Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Guy Renault

Anneaux self-injectifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, n° 1 (1965-1966), exp. n° 11, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_1_A9_0>

21 février 1966
[Rédaction de mars 1967]

ANNEAUX SELF-INJECTIFS

par Guy RENAULT

Le but de cet exposé est de donner une démonstration plus simple d'un théorème de Y. UTUMI [1] : Si A est un anneau self-injectif à gauche, et si R désigne son radical de Jacobson, alors l'anneau-quotient A/R est self-injectif. Cette nouvelle rédaction annule une rédaction antérieure.

1. Anneau des endomorphismes d'un module injectif.

Soit A un anneau unitaire. Tous les modules considérés sont des A-modules à gauche. Rappelons le résultat classique suivant :

THÉORÈME 1.1. - *Le radical de Jacobson* $R(B)$ *de l'anneau des endomorphismes* B *d'un* A-*module injectif* E , *est l'ensemble des endomorphismes* φ *de* B *tels que* $\operatorname{Ker} \varphi$ *soit un sous-module essentiel de* E ; *l'anneau-quotient* $B/R(B)$ *est régulier (au sens de Von NEUMANN).*

Nous allons nous préoccuper de l'étude du relèvement des idempotents de l'anneau $B/R(B) = C$; si $x \in B$, on désignera par $\overline{x}$ son image canonique dans C .

LEMME 1.1. - *Soient* e *et* f *deux idempotents de* B *tels que* $\overline{e}.\overline{f} = 0$; *il existe un idempotent* p *de* B *tel que* :

(a) $ep = 0$,
(b) $Bp = Bf$.

Par hypothèse, $ef = \varphi$, où φ est un élément de $R(B)$. On en déduit $\varphi \circ f = \varphi$. Soit ψ la restriction de f à $\operatorname{Ker} \varphi$ qui est essentiel dans E ; ψ est un projecteur, et on a : $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Im} \psi \oplus \operatorname{Ker} \psi$.

$$ef(\operatorname{Ker} \varphi) = 0 \implies \operatorname{Im} \psi \subset \operatorname{Ker} e \quad .$$

Soit $E(\operatorname{Im} \psi)$ une enveloppe injective de $\operatorname{Im} \psi$ contenue dans $\operatorname{Ker} e$. E peut s'écrire :

$$E = E(\operatorname{Im} \psi) \oplus E(\operatorname{Ker} \psi) \quad ;$$

on désignera par p (resp. q) la projection canonique de E sur $E(\operatorname{Im} \psi)$.

$$\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} e \implies e = \lambda q \ ,$$

et par suite $ep = 0$. D'autre part, p et f coïncident sur $\operatorname{Ker} \varphi$, d'où

$$p - f = \lambda\omega \ ;$$

de la relation $\omega = \omega \circ f$, il résulte que

$$p = (1 + \lambda\omega)f \ , \quad \varphi \in R(B) \implies 1 + \lambda\omega \ \text{inversible et} \ Bp = Bf \ .$$

LEMME 1.2. - *Soit* A *un anneau régulier ; si* $x , y \in A$ *sont tels que*

$$Ax \cap Ay = (0) \ ,$$

il existe un idempotent e *tel que* :

(a) $Ax = Ae$,

(b) $ye = 0$.

On a $Ax + Ay = Aq$, où q est un idempotent, avec $q = \alpha x + \beta y$, si $u \in Aq$, alors $u = uq$, d'où les relations :

$$y.\alpha x = 0 \ , \qquad (\alpha x)^2 = \alpha x \ ,$$

il suffit de poser $e = \alpha x$.

LEMME 1.3. - *Soient* e , f *deux idempotents de* B, *tels que* $C\bar{e} \cap C\bar{f} = (0)$. *Alors* $Be \cap Bf = (0)$, *et il existe un idempotent* p *tel que* $Bf = Bp$, *avec* $e.p = 0$ *et* $Be + Bf = B(e + p - pe)$.

D'après le lemme 1.2, on peut trouver un élément idempotent $\bar{g}$ tel que $C\bar{g} = C\bar{f}$ et $\bar{e}\bar{g} = 0$, $g \in Bf$. D'après le lemme 1.1, il existe un idempotent p de Bf tel que $\bar{p} = \bar{g}$, avec $ep = 0$.

Nous allons montrer que $Bf = Bp$. Supposons $Bp \subsetneq Bf$, alors $\operatorname{Ker} p \supsetneq \operatorname{Ker} f$.

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus I_1 \oplus \operatorname{Im} p \ , \qquad \text{avec} \ \operatorname{Ker} f \oplus I_1 = \operatorname{Ker} p \ .$$

Soit f_1 un idempotent tel que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f_1 \ , \qquad \operatorname{Im} f_1 = I_1 \oplus \operatorname{Im} p \ ,$$

et soit q un autre idempotent avec

$$\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} p \ , \qquad \operatorname{Im} q = I_1 \ .$$

$$Bf_1 = Bf \quad \text{et} \quad f_1 = p + q \ , \qquad \text{avec} \ pq = qp = 0 \ .$$

On en déduit

$$\overline{f_1} = \overline{p} + \overline{q} \ ; \quad C\overline{f_1} = C\overline{f} = C\overline{p} \implies \overline{f_1} = \overline{\lambda p} \ ,$$

d'où $\overline{\lambda p} = \overline{p} + \overline{q}$ et $\overline{q}^2 = 0$, ce qui est absurde.

$$Be + Bf = Be + Bp = B(e + p - pe) \ ,$$

car $ep = 0$.

2. Le théorème d'Utumi.

PROPOSITION 2.1. - *Soit* $(e_i)_{i \in I}$ *un ensemble d'idempotents de* B *tel que la somme* $\sum_i C\overline{e_i}$ *soit directe ; alors la somme* $\sum_i Be_i$ *est directe.*

Il suffit de la prouver lorsque I est fini, et on le démontre par récurrence en utilisant le lemme 1.3.

LEMME 2.1. - *Soit* A *un anneau régulier ; si* J *est un idéal à gauche de* A *, il existe un ensemble d'idempotents* $(e_i)_{i \in I}$ *tel que* J *soit extension essentielle de la somme directe* $\sum_i Ae_i$.

Il suffit d'appliquer le théorème de Zorn !

THÉORÈME [1]. - *Soit* B *un anneau injectif à gauche. Si* $R(B)$ *désigne le radical de Jacobson de* B *, l'anneau-quotient* $A = B/R(B)$ *est injectif à gauche.*

Il est suffisant de montrer que tout B-homomorphisme f d'un idéal à gauche I de A dans A est donné par la multiplication à droite d'un élément de A .

D'après le lemme 2.1 et le théorème 1.1, on peut trouver un système $(x_i)_{i \in I}$ d'idempotents de B tel que la somme $\sum_i A\overline{x_i}$ soit essentielle dans A . La proposition 2.1 montre que la somme $\sum_i Bx_i$ est directe dans B . Pour chaque i , la restriction de f à $A\overline{x_i}$ est donnée par la multiplication à droite par un élément $\overline{y_i}$ de A . On en déduit un homomorphisme g de $\sum_i Bx_i$ dans B défini par $g(x_i) = x_i\, y_i$. B est injectif, il existe $y \in B$ tel que $x_i\, y_i = x_i\, y$ pour tout $i \in I$. $\overline{y}$ définit un homomorphisme h de A dans A tel que $f = h$ sur $\sum_i A\overline{x_i}$. Soit $a \in I$; il existe un idéal essentiel P de A tel que

$$Pa \subset \sum_i A\overline{x_i} \ ,$$

et on a

$$P(f - h)a = 0 \ ;$$

on sait que dans un anneau régulier l'annulateur d'un élément non nul n'est pas un idéal essentiel, il en résulte que $f(a) = h(a)$, et h prolonge f à A .

Le théorème précédent suggère le problème suivant (compte-tenu du paragraphe 1) :

PROBLÈME I. - Si B désigne l'anneau des endomorphismes d'un module injectif E , et si $R(B)$ désigne son radical, l'anneau-quotient $B/R(B)$ est-il injectif ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] UTUMI (Y.). - On continuous rings and self injective rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 118, 1965, p. 158-173.