Michèle Ferrandon

Ultraproduits et anneaux primitifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, nº 2 (1965-1966), exp. nº 16, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_2_A3_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
19e année, 1965/66, n° 16

28 mars 1966

ULTRAPRODUITS ET ANNEAUX PRIMITIFS

par Michèle FERRANDON

1. Filtres et ultrafiltres.

On rappelle que, étant donné un ensemble I, on appelle filtre sur I, une famille $\mathfrak{F}$ de sous-ensembles de I, non vide, vérifiant les propriétés suivantes :

1° $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,

2° $\forall S_1, S_2 \in \mathfrak{F} \implies S_1 \cap S_2 \in \mathfrak{F}$,

3° $\forall S \in \mathfrak{F}$, et $\forall T$ tel que $S \subseteq T$, alors $T \in \mathfrak{F}$.

L'ensemble des filtres sur I est ordonné par inclusion, et inductif. Un filtre maximal est appelé un ultrafiltre.

PROPRIÉTÉ. - Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{F}$ soit un ultrafiltre est que $\forall T \subseteq I$, T ou $I - T \in \mathfrak{F}$.

On appelle base de filtre sur I, une famille $\mathfrak{B}$ de parties de I, non vide, vérifiant les propriétés suivantes :

1° $\emptyset \notin \mathfrak{B}$,

2° $\forall S_1, S_2 \in \mathfrak{B}$, $\exists S_3 \in \mathfrak{B}$ tel que $S_3 \subseteq S_1 \cap S_2$.

Etant donnée une base de filtre $\mathfrak{B}$, l'ensemble des parties de I contenant un élément de $\mathfrak{B}$ est un filtre (c'est le plus petit filtre contenant $\mathfrak{B}$).

2. Ultraproduits.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles indexés par un ensemble I. On considère $A = (\prod A_i)_{i\in I}$, leur produit. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur I. La relation

$$a \equiv b \text{ modulo } \mathfrak{F} \iff \{i \mid a_i = b_i\} \in \mathfrak{F}$$

est une relation d'équivalence.

Si $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre, l'ensemble quotient $\mathfrak{A} = A/\mathfrak{F}$ est appelé un ultraproduit (ou ultrapuissance, si tous les A_i sont identiques).

PROPOSITION 1. - Si les ensembles A_i sont des anneaux, et si $\mathfrak{F}$ est un filtre sur I, $A/\mathfrak{F}$ est un anneau.

Soit $S(a) = \{i \mid a_i \neq 0\}$ le support de a dans A :

$$O(a) = I - S(a) = \{i \mid a_i = 0\} .$$

$L = \{a \mid a \equiv 0 \quad (\mathfrak{F})\}$ est un idéal bilatère dans A ,

$$a \in L \iff O(a) \in \mathfrak{F} .$$

- $a , b \in L \iff O(a) , O(b) \in \mathfrak{F}$,

$$O(a - b) \supseteq O(a) \cap O(-b) = O(a) \cap O(b) \implies a - b \in L ;$$

- $a \in L , \quad b \in A$:

$$O(ab) \supseteq O(a) , \qquad O(ba) \supseteq O(a) , \qquad ab , ba \in L .$$

Donc $A/\mathfrak{F} = A/L$.

Dans toute la suite, $\mathfrak{F}$ désignera un ultrafiltre sur I .

3. Conservation de certaines propriétés dans les ultraproduits.

Remarque. - Soit une propriété P , vérifiée par tous les A_i , et telle que $\mathfrak{A}$ vérifie P . En fait, il suffit que l'ensemble d'indices des anneaux qui vérifient P appartienne à $\mathfrak{F}$.

$$J = \{i \mid A_i \text{ vérifie } P\} \qquad J \in \mathfrak{F} ,$$

$$\mathfrak{F}' = \{S \mid S \subseteq J , \quad S \in \mathfrak{F}\} ;$$

$\mathfrak{F}'$ est un ultrafiltre sur J .

$$A = (\Pi A_i)_{i \in I} \qquad A' = (\Pi A_i)_{i \in J} .$$

Il existe une injection canonique de A' dans A :

$$\mathfrak{A} = A/\mathfrak{F} \qquad \mathfrak{A}' = A'/\mathfrak{F}' .$$

Soit $a \in A$, $a = (a_i)_{i \in I}$; on lui fait correspondre

$$a' \in A' , \qquad a' = (a'_i)_{i \in J} , \quad a'_i = a_i .$$

On voit que, si $a \equiv b \quad (\mathfrak{F})$, alors $a' \equiv b' \quad (\mathfrak{F}')$. On a ainsi une application de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}'$, qui est un isomorphisme.

On notera $\hat{a}$ l'image dans $\mathfrak{A}$ d'un élément a de A par la surjection canonique $A \longrightarrow \mathfrak{A}$.

PROPOSITION 2. - Un ultraproduit de corps est un corps.

$$\hat{a} \in \mathfrak{A} , \quad \hat{a} \neq 0 . \qquad \text{Ceci équivaut à} \quad S(a) \in \mathfrak{F} .$$

Soit $b \in A$ tel que :

- si $i \in S(a)$, $b_i = a_i^{-1}$;
- si $i \notin S(a)$, $b_i = 0$.

$$O(ab - 1) = O(ba - 1) = S(a) \in \mathfrak{F} ,$$

$$\hat{a}\hat{b} = \hat{b}\hat{a} = 1 .$$

On montre de même qu'un ultraproduit d'anneaux premiers (respectivement sans diviseurs de 0) est un anneau premier (respectivement sans diviseurs de 0).

PROPOSITION 3. - Si tous les A_i sont des corps ordonnés, $\mathfrak{A}$ est un corps ordonné.

Soit $\omega(a , b) = \{i \mid a_i \leqslant b_i\}$. Supposons $a \equiv a'$ $(\mathfrak{F})$, $b \equiv b'$ $(\mathfrak{F})$, $\omega(a , b) \in \mathfrak{F}$. Alors :

$$\omega(a , b) \cap O(a - a') \cap O(b - b') \subseteq \omega(a' , b') \in \mathfrak{F} .$$

On pose

$$\hat{a} \leqslant \hat{b} \iff \omega(a , b) \in \mathfrak{F} .$$

On a bien une relation d'ordre :

- réflexivité : $\omega(a , a) = I \in \mathfrak{F}$;
- anti-symétrie : $\omega(a , b) \cap \omega(b , a) \subseteq O(a - b) \in \mathfrak{F}$;
- transitivité : $\omega(a , b) \cap \omega(b , c) \subseteq \omega(a , c) \in \mathfrak{F}$.

On vérifie facilement que l'on a une structure de corps ordonnés.

Remarque. - Si, sur chaque A_i , la relation d'ordre est totale, il en est de même de $\mathfrak{A}$.

PROPOSITION 4. - Si tous los A_i sont des corps commutatifs algébriquement clos, il en est de même de $\mathfrak{A}$.

PROPOSITION 5. - Un ultraproduit d'espace vectoriel est un espace vectoriel.

Soit V_i un espace vectoriel à droite sur un corps K_i . On considère les ultraproduits :

$$\mathcal{V} = (\Pi\, V_i)/\mathfrak{F} , \qquad \mathcal{K} = (\Pi\, K_i)/\mathfrak{F} .$$

$\mathcal{V}$ est un groupe commutatif sur lequel on fait opérer $\mathcal{K}$ de la manière suivante :

$$\hat{v} \in \mathcal{V} , \quad \hat{k} \in \mathcal{K} , \qquad \hat{v}.\hat{k} = \widehat{(v_i\, k_i)_{i \in I}} .$$

Cette définition est indépendante des éléments v et k appartenant aux classes $\hat{v}$ et $\hat{k}$, et donne une structure d'espace vectoriel.

Remarque. - Si $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre contenant une partie finie de I, alors :

$$\mathfrak{F} = \{S \mid S \subseteq I , i_0 \in S\} ,$$

i_0 étant un élément fixe de I.

Alors $\mathfrak{A} \simeq A_{i_0}$ au moyen de la bijection qui à $\hat{a}$ fait correspondre a_{i_0}.

4. Application aux anneaux primitifs.

DÉFINITION. - Un anneau A est primitif s'il existe un A-module simple et fidèle V.

Le commutant de A sur V, $\mathfrak{L}_A(V)$ est un corps K, et A est un sous-anneau dense de l'anneau $\mathfrak{L}_K(V)$.

THÉORÈME. - Un ultraproduit d'anneaux primitifs est un anneau primitif.

Soient A_i primitif, V_i un A_i-module simple et fidèle :

$$\mathcal{V} = (\Pi\, V_i)/\mathfrak{F} , \qquad \mathfrak{A} = (\Pi\, A_i)/\mathfrak{F} .$$

$\mathcal{V}$ est un $\mathfrak{A}$-module au moyen de $\hat{a}.\hat{v} = \widehat{(a_i\, v_i)}$:

C'est un $\mathfrak{A}$-module simple. Soient $\hat{y}$, $\hat{x} \in \mathcal{V}$,

$$\hat{x} \neq 0 \iff S(x) \in \mathfrak{F} .$$

- Si $i \in S(x)$, $\exists\, a_i \in A_i$ tel que $y_i = a_i\, x_i$;
- si $i \in O(x)$, posons :

$$a_i = 0 , \quad a = (a_i)_{i \in I} , \quad O(y - ax) \supseteq S(x) \in \mathfrak{F} ,$$

$$\hat{y} = \hat{a}.\hat{x} .$$

C'est un $\mathfrak{A}$-module fidèle.

$$\hat{a} \neq 0 \iff S(a) \in \mathfrak{F} .$$

- Si $i \in S(a)$, $\exists\, x_i \in V_i$ tel que $a_i\, x_i \neq 0$;
- si $i \notin S(a)$, posons :

$$x_i = 0 , \quad x = (x_i)_{i \in I} , \quad S(ax) = S(x) \in \mathfrak{F} ,$$

$$\hat{a}.\hat{x} \neq 0 .$$

Le commutant de $\mathfrak{A}$ sur $\mathcal{V}$ est isomorphe à l'ultraproduit des commutants.

$$\mathcal{K} = (\Pi\ K_i)/\mathfrak{F} \ , \qquad \mathcal{L}_A(\mathcal{V}) = \Delta \ .$$

Soit $\hat{k} \in \mathcal{K}$; $k = (k_i)_{i\in I}$.

L'application qui à $\hat{x} \in \mathcal{V}$ fait correspondre $\widehat{(x_i\ k_i)_{i\in I}} \in \mathcal{V}$ est un élément δ de Δ .

$\hat{k} \longrightarrow \delta$ est un homomorphisme de $\mathcal{K}$ dans Δ ; il est surjectif.

Soit $\delta \in \Delta$. $\mathcal{V}$ étant un $\mathfrak{A}$-module simple, δ est déterminé par l'image d'un élément non nul de $\mathcal{V}$, $\hat{x}$:

$$\hat{x}.\delta = \hat{y} \ .$$

Soit $J = \{i \mid \exists\ a_i \in A_i\ ,\ a_i\ x_i = 0\ ,\ a_i\ y_i \neq 0\}$. Supposons que $J \in \mathfrak{F}$.

Soit $a \in A$, $a = (a_i)_{i\in I}$, défini par :

- si $i \notin J$, $a_i = 0$,
- si $i \in J$, $a_i\ x_i = 0$, $a_i\ y_i \neq 0$.

$$I = O(ax) \ , \qquad \hat{a}.\hat{x} = 0 \ ,$$
$$J \subseteq S(ay) \ , \qquad \hat{a}.\hat{y} \neq 0 \ ;$$

mais $\hat{y} = \hat{x}.\delta$ exige que si $\hat{a}.\hat{x} = 0$, on ait $\hat{a}.\hat{y} = 0$. Donc :

$$J \notin \mathfrak{F} \iff I - J \in \mathfrak{F}\ , \quad \text{pour } i \in I - J \ .$$

L'application $x_i \longrightarrow y_i$ définit un A_i-endomorphisme de V_i , $k_i \in K_i$.

Pour $i \in J$, posons $k_i = 0$,

$$k = (k_i)_{i\in I}\ , \qquad y' = (x_i\ k_i)_{i\in I}\ , \qquad \hat{y}' = \hat{y} \ .$$

δ est l'image de $\hat{k}$ dans l'homomorphisme précédent qui est un isomorphisme.

Soit C_i le centre de K_i , et soit Γ le centre de $\mathcal{K}_i$:

$$\Gamma \simeq \mathcal{C} = \Pi\ C_i/\mathfrak{F} \ .$$

$\mathcal{C}$ peut être considéré comme un sous-corps de Γ , au moyen de l'application :

$$\overline{(c_i)} \in \Pi\ C_i/\mathfrak{F} \longrightarrow \widehat{(c_i)} \in \Pi\ K_i/\mathfrak{F} \ .$$

Montrons que $\mathcal{C} = \Gamma$.

Soit $\hat{\gamma} \in \Gamma$, $\gamma = (\gamma_i)_{i\in I}$, $\gamma_i \in K_i$. Soit $J = \{i \mid \gamma_i \notin C_i\}$.

Supposons que $J \in \mathfrak{F}$:

- si $i \in J$, $\exists\, k_i \in K_i$: $k_i \gamma_i - \gamma_i k_i \neq 0$,
- si $i \notin J$, soit $k_i = 0$;

$$k = (k_i)_{i \in I} , \qquad S(k\gamma - \gamma k) = J \in \mathfrak{F} .$$

$\hat{k}.\hat{\gamma} - \hat{\gamma}.\hat{k} \neq 0$ est en contradiction avec le fait que $\hat{\gamma} \in \Gamma$. Donc, $J \in \mathfrak{F}$.

$$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}' , \ \gamma_i' = 0 \qquad \text{si } i \in I ,$$
$$\gamma_i' = \gamma_i \qquad \text{si } i \notin I , \ \hat{\gamma} \in \mathcal{C} .$$

PROPOSITION 6. - <u>Posons</u> :

$$S_n = \{i \mid (V_i : K_i) = n\} , \quad n = 1 , 2 , \dots , \quad S_n \in \mathfrak{F} \iff (\mathcal{V} : \mathcal{K}) = n .$$

<u>Remarque</u>. - Si $n \neq p$, $S_n \cap S_p = \emptyset$, donc il y a au plus un S_n qui appartient à $\mathfrak{F}$.

Supposons que $S_n \in \mathfrak{F}$:

- si $i \in S_n$, soit $e_i^1 , \dots , e_i^n$ une base de V_i sur K_i ;
- si $i \notin S_n$, posons $e_i^j = 0$, $j = 1 , \dots , n$,

$$e^j \in V , \quad e^j = (e_i^j)_{i \in I} , \quad j = 1 , \dots , n .$$

Les éléments $\widehat{e^j}$ sont linéairement indépendants sur $\mathcal{K}$: Soient $\widehat{\lambda^j} \in \mathcal{K}$, tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{e^j}\, \widehat{\lambda^j} = 0 \iff J = \{i \mid \sum_{i=1}^{n} e_i^j \lambda_i^j = 0\} \in \mathfrak{F} , \quad J \cap S_n \in \mathfrak{F} .$$

Pour $i \in J \cap S_n$,

$$\lambda_i^j = 0 , \quad j = 1 , \dots , n , \quad O(\lambda_i^j) \in \mathfrak{F} , \quad \widehat{\lambda^i} = 0 .$$

Les éléments $\widehat{e^j}$ sont des générateurs de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{K}$: Soit $\hat{x} \in \mathcal{V}$;

- pour $i \in S_n$, $x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j e_i^j$;
- pour $i \notin S_n$, posons :

$$\lambda_i^j = 0 , \quad \lambda^j = (\lambda_i^j)_{i \in I} , \quad O(x - \sum_{j=1}^{n} \lambda^j e^j) \supseteq S_n ,$$

donc

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^{n} \widehat{e^j}\, \widehat{\lambda^j} .$$

Réciproquement, on suppose que $(\mathcal{V} : \mathcal{K}) = n$.

Supposons qu'il existe un entier p tel que

$$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_p \in \mathfrak{F} , \qquad S_1 \cup \dots \cup S_{p-1} \notin \mathfrak{F} ,$$

donc $I - (S_1 \cup \dots \cup S_{p-1}) \in \mathfrak{F}$, ce qui entraîne

$$(S_1 \cup \dots \cup S_p) \cap [I - (S_1 \cup \dots \cup S_{p-1})] = S_p \in \mathfrak{F} ,$$

et la partie précédente montre que $p = n$, $S_n \in \mathfrak{F}$.

Supposons donc que

$$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n \notin \mathfrak{F} \Longrightarrow I - (S_1 \cup \dots \cup S_n) = J \in \mathfrak{F} .$$

Pour $i \in J$, $(V_i : K_i) > n$, donc $\exists\; n+1$ vecteurs linéairement indépendants sur K_i , $e_i^1 , \dots , e_i^{n+1}$.

Pour $i \notin J$, posons $e_i^1 = \dots = e_i^{n+1} = 0$.

Soient $e^j = (e_i^j)_{i \in I}$, $j = 1 , \dots , n+1$; les éléments $\widehat{e^j}$ sont linéairement indépendants sur $\mathcal{K}$, or $(\mathcal{V} : \mathcal{K}) = n$, ce qui est en contradiction.

PROPOSITION 7. - Soit $T_n = \{ i \mid (K_i : C_i) = n^2 \}$, $n = 1 , 2 , \dots$ Alors :

$$T_n \in \mathfrak{F} \Longleftrightarrow (\mathcal{K} : \mathcal{C}) = n^2 .$$

La démonstration est analogue à la précédente.

THÉORÈME. - Soit B un anneau premier, sous-anneau d'un produit complet ΠA_i . Alors, il existe un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ tel que B soit injecté dans $\Pi A_i / \mathfrak{F}$.

$\mathfrak{B} = \{ S(a) \}_{a \in B - \{0\}}$ est une base de filtre.

- $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ et $\emptyset \notin \mathfrak{B}$.

- Soient a et $c \in B$, a et $c \neq 0$. B étant premier, $\exists\; x \in B$ tel que $axc \neq 0$ et $S(axc) \subseteq S(a) \cap S(c)$.

Soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre contenant $\mathfrak{B}$. L'application canonique de A dans $\mathfrak{A}$, restreinte à B , est une injection :

Soit $a \in B$, $a \neq 0$: cela équivaut à $S(a) \in \mathfrak{F}$, et par conséquent

$$\hat{a} \neq 0 .$$

COROLLAIRE 1. - Soit B un anneau premier, sous-anneau d'un produit direct d'anneaux de matrices d'ordre $\leqslant n$, à coefficients dans des corps ; alors il existe une injection de B dans un anneau de matrices d'ordre $\leqslant n$, à coefficients dans un corps.

En effet,

$$S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n = I \in \mathfrak{F} \quad ,$$

donc $\exists\, m \leqslant n$ tel que $S_m \in \mathfrak{F}$.

COROLLAIRE 2. - Soit B un anneau premier, sous-anneau d'un produit direct d'algèbres quasi-simples de dimension $\leqslant n^2$ sur leur centre. Alors, il existe une injection de B dans une algèbre quasi-simple de dimension $\leqslant n^2$ sur son centre.

Soit A_i une algèbre quasi-simple. Son centre C_i est un corps, et $(A_i : C_i)$ étant fini, A_i est un anneau de matrices à coefficients dans un corps K_i dont le centre est C_i :

$$(A_i : C_i) = (A_i : K_i)(K_i : C_i) \leqslant n^2 \quad ,$$

$$(A_i : K_i) = (V_i : K_i)^2 \quad ,$$

donc $(V_i : K_i) \leqslant n$.

Il existe m et p tels que T_m et S_p $\in \mathfrak{F}$:

$$(\mathcal{K} : \mathcal{C}) = m^2 \qquad (\mathcal{V} : \mathcal{K}) = p \quad ;$$

or $\mathcal{A}$ est quasi-simple, donc $\mathcal{C}$ est le centre de $\mathcal{A}$:

$$(\mathcal{A} : \mathcal{C}) = (\mathcal{A} : \mathcal{K})(\mathcal{K} : \mathcal{C}) = p^2\, m^2 \quad .$$

$T_m \cap S_p \in \mathfrak{F}$, donc $\exists\, i$ tel que $(V_i : K_i) = p$, $(K_i : C_i) = m^2$, ce qui entraîne $p^2\, m^2 \leqslant n^2$ et $(\mathcal{A} : \mathcal{C}) \leqslant n^2$.

THÉORÈME. - Soit B un anneau sans diviseur de 0 , sous-anneau d'un produit direct de corps. Alors il existe une injection de B dans un corps.

Si de plus B est un sous-anneau d'un produit de corps ordonné, alors il existe une injection de B dans un corps ordonné.

Application. - Toute algèbre associative libre peut être injectée dans un corps.

Soit T une algèbre associative libre sur un corps Γ commutatif, et soit D un corps qui est une algèbre sur Γ et de dimension infinie sur son centre.

Soit $I = \{i\}$, l'ensemble de tous les homomorphismes d'algèbre de T dans D : on a une application de T dans D^I au moyen de l'application :

$$a \in T \longrightarrow a_i = i(a) \quad .$$

Cette application est un homomorphisme d'algèbre, et est injective.

$$(a_i)_{i\in I} = 0 \iff i(a) = 0 \ , \quad \forall\, i \in I \ ,$$

ce qui veut dire que a est appliquée en 0 par tout homomorphisme de T dans D, et si $a \neq 0$, cela signifie que D vérifie une identité polynomiale, ce qui ne peut avoir lieu que si D est de dimension finie sur son centre.

On peut montrer qu'il existe un corps qui soit une algèbre sur Γ de dimension infinie sur son centre.

Soit $x_1 , x_2 , \ldots , x_n , \ldots$ une suite dénombrable d'indéterminées. Soit $\Gamma(x) = E$, le corps de fractions de l'anneau de polynômes $\Gamma[x_1 , \ldots , x_n , \ldots]$.

On a, dans E, l'application définie symboliquement par $\sum_{i=1}^{\infty} x_{i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$, en posant $x_0 = 1$. Cette application est une dérivation : $a \longrightarrow a'$.

On considère l'anneau $E[X]$ des polynômes en X, la multiplication étant définie par la relation : $Xa = aX + a'$.

L'anneau $E[X]$ est un anneau euclidien, et donc un anneau principal à gauche et à droite. Il est intègre, donc il admet un corps de fractions, Q, et Q est de dimension infinie sur son centre : les éléments x_i, $i > 0$, n'appartiennent pas au centre, car $X.x_i = x_i.X + x_{i-1}$. Les éléments $x_0 , x_1 , \ldots , x_n , \ldots$ sont linéairement indépendants sur le centre de Q. Sinon il existe q_i appartenant au centre de Q, $q_n \neq 0$, tel que $\sum_{i=0}^{n} q_i\, x_i = 0$, et nous choisissons n minimal, $X.q_i = q_i.X$. Donc,

$$0 = X\Big(\sum_{i=0}^{n} q_i\, x_i\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} q_i\, x_i\Big)X + \sum_{i=1}^{n} q_i\, x_{i-1} = \sum_{i=0}^{n} q_{i+1}\, x_i \ ,$$

ce qui est une relation de dépendance, avec seulement n termes, ce qui est impossible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMITZUR (S. A.). - Generalized polynomials identities and pivotal monomials, Trans. Amer. math. Soc., t. 114, 1965, p. 210-226.

[2] JACOBSON (Nathan). - Structure of rings. - Providence, American mathematical Society, 1964 (American mathematical Society, Colloquium Publications, 37).

[3] KÖCHEN (Simon). - Ultraproducts in the theory of models, Annals of Math., t. 74, 1961, p. 221-261.