Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Gérard Lallement

Représentations des demi-groupes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1965-1966), exp. n° 12, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_2_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
19e année, 1965/66, n° 12

28 février 1966

REPRÉSENTATIONS DES DEMI-GROUPES

par Gérard LALLEMENT

Dans [4], G. B. PRESTON a démontré que, pour un demi-groupe régulier D, si M (resp. M^*) désigne la somme directe des représentations de Schützenberger (resp. des anti-représentations) de D, par des matrices monomiales sur un groupe avec zéro, $M \oplus M^*$ est une représentation fidèle. Lorsque D est un demi-groupe inverse, c'est-à-dire un demi-groupe régulier dont les idempotents commutent, M et M^* sont fidèles séparément (Pour ces résultats et la terminologie, cf. [2], § 3.6). Par ailleurs, on sait que tout demi-groupe inverse a une représentation fidèle par des transformations partielles "injectives" sur un ensemble ([2], théorème 1.20). L'examen de la démonstration de ce dernier résultat montre que les représentations par des transformations partielles et les représentations M, évoquées plus haut, présentent certaines analogies. Le but de cet exposé est de préciser ces analogies et de montrer comment on peut obtenir un théorème de représentation des demi-groupes réguliers par des transformations partielles, qui soit comparable au résultat utilisant $M \oplus M^*$.

<u>Notations</u>. - Nous utilisons dans la suite un demi-groupe D et un ensemble abstrait Ω ; les applications de source D (ou une partie de D) sont notées comme opérateurs à gauche sur D, et les applications (ou les relations binaires) dont la source est Ω sont notées comme opérateurs à droite sur Ω. Si x est une relation binaire entre Ω et Ω', pour tout $\alpha \in \Omega$,

$$\alpha x = \{\alpha' \ ; \ \alpha' \in \Omega' \ ; \ (\alpha , \alpha') \in x\} \ .$$

1. Représentations complètes d'un demi-groupe quelconque.

Le demi-groupe des transformations partielles (nous dirons brièvement "transformations") sur un ensemble Ω est le sous-demi-groupe $\mathfrak{T}_\Omega$ du demi-groupe $\mathfrak{B}_\Omega$ des relations binaires sur Ω, défini par :

$$x \in \mathfrak{T}_\Omega \iff x \in \mathfrak{B}_\Omega$$

et, $\forall\ \alpha , \beta , \gamma \in \Omega$:

$$(\alpha , \beta) \in x \text{ et } (\alpha , \gamma) \in x \implies \beta = \gamma \ .$$

Une représentation d'un demi-groupe D quelconque par des transformations sur Ω

est un homomorphisme de D dans $\mathcal{T}_\Omega$. De telles représentations ont été étudiées, notamment par E. J. TULLY [9], B. M. ŠAJN [5, 6], H. J. HOEHNKE [3].

Définitions. - Une représentation complète (ou bi-représentation) $\Phi = (P , Q)_\Omega$ d'un demi-groupe D par des transformations sur un ensemble Ω est un homomorphisme Φ de D dans le produit cartésien $\mathcal{T}_\Omega \times \mathcal{T}_\Omega^*$ où $\mathcal{T}_\Omega^*$ est le demi-groupe dual [1] de $\mathcal{T}_\Omega$.

Exemples :

(a) Si P est une représentation quelconque, Q_1 l'anti-représentation unité (pour tout $x \in D$, $Q_1(x)$ est l'application identité sur Ω) , $\Phi = (P , Q_1)$ est une représentation complète. Une étude catégorique permet de considérer que Φ n'est pas distincte de la représentation P .

(b) Soient D un demi-groupe et ρ une congruence sur D dont l'une des classes est un idéal I . Indexons les ρ-classes K de D , distinctes de I , par un ensemble d'indices Ω . On pose :

$$(\alpha , \beta) \in P(x) \iff K_\alpha x \subseteq K_\beta \quad \text{et} \quad (\alpha , \beta) \in Q(x) \iff xK_\alpha \subseteq K_\beta$$

pour tout $\alpha , \beta \in \Omega$.

(c) Soit M un (A , A)-bimodule sur un anneau A . En posant

$$\alpha P(x) = \alpha x \quad \text{et} \quad \alpha Q(x) = x\alpha \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in M \quad \text{et} \quad x \in A \quad ,$$

on définit une représentation complète de A par des applications sur M .

Deux représentations P , P' d'un même demi-groupe D par des transformations sur Ω et Ω' respectivement sont dites équivalentes s'il existe une bijection φ de Ω sur Ω' et un isomorphisme [2] θ de $P(D)$ sur $P'(D)$ tel que, pour tout $\alpha \in \Omega$ et pour tout $x \in D$:

$$\alpha P(x).\varphi = \alpha\varphi.\theta[P(x)] \quad .$$

On définit de même des anti-représentations équivalentes.

Deux représentations complètes $\Phi = (P , Q)_\Omega$ et $\Phi' = (P' , Q')_{\Omega'}$ sont dites équivalentes si P , P' et Q , Q' sont respectivement équivalentes par la même bijection φ de Ω sur Ω' . Lorsque P , P' sont équivalentes par une bijection φ et Q , Q' équivalentes par une bijection ψ , on dit que Φ et Φ' sont équi-

---

(1) Le dual d'un demi-groupe $D = (D , .)$ est le demi-groupe $D^* = (D , \star)$ où $x \star y = y.x$ pour tout $x , y \in D$.

(2) Il suffit, en fait, d'affirmer que $\theta[P(x)] = \varphi^{-1}.P(x).\varphi$ définit une application de $P(D)$ sur $P'(D)$; que θ (unique) soit un isomorphisme, résulte de la bijectivité de φ .

valentes au sens large. La notion d'équivalence permet par exemple, de remplacer deux représentations complètes Φ_1 et Φ_2 relatives à des ensembles Ω_1 et Ω_2 tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, par des représentations équivalentes relatives à des ensembles disjoints (ou inversement).

Pour une représentation P_Ω de D, la relation binaire transitive $\tau_P = \bigcup_{x \in D} P(x)$ est appelée relation de transitivité de P_Ω ; si $\tau_P = \Omega \times \Omega$, P_Ω est dite transitive. Pour une représentation complète $\Phi = (P , Q)_\Omega$, nous appelons relation de transitivité, la relation transitive τ_Φ engendrée par τ_P et τ_Q (i. e. τ_Φ est la fermeture transitive de τ_P et τ_Q). Φ est dite <u>cyclique</u> s'il existe un élément $\alpha \in \Omega$ tel que $\Omega = \alpha \cup \alpha\tau_\Phi$. Φ est dite <u>bitransitive</u> si $\tau_\Phi = \Omega \times \Omega$.

Soit $\Phi_i = (P , Q)_{\Omega_i}$, $(i \in I)$, une famille de représentations complètes d'un demi-groupe D par des transformations sur des ensembles Ω_i disjoints deux à deux et soit $\Omega = \bigcup \Omega_i$. On pose :

$$(\alpha , \beta) \in P(x) \text{ et } (\alpha , \gamma) \in P(x) \iff \exists\, i \in I \text{ tel que } \alpha , \beta , \gamma \in \Omega_i \text{ et } \alpha P_{\Omega_i}(x) = \beta \text{ et } \alpha Q_{\Omega_i}(x) = \gamma$$

$$(\alpha , \beta) \in P(x) \text{ et } \alpha Q(x) = \emptyset \iff \exists\, i \in I \text{ tel que } (\alpha , \beta) \in \Omega_i \text{ et } \alpha P_{\Omega_i}(x) = \beta \text{ et } \alpha Q_{\Omega_i}(x) = \emptyset$$

$$\alpha P(x) = \emptyset \text{ et } \alpha Q(x) = \gamma \iff \exists\, i \in I \text{ tel que } (\alpha , \gamma) \in \Omega_i \text{ et } \alpha P_{\Omega_i}(x) = \emptyset \text{ et } \alpha Q_{\Omega_i}(x) = \gamma .$$

Lorsque $x \longrightarrow \Phi(x) = [P(x) , Q(x)]$ définit une représentation complète, on dit que la famille Φ_i est sommable et a pour somme Φ. Inversement, si $\Phi = (P , Q)_\Omega$ est une représentation complète, et s'il existe une partition de Ω en sous-ensembles Ω_i tels que $(P , Q)_\Omega$ soit somme des représentations $(P, Q)_{\Omega_i}$, on dit que $(P , Q)_\Omega$ est décomposable en somme, et on écrit

$$(P , Q)_\Omega = \bigcup (P , Q)_{\Omega_i} .$$

THÉORÈME 1.1. - <u>Toute représentation complète</u> $\Phi = (P , Q)_\Omega$ <u>d'un demi-groupe</u> D <u>est décomposable en somme de représentations complètes cycliques</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soient $\rho_P = (\tau_P \cap \tau_P^{-1}) \cup \varepsilon$ et $\rho_Q = (\tau_Q \cap \tau_Q^{-1}) \cup \varepsilon$ où ε est l'égalité sur Ω ; ρ_P et ρ_Q sont des équivalences. Posons $\Delta(P , Q) = \rho_P \vee \rho_Q$ ($\vee$ est le sup dans le treillis des équivalences sur Ω), et soit $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ un système de représentants de $\Delta(P , Q)$. On prend

$$\Omega_i = \alpha_i \cup \alpha_i\, \tau_\Phi \ , \quad P_i(x) = P(x) \cap [\Omega_i \times \Omega_i] \ , \quad Q_i(x) = Q(x) \cap [\Omega_i \times \Omega_i] \ .$$

En utilisant la définition, on voit que

$$(P , Q)_\Omega = \bigcup_{i \in I} (P_i , Q_i)_{\Omega_i} \ .$$

Pour montrer que chaque $(P , Q)_{\Omega_i}$ est une représentation cyclique, on a :

$$\tau_{P_i} = \bigcup_{x \in D} P_i(x) = (\bigcup_{x \in D} P(x)) \cap [\Omega_i \times \Omega_i] = \tau_P \cap [\Omega_i \times \Omega_i] \ .$$

De même pour τ_{Q_i} , d'où

$$\tau_{\Phi_i} \subseteq \tau_\Phi \cap [\Omega_i \times \Omega_i] \ ,$$

Φ_i désignant $(P_i , Q_i)_{\Omega_i}$.

Si τ est une relation transitive sur Ω_i contenant τ_{P_i} et τ_{Q_i} , et si

$$(\alpha , \beta) \in \tau_\Phi \cap [\Omega_i \times \Omega_i] \ ,$$

il existe $\gamma_1 , \dots , \gamma_n \in \Omega$ tels que $\alpha = \gamma_1$, $\beta = \gamma_n$ et pour $i = 1 , \dots , n-1$,

$$(\gamma_i , \gamma_{i+1}) \in \tau_P \cup \tau_Q \ .$$

Comme $\alpha \in \Omega_i$, tous les γ_i sont dans Ω_i ; d'où $(\gamma_i , \gamma_{i+1}) \in \tau_{P_i} \cup \tau_{Q_i} \subseteq \tau$, et par transitivité de τ , $(\alpha , \beta) \in \tau$. Il en résulte

$$\tau_{\Phi_i} = \tau_\Phi \cap [\Omega_i \times \Omega_i] \ .$$

Par ailleurs, si $(\alpha_i , \beta) \in \tau_\Phi$, $\beta \in \Omega_i$, d'où $(\alpha_i , \beta) \in \tau_{\Phi_i}$. En définitive

$$\alpha_i\, \tau_\Phi = \alpha_i\, \tau_{\Phi_i} \quad \text{et} \quad \Omega_i = \alpha_i \cup \alpha_i\, \tau_{\Phi_i} \ .$$

Remarque. - Une représentation complète Φ est dite effective, si les projections de τ_Φ recouvrent Ω . Toute représentation complète est la somme d'une représentation effective et d'une représentation nulle. Si l'on convient d'identifier toutes les représentations nulles, le résultat précédent s'énonce : Toute représentation complète est somme d'une représentation nulle et de représentations cycliques effectives. Signalons en passant que la décomposition précédente n'est pas unique en général.

2. Représentations commutantes, symétriques, bitransitives (c. s. b.).

L'expression de la relation de transitivité τ_Φ , d'une représentation complète Φ , se simplifie en introduisant :

DÉFINITION 2.1. - Une représentation complète est appelée représentation commutante si, pour tout x, $y \in D$,

$$P(x)\ Q(y) = Q(y)\ P(x) \quad .$$

La notion de représentation commutante est invariante par équivalence, mais non par équivalence au sens large. Il est immédiat de constater qu'une somme de représentations est commutante si et seulement si chaque composante l'est ; toute représentation commutante est donc somme de représentations commutantes cycliques. Une seconde simplification dans les modalités du théorème 1.1 s'introduit par :

DÉFINITION 2.2. - Une représentation $\Phi = (P , Q)_\Omega$ est dite symétrique si

$$\tau_P = \tau_P^{-1} \ \underline{\text{et}}\ \tau_Q = \tau_Q^{-1} \quad .$$

THÉORÈME 2.3. - Toute représentation commutante symétrique est décomposable avec unicité [3], en somme d'une représentation complète nulle et de représentations commutantes symétriques bitransitives.

Démonstration. - D'après le théorème 1.2,

$$\Phi = \bigcup_{i\in I} (P_i , Q_i)_{\Omega_i} = \bigcup_{i\in I} \Phi_i \quad \text{avec} \quad \Omega_i = \alpha_i \cup \alpha_i\ \tau_{\Phi_i} \quad .$$

Supposons que Φ_i ne soit pas nulle. Dans ce cas $\tau_{\Phi_i} = \Omega_i \times \Omega_i$. En effet, soient β_1, $\beta_2 \in \Omega_i$; il existe u_1, $v_1 \in D^1$ ($D^1 = D \cup \{1\}$, ou D si D a un élément unité), et il existe u_2, $v_2 \in D^1$, tels que

$$\alpha P_i(u_1)\ Q_i(v_1) = \beta_1 \quad \text{et} \quad \alpha P_i(u_2)\ Q_i(v_2) = \beta_2$$

($P_i(1)$ ou $Q_i(1)$ est l'identité sur Ω_i).

- Si $u_1 = v_1 = 1$, par exemple, on a $\beta_1 = \alpha$. Comme τ_{Φ_i} n'est pas nulle, il existe $x \in D$ et $\beta \in \Omega_i$ tels que $\alpha P_i(x) = \beta$; τ_{P_i} étant symétrique, il existe $x' \in D$ tel que $\alpha P_i(xx') = \alpha$. Donc si β_1 ou $\beta_2 = \alpha$, $(\beta_1 , \beta_2) \in \tau_{\Phi_i}$.

- si u_1 ou $v_1 \neq 1$ et u_2 ou $v_2 \neq 1$, il existe u_1' et $v_1' \in D^1$ ($u_1' = 1$ s. s. i. $u_1 = 1$ et $v_1' = 1$ s. s. i. $v_1 = 1$), tels que $\beta_1\ Q_i(v_1')\ P_i(u_1') = \alpha$.

$$\text{Donc} \quad \beta_1\ Q_i(v_1')\ P_i(u_1')\ P_i(u_1)\ Q_i(v_1) = \beta_1\ P_i(u_1'\ u_1)\ Q_i(v_1\ v_1') = \beta_2 \quad .$$

Il en résulte $(\beta_1 , \beta_2) \in \tau_{\Phi_i}$ (compte-tenu des possibilités d'égalité à 1 des arguments de P_i et Q_i).

---

[3] Sous réserve d'identifier les représentations complètes nulles.

<u>Unicité</u> : Soient $\Phi = (P\ ,\ Q)_\Omega$ une représentation commutante symétrique et

$$\Phi = (P_0\ ,\ Q_0)_{\Omega_0} \cup \left[\bigcup_{i\in I} (P_i\ ,\ Q_i)_{\Omega_i}\right]$$

une décomposition de Φ en représentation nulle $(P_0\ ,\ Q_0)_{\Omega_0}$ et représentations c. s. b. Montrons que $\Omega_i = \alpha\Delta(P\ ,\ Q)$ pour tout $\alpha \in \Omega_i$ et pour $i \neq 0$ (il en résultera que la décomposition envisagée coïncide avec celle du théorème 1.1, d'où l'unicité). Si $\beta \in \alpha\Delta(P\ ,\ Q)$, on a $\alpha P(x)\ Q(y) = \beta$. D'après la définition de la somme, $\alpha P(x) \in \Omega_i$ et aussi $\alpha P(x)\ Q(y) = \beta$. Inversement, si $\beta \in \Omega_i$, $(P_i\ Q_i)_{\Omega_i}$ étant bitransitive, il existe x et $y \in D$ tels que $\alpha P_i(x)\ Q_i(y) = \beta$, d'où

$$\alpha P(x)\ Q(y) = \beta \quad \text{et} \quad \beta \in \alpha\Delta(P\ ,\ Q) \ .$$

La suite du paragraphe est consacrée à l'étude des représentations c. s. b. Pour une telle représentation $\Phi = (P\ ,\ Q)_\Omega$, posons

$$\tau_P^* = \tau_P \cup \varepsilon\ ,\quad \tau_Q^* = \tau_Q \cup \varepsilon \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_\Phi = \tau_P^* \cap \tau_Q^* \ .$$

LEMME 2.4 (GREEN) [2], p. 49. - <u>Soit</u> $\Phi = (P\ ,\ Q)_\Omega$ <u>une représentation c. s. b. d'un demi-groupe</u> D <u>et, pour</u> $(\alpha\ ,\ \beta) \in \tau_P^*$, <u>soient</u> $s\ ,\ s' \in D^1$ <u>tels que</u> $\alpha P(s) = \beta$ <u>et</u> $\beta P(s') = \alpha$. <u>Les applications</u> $\sigma : \xi \longrightarrow \xi P(s)$ <u>et</u> $\sigma' : \eta \longrightarrow \eta P(s')$ <u>sont des bijections réciproques entre</u> $\alpha\tau_Q^*$ <u>et</u> $\beta\tau_Q^*$ <u>conservant les classes de</u> τ_P^* (i. e. : $\xi \in \alpha\tau_Q^* \Longrightarrow (\xi P(s),\ \xi) \in \tau_P^*$).

THÉORÈME 2.5 (M. P. SCHÜTZENBERGER [7], [8]). - <u>Soit</u> H <u>une</u> $\mathcal{H}_\Phi$<u>-classe de</u> Ω .

(1) $\qquad \Gamma_\Phi(H) = \{\gamma_x\ ;\ \gamma_x \in \mathcal{C}_H : \forall\ \alpha \in H\ ,\ \alpha\gamma_x = \alpha P(x) = \beta \in H\}$

<u>est un groupe simplement transitif de permutations de</u> H (pour tout $\alpha\ ,\ \beta \in H$, il existe γ_x <u>unique</u> $\in \Gamma_\Phi(H)$ tel que $\alpha\gamma_x = \beta$) <u>et</u>

$$\Gamma'_\Phi(H) = \{\gamma'_x\ ;\ \gamma'_x \in \mathcal{C}_H : \forall\ \alpha \in H\ ,\ \alpha\gamma'_x = \alpha Q(x) = \beta \in H\}$$

<u>est un groupe anti-isomorphe à</u> $\Gamma_\Phi(H)$.

(2) <u>Si</u> H_1 <u>et</u> H_2 <u>sont deux</u> $\mathcal{H}_\Phi$<u>-classes</u>, $\Gamma_\Phi(H_1)$ <u>et</u> $\Gamma_\Phi(H_2)$ <u>sont isomorphes</u>.

A une représentation $\Phi = (P\ ,\ Q)_\Omega$ c. s. b. de D , on peut associer une application de D dans le demi-groupe des matrices monomiales sur le groupe avec zéro $\Gamma_\Phi(H) \cup (0)$, de la façon suivante : on indexe les τ_P^*-classes par un ensemble I , les τ_Q^*-classes par un ensemble Λ ; on choisit <u>un</u> élément particulier dans I et Λ noté 1 (on peut convenir de noter les deux éléments choisis de la même façon); on choisit ensuite un élément $\alpha_\lambda \in H_{1\lambda}$ puis $q_\lambda\ ,\ q'_\lambda \in D^1$ tels que $\alpha_\lambda = \alpha_1\ P(q_\lambda)$

et $\alpha_1 = \alpha_\lambda\ P(q'_\lambda)$; enfin, à tout $x \in D$ on fait correspondre une matrice de format $\Lambda \times \Lambda$, $M_\Phi(x) = [m_{\lambda\mu}(x)]$ sur $\Gamma_\Phi(H) \cup (0)$, (où $H = H_{11}$) définie par :

$$m_{\lambda\mu}(x) = \begin{cases} \gamma_{q_\lambda x q'_\mu} & \text{si } H_{1\lambda}\ P(x) = H_{1\mu}\ , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit symétriquement une matrice $M'_\Phi(x)$ de format $I \times I$.

THÉORÈME 2.6 (M. P. SCHÜTZENBERGER). - Pour toute représentation Φ, c. s. b. de D, M_Φ (resp. M'_Φ) définit une représentation (resp. anti-représentation) de D par des matrices carrées à lignes (colonnes) monomiales sur un groupe avec zéro. De plus, pour tout $\lambda , \mu \in \Lambda$ (resp. $i , j \in I$) et tout $\gamma \in \Gamma_\Phi(H)$ (resp. $\gamma' \in \Gamma'_\Phi(H)$), il existe $x \in D$ tel que $m_{\lambda\mu}(x) = \gamma$ (resp. $m'_{ij}(x) = \gamma'$) (pour exprimer cette dernière propriété, on peut dire que chaque rangée des matrices peut être remplie arbitrairement).

Les résultats qui suivent précisent le lien entre les représentations c. s. b. et les représentations transitives. Ils sont basés sur l'idée d'obtenir une réciproque au théorème précédent.

LEMME 2.7. - Si D a une représentation $\Phi = (P , Q)_\Omega$ c. s. b., P (resp. Q) est nulle ou somme de représentations (resp. d'anti-représentations) transitives équivalentes entre elles . (P et Q ne peuvent être nulles en même temps.)

Démonstration. - Si P n'est pas nulle, soit Ω_i $(i \in I)$ l'ensemble des τ^*_P-classes. $P_i(x) = P(x) \cap (\Omega_i \times \Omega_i)$ définit une représentation non nulle : en effet, il existe $\alpha_0 \in \Omega$ et $z \in D$ tels que $\alpha_0\ P(z) = \beta$; comme Φ est bitransitive, pour tout $\alpha_i \in \Omega_i$, il existe $u , v \in D^1$ (u et v non tous deux égaux à 1) tels que $\alpha_i\ P(u)\ Q(v) = \alpha_0$. Donc

$$\alpha_i\ P(u)\ Q(v)\ P(z) = \beta = \alpha_i\ P(uz)\ Q(v) \quad \text{et} \quad \alpha_i\ P(uz) = \gamma \in \Omega_i \ .$$

P_i est une représentation transitive et $P(x) = \bigcup_{i\in I} P_i(x)$. Le fait que P_i et P_j sont des représentations équivalentes résulte du lemme 2.4. On a en effet

$$P_i(x).\varphi = \varphi\theta[P_i(x)]$$

avec φ défini par $\xi \xrightarrow{\varphi} \xi Q(s)$, où s est défini en choisissant $\alpha \in \Omega_i$ et $\beta \in \Omega_j$ tels que $\alpha Q(s) = \beta$. On prendra alors θ défini par $\theta[P_i(x)] = P_j(x)$ [4].

---

[4] Il est important de remarquer que θ a la forme indiquée : il en résulte que P_i et P_j sont des représentations ayant même noyau (voir § 3), ce qui n'a pas toujours lieu pour des représentations équivalentes.

Soit D admettant une représentation transitive P par des transformations sur Ω . Sur certains complexes K de Ω , les transformations $P(x)$ induisent un groupe simplement transitif de permutations : une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie K de Ω soit le support d'un tel groupe est que :

(a) $KP(x) \cap K \neq \emptyset \implies KP(x) = K$,

(b) S'il existe α_0 , $\beta_0 \in K$, x , $y \in D$ tels que $\alpha_0 P(x) = \alpha_0 P(y) = \beta_0$, alors, pour tout $\alpha \in K$,

$$\alpha P(x) = \alpha P(y) \in K \ .$$

Parmi ces groupes simplement transitifs induits par P , ceux dont le support vérifie la condition (b') plus forte que (b) :

(b') S'il existe $\alpha_0 \in K$ tel que $\alpha_0 P(x) = \alpha_0 P(y) = \gamma$, alors, pour tout $\alpha \in K$, $\alpha P(x) = \alpha P(y)$,

sont dits groupes simplement transitifs <u>associés</u> à P et notés $\Gamma_P(K)$.

On définit de même des groupes simplement transitifs $\Gamma_Q(K')$ de support K' associés à une anti-représentation transitive Q . Soit G un groupe tel qu'il existe un homomorphisme injectif de G dans $\Gamma_P(K)$ et dans $\Gamma_Q^*(K')$ (dual de $\Gamma_Q(K')$). G peut être considéré comme un groupe simplement transitif sur un ensemble H (support de G) en bijection avec une partie de K et une partie de K' : nous dirons que G est un groupe simplement transitif <u>commun</u> à P et à Q . Avec la terminologie qui vient d'être définie :

LEMME 2.8. - <u>Soit D un demi-groupe admettant une représentation transitive P_1 par des transformations sur Ω_1 et une anti-représentation transitive Q_1 par des transformations sur Ω_1' , et soit G un groupe simplement transitif commun à P_1 et Q_1 . Alors D admet une représentation complète $\Phi = (P , Q)_\Omega$ c. s. b., telle que :</u>

1° P (<u>resp.</u> Q) <u>soit somme de représentations</u> (<u>resp. d'anti-représentations</u>) <u>équivalentes à</u> P_1 (<u>resp.</u> Q_1) ;

2° <u>le support de G soit en bijection avec les $\mathcal{H}_\Phi$-classes</u>.

La démonstration détaillée de ce lemme est assez longue ; nous en donnons le schéma :

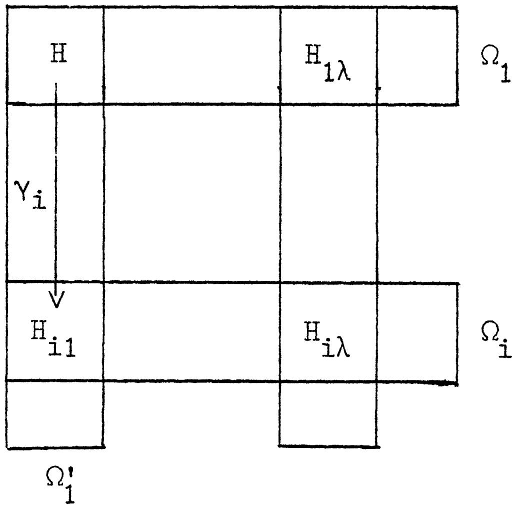
1° Soit H le support de G . G et son dual G^* agissent de façon simplement transitive sur H . On démontre alors que G et G^* commutent au sens large , c'est-à-dire qu'il existe une bijection φ de H telle que, pour tout $x \in G$,

$y \in G^{*}$:

$$x\varphi y\varphi^{-1} = \varphi y \varphi^{-1} x \quad \text{(égalité de deux transformations sur } H \text{) ;}$$

c'est la réciproque du lemme 2.23 de [2], p. 64.

2° D'après le 1°, on peut supposer que $\Omega_1 \cap \Omega_1' = H$ et que P_1 et Q_1 commutent sur H . On montre alors que les ensembles $HP(x)$ $(x \in D)$ distincts, partagent Ω_1 en classes $H_{1\lambda}$ $(\lambda \in \Lambda$ et $H_{11} = H)$ en bijection avec H . De même, les ensembles $HQ(x)$ distincts partagent Ω_1' en classes H_{i1} $(i \in I$ et $H_{11} = H)$ en bijection avec H ; notons γ_i cette dernière bijection.



3° On plonge H_{i1} dans un ensemble Ω_i en bijection $\overline{\gamma_i}$ avec Ω_1 , et on suppose que $\overline{\gamma_i}$ prolonge γ_i . On pose

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i \quad , \quad H_{1\lambda}\,\overline{\gamma_i} = H_{i\lambda} \quad \text{et} \quad \bigcup_{i \in I} H_{i\lambda} = \Omega_\lambda' \quad ,$$

et on définit une représentation P_Ω de D en posant :

$$(\alpha \;,\; \beta) \in P(x) \iff (\alpha \;,\; \beta) \in \Omega_i \quad \text{et} \quad (\alpha\overline{\gamma}_i^{-1} \;,\; \beta\overline{\gamma}_i^{-1}) \in P_{\Omega_1}(x) \quad .$$

4° On définit une anti-représentation Q_Ω par :

$(\gamma \;,\; \delta) \in Q(y) \iff$ il existe $x \in D$ tel que $P(x)$ applique Ω_1' sur Ω_λ'

et $(\gamma \;,\; \delta) \in P^{-1}(x)\; Q_1(y)\; P(x)$.

5° On montre enfin que la représentation complète $(P \;,\; Q)_\Omega$ a les propriétés de l'énoncé. Les principales difficultés de la démonstration concernent des questions de cohérence des définitions données pour les représentations construites.

THÉORÈME 2.9. - <u>Toute représentation</u> $\Phi = (P \;,\; Q)$ <u>c. s. b. est déterminée, à une équivalence au sens large près, par la donnée d'une représentation transitive (ou</u>

nulle) P_1 , d'une anti-représentation transitive (ou nulle) Q_1 , et d'un groupe simplement transitif commun à P_1 et Q_1 .

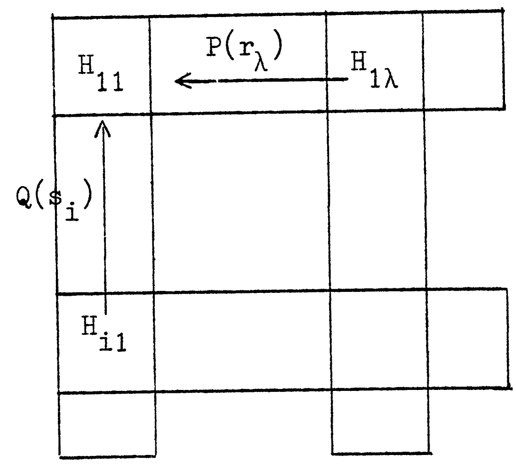
Démonstration. - Le théorème se déduit des deux lemmes précédents, sauf en ce qui concerne la détermination à une équivalence au sens large près de $(P , Q)_\Omega$. Soient

$$\Phi = (P , Q)_\Omega , \quad \Phi^* = (P^* , Q^*)_{\Omega^*} ,$$

deux représentations complètes telles que

$$P = \bigcup_{i \in I} P_i , \qquad P^* = \bigcup_{i^* \in I^*} P^*_{i^*}$$

et de même pour Q et Q^* ; les représentations P_i et $P^*_{i^*}$ sont équivalentes par hypothèse et les groupes simplement transitifs communs sont isomorphes ; il en résulte que les ensembles d'indices I et I^* sont en bijection (et de même Λ et Λ^*). Nous supposerons pour alléger les notations que les bijections sont l'identité. Soient φ , θ les bijections d'équivalence de P_1 et P^*_1 , φ' , θ' celles de Q_1 et Q^*_1 .



On choisit r_λ , $r'_\lambda \in D$, s_i , $s'_i \in D$ tels que $P(r_\lambda)$ et $P(r'_\lambda)$ définissent des bijections réciproques de $H_{1\lambda}$ sur H_{11} , $Q(s_i)$ et $Q(s'_i)$ des bijections réciproques de H_{i1} sur H_{11} . Nous notons $\theta[P(r_\lambda)]$ par $P^*(\overline{r_\lambda})$, etc. ;

$$P(r_\lambda)\, Q(s_i)\, \varphi P^*(\overline{r}'_\lambda)\, Q^*(\overline{s}'_i)$$

définit une bijection de $H_{i\lambda}$ sur $H^*_{i\lambda}$. Elle s'étend en une bijection ψ de Ω sur Ω^* en faisant varier λ et i dans Λ et I . On vérifie alors que $P(x)\psi = \psi P^*(x)$. On démontre de même que $Q(x)\psi' = \psi' Q^*(x)$ avec une bijection ψ' définie comme précédemment, mais à l'aide de φ' . Il est à remarquer que les applications θ_ψ et $\theta'_{\psi'}$ associées à ψ et ψ' sont telles que

$$\theta_\psi[P(x)] = P^*(x) \quad \text{et} \quad \theta'_{\psi'}[Q(x)] = Q^*(x) \quad .$$

3. Représentations fidèles.

Définitions. - Soit P_Ω une représentation de D. Le noyau ε_P de P est l'équivalence nucléaire de l'homomorphisme défini par P :

$$\varepsilon_P = \{(x , y) \in D \times D : P(x) = P(y)\} .$$

On définit le noyau ε_Φ d'une représentation complète $\Phi = (P , Q)_\Omega$ par

$$\varepsilon_\Phi = \varepsilon_P \cap \varepsilon_Q .$$

Deux représentations équivalentes P_Ω et $P'_{\Omega'}$ n'ont pas nécessairement le même noyau : cela se produit lorsque $\theta[P(x)] = P'(x)$ pour tout $x \in D$. Une remarque analogue vaut pour les représentations complètes.

Lorsque le noyau d'une représentation est l'égalité, elle est dite fidèle. Un demi-groupe est dit bitransitif s'il a une représentation Φ, c. s. b. fidèle, transitif à droite (gauche) s'il a une représentation P (une anti-représentation Q) fidèle.

PROPOSITION 3.1. - Un demi-groupe D a une représentation commutante symétrique fidèle si, et seulement si, il est isomorphe à un produit sous-direct de demi-groupes bitransitifs.

Démonstration. - Si D a une représentation commutante symétrique fidèle $\Phi = (P , Q)$, d'après le théorème 2.3,

$$\Phi = \bigcup_{i \in I} (P_i , Q_i)_{\Omega_i}$$

où les représentations $\Phi_i = (P_i , Q_i)_{\Omega_i}$ (sauf l'une d'entre elles qui est nulle) sont c. s. b. On a

$$\varepsilon_\Phi = \bigcap_{i \in I} \varepsilon_{\Phi_i}$$

qui est l'égalité sur D. D'après le théorème de G. BIRKHOFF ([1], p. 92), D est isomorphe à un produit sous-direct des demi-groupes D/ε_{Φ_i} qui sont bitransitifs. Inversement, si D est un produit sous-direct de demi-groupes bitransitifs, il existe une famille de congruences ε_i $(i \in I)$ telles que $\bigcap_{i \in I} \varepsilon_i$ soit l'égalité et D/ε_i ait une représentation Φ_i c. b. s. fidèle sur Ω_i. On peut supposer les Ω_i disjoints deux à deux (quitte à remplacer les représentations Φ_i par des représentations équivalentes ; on s'assure que ce remplacement ne détruit pas les qualités des Φ_i). En posant $\Omega = \bigcup \Omega_i$, en définissant des transformations $P(x)$ sur Ω par

$$(\alpha , \beta) \in P(x) \iff (\alpha , \beta) \in \Omega_i \times \Omega_i \quad \text{et} \quad (\alpha , \beta) \in P_i(\overline{x_i})$$

(où $\overline{x}_i$ désigne la classe de x modulo ε_i), puis des transformations $Q(x)$ d'une façon analogue, on obtient une représentation $(P , Q)_\Omega$ commutante symétrique fidèle.

On peut préciser la proposition précédente par :

PROPOSITION 3.2. - Toute représentation Φ c. s. b., a même noyau que la représentation de Schützenberger associée (cf. théorème 2.6).

Démonstration. - On vérifie sans difficulté que $P(x) = P(y) \implies m_{\lambda\mu}(x) = m_{\lambda\mu}(y)$, donc le noyau de P est contenu dans celui de M_Φ . Inversement, supposons $M_\Phi(x) = M_\Phi(y)$. Si $(\alpha , \beta) \in P(x)$, d'après le lemme 2.4, $\xi \longrightarrow \xi P(x)$ définit une bijection de $\alpha\tau_Q^*$ sur $\beta\tau_Q^*$ conservant les τ_P^*-classes. Si $\alpha \in H_{i\lambda}$ et $\beta \in H_{i\mu}$, alors

$$H_{1\lambda} P(x) = H_{1\mu} , \text{ et } m_{\lambda\mu}(x) = \gamma_{q_\lambda x q'_\lambda} .$$

Donc

$$m_{\lambda\mu}(y) = \gamma_{q_\lambda y q'_\lambda} = \gamma_{q_\lambda x q'_\lambda} \neq 0 .$$

Pour tout $\alpha_{11} \in H_{11}$,

$$\alpha_{11} P(q_\lambda x q'_\lambda) = \alpha_{11} P(q_\lambda y q'_\lambda) \in H .$$

Il en résulte que, pour tout $\alpha_{1\lambda} \in H_{1\lambda}$,

$$\alpha_{1\lambda} P(x) = \alpha_{1\lambda} P(y) \in H_{1\mu}$$

($P(q_\lambda)$ et $P(q'_\lambda)$ définissent des bijections). Enfin, $\alpha P(x) = \beta$ avec $\alpha \in H_{i\lambda}$ et $\beta \in H_{1\mu}$, implique, en prenant $\alpha_{1\lambda_0} \in H_{1\lambda}$ et u tel que $\alpha = \alpha_{1\lambda_0} Q(u)$:

$$\alpha_{1\lambda_0} Q(u) P(x) = \beta = \alpha_{1\lambda_0} P(x) Q(u) = \alpha_{1\lambda_0} P(y) Q(u) = \alpha_{1\lambda_0} Q(u) P(y) = \alpha P(y) .$$

On démontre de même que $\alpha P(y) = \beta \implies \alpha P(x) = \beta$. D'où, noyau de P = noyau de M_Φ .

Du théorème 2.9 et de la proposition 3.2, on déduit :

COROLLAIRE 3.3. - Soit D un demi-groupe. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

(a) D est bitransitif ;

(b) D est isomorphe à un produit sous-direct d'un demi-groupe transitif à droite et transitif à gauche ;

(c) D est isomorphe à un demi-groupe de couples de matrices monomiales sur un groupe avec zéro dont les rangées peuvent être remplies arbitrairement.

4. Translations partielles sur un demi-groupe. Représentation des demi-groupes réguliers.

Soit θ une relation binaire sur un demi-groupe D . On définit une application ρ_θ de D dans $\mathfrak{T}_D$, par

$$\rho_\theta(x) = \{(a , b) \in D \times D : \ ax = b \ \text{ et } \ (a , b) \in \theta\} \ .$$

ρ_θ est une représentation de D si, et seulement si, pour tout $a , b , c \in D$:

$$(a , abc) \in \theta \iff (a , ab) \in \theta \ \text{ et } \ (ab , abc) \in \theta \qquad (\text{condition } T_r).$$

De même

$$\lambda_\psi(x) = \{(a , b) \in D \times D : \ xa = b \ \text{ et } \ (a , b) \in \psi\} \ ,$$

est une anti-représentation si, et seulement si, pour tout $a , b , c \in D$:

$$(a , cba) \in \psi \iff (a , ba) \in \psi \ \text{ et } \ (ba , cba) \in \psi \qquad (\text{condition } T_\ell).$$

DÉFINITION 4.1. - On appelle translation partielle à droite de D définie par θ la transformation $\rho_\theta(x)$ de D définie par :

$$a\rho_\theta(x) = ax \iff (a , ax) \in \theta \ ,$$

où θ vérifie la condition T_r. De même, une translation partielle à gauche définie par ψ est la transformation

$$a\lambda_\psi(x) = xa \iff (a , xa) \in \psi \ ,$$

où ψ vérifie la condition T_ℓ.

Soit $\mathfrak{R}$ définie par : $(a , b) \in \mathfrak{R} \iff$ il existe $u \in D$ tel que $au = b$. Pour toute relation binaire θ telle que $\mathfrak{R} \subseteq \theta$, la condition T_r est remplie d'office et les translations partielles à droite correspondantes sont en fait les translations à droite. D'ailleurs, on peut remarquer que, pour tout $x \in D$, $\rho_\theta(x) = \rho_{\theta\cap\mathfrak{R}}(x)$, (si bien qu'on peut éventuellement se limiter aux relations θ plus fines que $\mathfrak{R}$). Pour des relations $\theta \subseteq \mathfrak{R}$, l'application, qui à θ fait correspondre la représentation ρ_θ , est injective : en effet, si $\rho_{\theta_1}(x) = \rho_{\theta_2}(x)$ pour tout $x \in D$, les relations de transitivité des représentations θ_1 et θ_2 sont les mêmes, or ces relations sont précisément θ_1 et θ_2 . Nous donnons quelques propriétés élémentaires des translations partielles.

PROPRIÉTÉS 4.2.

(a) Si ρ_θ est une représentation fidèle, il en est de même de $\rho_{\theta'}$ avec $\theta \subseteq \theta'$. Il en résulte que le demi-groupe D est réductif ($xa = xb$ pour tout $x \in D \implies a = b$).

(b) Si les $\rho_\theta(a)$ sont des transformations partielles injectives

$$(x\rho_\theta(a) = y\rho_\theta(a) = z \implies x = y) \quad \text{pour tout} \quad a \in D \ ,$$

alors il en est de même des $\rho_{\theta'}(a)$ pour $\theta' \subseteq \theta$. Si D est simplifiable à droite, toutes les translations partielles à droite sont injectives.

(c) ρ_θ est une représentation transitive si, et seulement si, θ est la relation universelle, et si D est simple à droite.

(d) Supposons que θ soit réflexive. La représentation ρ_θ est symétrique si, et seulement si, $\rho_\theta = \rho_{\mathcal{R}}$ où $\mathcal{R}$ est l'équivalence de Green. Si θ et ψ sont toutes deux réflexives et symétriques, la représentation complète $(\rho_\theta , \lambda_\psi)$ qui coïncide avec $(\rho_{\mathcal{R}} , \lambda_{\mathcal{L}})$ est aussi <u>commutante</u>.

(e) Si θ est une équivalence, chaque θ-classe est de la forme $R\backslash R'$ où R et R' sont des idéaux à droite de D, R' pouvant être vide. (Exemple : θ est une congruence zéro à gauche, c'est-à-dire telle que $(ab , a) \in \theta$ pour tout $a , b \in D$.) De même, si $\theta = K \times K$ où K est un complexe, alors $K = R\backslash R'$.

THÉORÈME 4.3. - <u>Tout demi-groupe régulier</u> D <u>a une représentation commutante symétrique fidèle par des translations partielles sur lui-même</u>.

<u>Démonstration</u>. - D'après la propriété 4.2 (d), il suffit de montrer que l'application $x \longrightarrow [\rho_{\mathcal{R}}(x) , \lambda_{\mathcal{L}}(x)]$ de D dans $\mathcal{T}_D \times \mathcal{T}_D^*$ est une injection. Soient

$$\rho_{\mathcal{R}}(x) = \rho_{\mathcal{R}}(y) \quad \text{et} \quad \lambda_{\mathcal{L}}(x) = \lambda_{\mathcal{L}}(y)$$

et x' un inverse de x ($xx'x = x$ et $x'xx' = x'$) :

$(xx' , x) \in \mathcal{R}$ et $xx'x = x \implies (xx' , x) \in \rho_{\mathcal{R}}(x) = \rho_{\mathcal{R}}(y) \implies xx'y = x \implies x \in Dy$.

En permuttant x et y, on a aussi $y \in Dx$, d'où $(x , y) \in \mathcal{L}$. Ceci nous prouve que :

$$\rho_{\mathcal{R}}(x) = \rho_{\mathcal{R}}(y) \implies (x , y) \in \mathcal{L} \ .$$

De même :

$$\lambda_{\mathcal{L}}(x) = \lambda_{\mathcal{L}}(y) \implies (x , y) \in \mathcal{R} \ .$$

En particulier : $y \in xD = xx'D$, d'où $xx'y = y$. En cours de route, on a vu que $xx'y = x$, d'où $x = y$.

Remarque. - D'autres demi-groupes que les demi-groupes réguliers se représentent fidèlement de la façon précédente. C'est le cas, par exemple, du demi-groupe des injections γ de l'ensemble des entiers naturels dans lui-même telles que $N - N\gamma$ soit dénombrable.

COROLLAIRE 4.4 (PRESTON [4]). - La somme directe des représentations et des anti-représentations de Schützenberger définies par les diverses $\mathcal{D}$-classes d'un demi-groupe régulier est fidèle.

Cela résulte du théorème précédent, du théorème 2.3 et de la proposition 3.2.

COROLLAIRE 4.5. - Tout demi-groupe régulier est isomorphe à un produit sous-direct de demi-groupes réguliers bitransitifs.

Cela résulte du théorème 4.3 et de la proposition 3.1.

COROLLAIRE 4.6. - Tout demi-groupe régulier 0-bisimple (c'est-à-dire ayant une seule $\mathcal{D}$-classe de Green autre que 0) a une représentation c. s. b. fidèle (5). par des translations partielles sur lui-même.

La représentation complète $(\rho_{\mathcal{R}}\ , \lambda_{\mathcal{L}})$ sera dite représentation complète canonique. Le sous-demi-groupe de $\mathcal{T}_D \times \mathcal{T}_D^*$ image d'un demi-groupe D régulier est formé de transformations ayant des propriétés d'"injectivité partielle" qui s'expriment par

$$\left|\begin{array}{l} a\rho_{\mathcal{R}}(x) = b\rho_{\mathcal{R}}(x) = c \quad \text{et} \quad (a\ , b) \in \mathcal{L} \implies a = b \\ a\lambda_{\mathcal{L}}(x) = b\lambda_{\mathcal{L}}(x) = c \quad \text{et} \quad (a\ , b) \in \mathcal{R} \implies a = b \ . \end{array}\right.$$

Des propriétés analogues sont valables pour toute représentation commutante symétrique d'un demi-groupe quelconque et résultent du lemme de Green.

PROPOSITION 4.7. - Un demi-groupe régulier est inverse si, et seulement si, sa représentation complète canonique s'effectue par des translations partielles injectives. Dans ce cas, la représentation (l'anti-représentation) $\rho_{\mathcal{R}}$ $(\lambda_{\mathcal{L}})$ est fidèle.

Démonstration.

(a) Si D est un demi-groupe inverse

$$a\rho_{\mathcal{R}}(x) = b\rho_{\mathcal{R}}(x) = c \implies a = axx^{-1} = cx^{-1} = bxx^{-1} = b \ .$$

(5) Il est bitransitif, et on peut lui appliquer le corollaire 3.3. Cela ne donne malheureusement que peu d'idées sur la structure des demi-groupes réguliers 0-bisimples.

En effet :

$(ax , a) \in \mathcal{R} \implies (ax)(ax)^{-1} a = a \implies a = axx^{-1} a^{-1} a = a(a^{-1} a)(xx^{-1}) = axx^{-1}$.

De même $\lambda_{\mathcal{L}}(x)$ est injective pour tout $x \in D$. Pour montrer par exemple que $\rho_{\mathcal{R}}$ est fidèle, comme dans la démonstration du théorème 4.3, on a :

$$\rho_{\mathcal{R}}(x) = \rho_{\mathcal{R}}(y) \implies xx^{-1} y = x \quad \text{et} \quad (x , y) \in \mathcal{L} .$$

Donc

$$y\lambda_{\mathcal{L}}(xx^{-1}) = x = x\lambda_{\mathcal{L}}(xx^{-1}) .$$

Comme $\lambda_{\mathcal{L}}(xx^{-1})$ est injective, $x = y$.

(b) Si D est un demi-groupe régulier à représentation canonique par des injections, chaque $\mathcal{R}$-classe a un seul idempotent ; en effet, si e et f sont deux idempotents équivalents par $\mathcal{R}$, $ef = f$:

$$e\rho_{\mathcal{R}}(f) = f = f\rho_{\mathcal{R}}(f) \implies e = f .$$

De même, chaque $\mathcal{L}$-classe a un seul idempotent, et D est un demi-groupe inverse.

PROPOSITION 4.8. - Soient D un demi-groupe régulier et $(\rho_{\mathcal{R}} , \lambda_{\mathcal{L}})$ sa représentation complète canonique. Il y a équivalence entre :

(a) $\rho_{\mathcal{R}}(x)$ est la translation à droite $\rho(x)$ pour tout $x \in D$;

(b) $\lambda_{\mathcal{L}}(x)$ est la translation à gauche $\lambda(x)$ pour tout $x \in D$;

(c) D est complètement simple.

Démonstration. - (a) $\implies$ (c). Si D a un zéro, il est réduit à zéro : $(a.0 = 0 \implies a\rho(0) = 0 \implies a\rho_{\mathcal{R}}(0) = 0 \implies a = 0)$. Dans le cas contraire, pour deux idempotents e, f de D, tels que $ef = fe = e$, on a :

$$f\rho(e) = e \implies f\rho_{\mathcal{R}}(e) = e \implies (f , e) \in \mathcal{R} \implies ef = f \implies e = f ;$$

D régulier, sans zéro, et ayant tous ses idempotents primitifs, est complètement simple.

(c) $\implies$ (a) est évident.

Un résultat analogue, mais un peu plus compliqué à formuler, est valable pour les demi-groupes complètement 0-simples.

Le corollaire 4.5 indique clairement le processus à suivre dans l'étude des demi-groupes réguliers :

1° Etude des demi-groupes réguliers bitransitifs (ou même transitifs à droite seulement). Dans cette direction, quelques résultats sont connus qui concernent les demi-groupes <u>inverses</u> bisimples, ainsi que la structure des demi-groupes complètement 0-simples.

2° Etude de demi-groupes réguliers qui sont produits sous-directs de bitransitifs. Bien que certains résultats soient connus à ce propos (comme, par exemple, la structure des demi-treillis de groupes, voir [2], paragraphe 4.2, qui sont <u>les</u> demi-groupes réguliers produits sous-directs de groupes), le problème ne paraît pas avoir été déjà envisagé sous cet angle. Les demi-groupes réguliers bitransitifs les plus généraux dont on connaisse la structure, sont les demi-groupes complètement 0-simples, d'où l'idée d'une étude des produits sous-directs de demi-groupes complètement 0-simples. On démontre les résultats suivants (pour la terminologie, voir [2]).

Un demi-groupe régulier D est produit sous-direct de demi-groupes complètement 0-simples si, et seulement si,

(1) D est complètement semi-simple (i. e. chaque facteur principal de D est complètement [0]-simple) ;

(2) Pour deux idéaux principaux quelconques $J(a)$ et $J(b)$ de D :

$J(b) \subseteq J(a) \implies$

- ou bien, pour tout $x \in J_a$ (J_a est la $\mathcal{J}$-classe de a) ,
$$xJ(b)x \subseteq J(b)\setminus J_b \ ;$$
- ou bien, il existe un homomorphisme partiel φ de J_a dans J_b tel que :
$$\forall\, x \in J_a\ ,\ \forall\, y \in J_b\ ,\ \begin{cases} xy \in J_b \implies xy = [\varphi(x)].y\ , \\ yx \in J_b \implies yx = y.[\varphi(x)]\ . \end{cases}$$

Cette condition (2) donne effectivement la structure lorsque l'ensemble ordonné des $\mathcal{J}$-classes est d'un type simple, ce qui se produit, par exemple, pour les demi-groupes réunion de groupes ou les demi-groupes réguliers finis. Dans le cas général, on peut remplacer (2) par (2') :

(2') $J_b \subseteq J_a \implies$
- ou bien aucun idempotent de J_a n'est supérieur à un idempotent de J_b ;
- ou bien chaque idempotent de J_a est supérieur à un seul idempotent de J_b .

Les démonstrations de ces résultats paraîtront ultérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKHOFF (G.). - Lattice theory. - New York, American mathematical Society, 1948 (American mathematical Society. Colloquium Publications, 25).

[2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[3] HOEHNKE (H. J.). - Zur Strukturtheorie der Halbgruppen, Math. Nachr., t. 26, 1963, p. 1-13.

[4] PRESTON (G. B.). - Matrix representations of semigroups, Quart. J. of Math., Oxford Series, t. 9, 1958, p. 169-176.

[5] ŠAJN (B. M.). - Plongement d'un demi-groupe dans un groupe généralisé [en russe], Mat. Sbornik, N. S., t. 55, 1961, p. 379-400.

[6] ŠAJN (B. M.). - Sur les représentations transitives d'un demi-groupe [en russe], Uspekhi Mat. Nauk, t. 18, 1963, p. 215-222.

[7] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - $\overline{\mathcal{D}}$-représentations des demi-groupes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 1994-1996.

[8] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Sur la représentation monomiale des demi-groupes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 865-867.

[9] TULLY (R. J.). - Representation of a semigroup by transformations acting transitively on a set, Amer. J. of Math., t. 83, 1961, p. 533-541.