_j)e]e = \sum \lambda_{ijk}(e\omega_k)e\ .$$

Or $(e\omega_k)e = (\rho + \frac{1}{2})e\omega_k - \frac{\rho}{2}\,\omega_k$, d'où :

$$[(u_i\, u_j)e]e - (\rho + \tfrac{1}{2})(u_i\, u_j)e + \tfrac{\rho}{2}\, u_i\, u_j = 0 \quad ,$$

relation que l'on adjoint aux 3 précédentes. On voit alors que les produits d'ordre 4 s'expriment en fonction des produits d'ordre inférieur, et cependant, les relations ne vérifient pas la condition de compatibilité. Il faut donc considérer des produits d'ordre plus élevé.

Le calcul montre que la base est contenue dans :

$$\begin{array}{l} I \;,\; R_e \;,\; R_{u_i} \;, \\ R_e\, R_e \;,\; R_e\, R_{u_i} \;,\; R_{u_i}\, R_e \;,\; R_e\, R_{\omega_j} \;,\; R_{u_i}\, R_{u_j} \;, \\ R_e\, R_{u_i}\, R_e \;,\; R_{u_i}\, R_e\, R_{u_j} \;. \end{array}$$

Le grade est alors 3 au plus.

(b) <u>$k = 3$</u> . – $x(x - \xi)(x - \rho\xi)(x - \sigma\xi) = 0$. Comme précédemment, on obtient:

$$\begin{aligned} &\sum \delta_i\, \xi^3\Big[2[(eu_i)e]e - (2\rho + 1 + 2\sigma)(eu_i)e + (2\rho\sigma + \sigma + \rho)eu_i - \sigma\rho u_i\Big] \\ &+ \sum \eta_i\, \xi^3\Big[2[(e\omega_i)e]e - (2\sigma + 2\rho + 1)(e\omega_i)e + (2\rho\sigma + \sigma + \rho)e\omega_i - \sigma\rho\omega_i\Big] \\ &+ \sum \delta_i\, \delta_j\, \xi^2\Big[2[(eu_i)u_j]e + 2[(eu_i)e]u_j + [(u_i\, u_j)e]e \\ &\qquad - (\rho + \sigma + 1)(u_i\, u_j)e - (2\rho + 2\sigma + 1)(eu_i)u_j + (\rho\sigma + \sigma + \rho)u_i\, u_j\Big] = 0 \;. \end{aligned}$$

D'où, comme au cas précédent, 3 relations.

Mais, de plus : $u_i\, u_j = \sum \lambda_{ijk}\, \omega_k$, d'où :

$$[[(u_i\, u_j)e]e]e = \{[(u_i\, u_j)e]e \;,\; (u_i\, u_j)e \;,\; u_i\, u_j\} \;.$$

D'autre part : $eu_i = \sum \lambda_{ik}\, u_k + \sum u_{ik}\, \omega_k$, d'où :

$$(eu_i)u_j = \sum \lambda_{ik}\, u_k\, u_j \quad ,$$

$$[(eu_i)u_j]e = \sum \lambda_{ik}(u_k\, u_j)e \quad .$$

Et en utilisant la relation précédente :

$$[[[(eu_i)u_j]e]e]e = \{[[(eu_i)u_j]e]e \;;\; [(eu_i)u_j]e \;;\; (eu_i)u_j\} \;.$$

D'où le système de relations :

$[(e\omega_i)e]e = [(e\omega_i)e \; ; \; e\omega_i \; ; \; \omega_i]$,
$[(eu_i)e]e = [(eu_i)e \; ; \; eu_i \; ; \; u_i]$,
$[[(u_i \; u_j)e]e]e = [[(u_i \; u_j)e]e \; ; \; (u_i \; u_j)e \; ; \; u_i \; u_j]$,
$[[[(eu_i)u_j]e]e]e = [[[(eu_i)u_j]e]e \; ; \; [(eu_i)u_j]e \; ; \; (eu_i)u_j]$,
$[(eu_i)e]u_j = [[(eu_i)u_j]e \; ; \; (eu_i)u_j \; ; \; [(u_i \; u_j)e]e \; ; \; (u_i \; u_j)e \; ; \; u_i \; u_j]$.

Le calcul montre que le grade est 5 .

(c) Cas général. - De même que plus haut, l'identification donne 3 relations :

$$R_e^k(u_i) = a_1 \; R_e^{k-1}(u_i) + \dots + a_k \, u_i \quad ,$$

$$R_e^k(\omega_i) = a_1 \; R_e^{k-1}(\omega_i) + \dots + a_k \, \omega_i \quad ,$$

et une autre relation liant les K autres produits d'ordre $k+1$ à ceux d'ordre inférieur.

De plus :

$u_i \; u_j = \sum \lambda_{ik} \, \omega_k$, d'où :

$$R_e^k(u_i \; u_j) = a_1 \; R_e^{k-1}(u_i \; u_j) + \dots + a_k \, u_i \, u_j \quad .$$

$eu_i = \sum \lambda_{ik} \, u_k + \sum u_{ik} \, \omega_k$, $(eu_i)u_j = \sum \lambda_{ik} \, u_k \, u_j$:

$$R_e^k[(eu_i)u_j] = a_1 \; R_e^{k-1}[(eu_i)u_j] + \dots + a_k(eu_i)u_j \quad .$$

$[(eu_i)e]u_j = \sum \lambda_{ik}(eu_k)u_j$. D'où l'expression de

$$R_e^k[[(eu_i)e]u_j] \quad ,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$R_e^k[R_{u_j} \; R_e^{k-2}(u_i)]$$

qui s'exprime de même.

D'où le système de relations :

$$\begin{aligned}
&R_e^k(u_i) = a_1 \; R_e^{k-1}(u_i) + \dots + a_k \, u_i \; , \\
&R_e^k(\omega_i) = a_1 \; R_e^{k-1}(\omega_i) + \dots + a_k \, \omega_i \; , \\
&R_e^k(u_i \; u_j) = a_1 \; R_e^{k-1}(u_i \; u_j) + \dots + a_k \, u_i \, u_j \; , \\
&R_e^k[(eu_i)u_j] = a_1 \; R_e^{k-1}[(eu_i)u_j] + \dots + a_k(eu_i)u_j \; , \\
&\dots \\
&R_e^k[R_{u_j} \; R_e^p(u_i)] = a_1 \; R_e^{k-1}[R_{u_j} \; R_e^p(u_i)] + \dots + a_k \, R_{u_j} \; R_e^p(u_i) \; , \\
&\dots \\
&R_e^k[R_{u_j} \; R_e^{k-2}(u_i)] = a_1 \; R_e^{k-1}[R_{u_j} \; R_e^{k-2}(u_i)] + \dots + a_k \, R_{u_j} \; R_e^{k-2}(u_i) \quad ,
\end{aligned}$$

et la 3e relation, exprimant $R_{u_j} R_e^{k-1}(u_i)$.

Considérons les produits d'ordre $2k$. Ce sont :

$$R_e^{2k-1}(u_i) \; ; \; R_e^{2k-1}(\omega_i) \; ; \; R_e^{2k-2}(u_i\, u_j) \; ; \; R_e^{2k-3} R_{u_j} R_e(u_i) \; ; \; \ldots \; ;$$
$$R_e^{2k-2-p} R_{u_j} R_e^p(u_i) \; ; \; \ldots \; ; \; R_e^{k-1} R_{u_j} R_e^{k-1}(u_i) \quad ,$$

tous donnés par les relations du tableau, et

$$R_e^{k-2} R_{u_j} R_e^k(u_i) \; ; \; \ldots \; ; \; R_e^p R_{u_j} R_e^{2k-2-p}(u_i) \; ; \; \ldots \; ; \; R_{u_j} R_e^{2k-2}(u_i) \quad ,$$

où $R_e^k(u_i)$ peut être remplacé par sa valeur. Tous les produits d'ordre $2k$ s'expriment en fonction des produits d'ordre inférieur, cependant la condition de compatibilité n'est pas remplie. Le calcul montre que le grade est en fait de $2k - 1$.

Lorsque le noyau est d'altitude quelconque, les calculs deviennent compliqués.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALBERT (Adrian A.). - Non associative algebras, Annals of Math., Series 2, t. 43, 1942, p. 685-707.

[2] BERTRAND (Monique). - Algèbres non associatives et applications à la génétique, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 16e année, 1962/63, n° 18, 18 p.

[3] BERTRAND (Monique). - Combinaisons non associatives, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 16e année, 1962/63, n° 19, 9 p.

[4] ETHERINGTON (I. M. H.). - Special train algebras, Quart. J. of Math., Oxford Series, t. 12, 1941, p. 1-8.

[5] GONSHOR (H.). - Special train algebras arising in genetics, Proc. Edinburgh math. Soc., Series 2, t. 12, 1960/61, p. 41-53.