Jacques Lévy-Bruhl

Demi-groupes et catégories à involution

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, n° 1 (1965-1966), exp. n° 9, p. 1-48

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_1_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
19e année, 1965/66, n° 9

24 et 31 janvier 1966

DEMI-GROUPES ET CATÉGORIES À INVOLUTION

par Jacques LÉVY-BRUHL

I. Groupoïde et demi-groupe large

1. Demi-groupe large.

Un groupoïde large est un ensemble (ou une collection) E, muni d'une opération notée multiplicativement, tel qu'étant donné un couple (a, b) $(a \in E, b \in E)$, il existe au plus un élément c de E tel que $c = ab$. Le couple (a, b) est dit composable si ab existe.

Un groupoïde large sera dit demi-groupe large s'il satisfait à l'axiome d'associativité affaiblie (A), et à l'axiome (B).

(A) On a l'égalité $a(bc) = (ab)c$, c'est-à-dire que les deux membres sont simultanément l'ensemble vide ou un même élément de E.

(B) Si ab et bc existent, il en est de même de $a(bc)$.

Si tous les couples (a, b) de E sont composables, on supprime le mot "large".

Une partie stable F d'un groupoïde large E est une partie telle que

$$a \in F, \quad b \in F, \quad \exists\, ab \implies ab \in F .$$

Un élément neutre à droite A est tel que $\exists\, xA \implies xA = x$.

PROPOSITION I.1.1. - Dans un demi-groupe large E :

(a) Les éléments simplifiables à gauche forment une partie stable ;

(b) Un élément inversible à droite relativement à un élément neutre à droite est simplifiable à droite ;

(c) Les éléments inversibles à droite par rapport à un élément neutre à droite forment une partie stable ;

(d) Si A' est neutre à droite, et que a possède un inverse à droite a' et un inverse à gauche a'', tels que $\exists\, aa''$, a'' est inverse à droite de a ;

(e) Si A'' est neutre à gauche, A' neutre à droite, et que $aa' = A'$, $a''a = A''$, alors $a' = a''$, et cet inverse de a est alors unique ;

(f) Si ab est simplifiable à gauche, b est simplifiable à gauche ;

(g) L'intersection ensembliste de deux parties stables est une partie stable.

Etant donné un groupoïde large E, de signe opératoire T, on peut définir sur E une deuxième structure de groupoïde large d'opération $\overline{T}$, appelée groupoïde large opposé ou 1-dual par la condition suivante :

$a \overline{T} b$ existe si, et seulement si, $b T a$ existe, et alors $a \overline{T} b = b T a$.

Il est clair que la structure 1-duale de $(E, \overline{T})$ est la structure (E, T) et que les éléments ayant une qualité à gauche dans (E, T) ont la qualité à droite dans la structure 1-duale. Nous nous bornerons à énoncer les résultats obtenus par 1-dualité, à partir de résultats déjà démontrés dans la structure (E, T).

PROPOSITION I.1.2. - Etant donnée une partie F d'un demi-groupe large E, il existe un demi-groupe large F' qui est le plus petit demi-groupe large contenant F. Alors F' est formé des produits finis et définis d'éléments de F.

Démonstration. - Si les $a_i \in F$, tout demi-groupe large contenant F contient $a_1 \ldots a_n$ si $a_1 \ldots a_n$ existe (n, naturel quelconque). Soit F' l'ensemble des produits finis et existants d'éléments de F. Alors F' est évidemment un demi-groupe large qui est donc le plus petit sous-demi-groupe large de E contenant F, et qu'on appelle demi-groupe large engendré par F.

Cas particulier. - Si F_1 et F_2 sont deux sous-demi-groupes larges de F, le demi-groupe large engendré par $F_1 \cup F_2$ (union ensembliste) est le plus petit demi-groupe large contenant F_1 et F_2.

2. Catégorie.

Une catégorie est un demi-groupe large E satisfaisant à l'axiome des éléments neutres :

(N) $\forall a \in E$, il existe deux éléments neutres A et B, tels que $\exists\, aA$ et $\exists\, Ba$.

PROPOSITION I.2.1. - Les éléments neutres A et B d'un élément a sont uniques.

Dans une catégorie, on appelle morphisme un élément, objet un élément neutre, épimorphisme un élément simplifiable à droite, monomorphisme un élément simplifiable à gauche, bimorphisme un élément simplifiable. Si A et B sont les objets relatifs de a, définis dans l'axiome (N), A est appelé source de a, B but de a, et on écrira $a = BaA$ pour rappeler sa source et son but.

PROPOSITION I.2.2. - Le produit aa' (où $a = BaA$ et $a' = B'a'A'$) existe si, et seulement si, $A = B'$.

Si F est une partie de E , où E est un groupoïde large, nous désignerons par aF l'ensemble (ou collection d'éléments) de la forme af , où $f \in F$ (ce qui implique que $\exists\ af$). Définition analogue pour Fa (par 1-dualité).

PROPOSITION I.2.3.

(a) La relation R entre monomorphismes $(m , m') \in R \iff m'E \subseteq mE$ est une relation de préordre.

(b) $(m , m') \in R$ si et seulement s'il existe un monomorphisme m'' tel que $m' = mm''$.

(a)* [Proposition 1-duale de la propriété (a)]. - La relation R' entre épimorphismes $(s , s') \in R' \iff Es' \subseteq Es$ est une relation de préordre.

(b)*. - $(s , s') \in R'$ si et seulement s'il existe un épimorphisme s'' tel que $s' = s''s$.

(c) Si m et m' sont deux monomorphismes tels que $mE = m'E$, on a $m' = mf$, où f est inversible.

(c)*. - Si s et s' sont deux épimorphismes tels que $Es = Es'$, on a $s' = fs$, où f est inversible.

Si m est un monomorphisme, on appelle <u>sous-objet</u> du but de m la partie mE . Nous désignerons par $\vec{m}$ tout monomorphisme tel que $mE = \vec{m}E$, et par $\underset{\sim}{m}$ toute source d'un monomorphisme $\vec{m}$. De même, si s est un épimorphisme, tout but d'un épimorphisme $\vec{s}$ tel que $Es = E\vec{s}$ sera noté $\underset{\sim}{s}$, et Es est appelé <u>objet quotient</u> de la source de s .

<u>Exemple 1</u>. - On appelle <u>groupoïde de Brandt</u> une catégorie où tout morphisme est inversible. Un <u>groupe</u> est un groupoïde de Brandt ne possédant qu'un seul élément neutre, et où deux éléments quelconques sont composables.

<u>Exemple 2</u>. - Soit F un ensemble. On définit sur $F \times F$ une structure de groupoïde de Brandt en posant $\binom{t}{z}\binom{x}{y} = \binom{x}{z}$ si, et seulement si, $t = y$, non définie si $t \neq y$. Alors $E = F \times F$ est appelé <u>groupoïde de Brandt de couples</u>.

Soit F une catégorie, et dans $P(F)$ on se donne une classe U d'éléments U_i formée d'éléments neutres de F . On considère des triplets de la forme

$$(U' , a , U'') \quad \text{où} \quad a \in P(F) , \quad U' \in U , \quad U'' \in U ,$$

tels que, pour tout élément α de F qui soit élément de a , la source de α

soit dans U'' et le but de α dans U'. Soit E l'ensemble de ces triplets. On munit $P(F)$ de la structure induite.

Soit un deuxième triplet $(V', b, V'') \in E$. Le produit $(U', a, U'')(V', b, V'')$ n'existera pas si $V' \neq U''$, et

$$(U', a, U'')(U'', b, U''') = (U', ab, U''') .$$

PROPOSITION I.2.4. - L'ensemble E est une catégorie.

Démonstration. - Montrons que l'opération multiplication des triplets est interne. Si $\xi \in ab$, alors $\xi = \alpha\beta$, où $\alpha \in a$, $\beta \in b$. Donc la source de ξ est la source de β et appartient donc à U'''. De même, le but de ξ est élément de U'. Donc $(U', ab, U''') \in E$.

L'axiome (A) d'associativité affaiblie est évidemment vérifié. Il en est de même de l'axiome (B), en posant

$$(U', a, U'')(U'', b, U''') = (U', \emptyset, U''')$$

s'il n'existe aucun $\alpha \in a$, et $\beta \in b$, tels que $\alpha\beta$ existe dans F.

Un triplet de la forme (U', U', U') fait évidemment partie de E, car la source et le but de tout élément neutre de F contenu dans U' sont confondus avec lui. Or on a

$$(U', U', U')(U', a, U'') = (U', U'a, U'')$$

et

$$\xi \in U'a \implies \xi = \eta'\alpha, \text{ où } \alpha \in a, \eta' \in U',$$

ce qui entraîne que η' est le but de α, contenu dans U'. Donc $\xi = \alpha$ et $U'a \subseteq a$. D'ailleurs, $\alpha = \eta'\alpha$ montre que $a \subseteq U'a$, et par suite $a = U'a$, ce qui prouve que (U', U', U') est neutre à gauche. On prouverait de même qu'il est neutre à droite, E est donc une catégorie.

Exemple. - Si F est un groupoïde de Brandt de couples, la catégorie E, définie par la construction précédente, s'appelle une catégorie *de relations binaires*.

II. Groupoïde large ordonné

Nous considérerons des demi-groupes larges ordonnés (partiellement) de relation d'ordre notée $\leqslant$, satisfaisant aux axiomes suivants :

(O) E est un demi-groupe large ordonné ;

(OC) La relation d'ordre est compatible avec la multiplication

$$a \leqslant b \ , \ \exists\ ac \ , \ bc \implies ac \leqslant bc \ ,$$

$$a \leqslant b \ , \ \exists\ ca \ , \ cb \implies ca \leqslant cb \ ;$$

(ODT) E est un demi-treillis large pour la relation d'ordre, plus grand minorant commun de a et b, noté $a \wedge b$.

PROPOSITION II.1.

(a) En admettant l'axiome (O), l'axiome (OC) est équivalent à

$$a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d \implies ac \leqslant bd \ ,$$

pourvu que les produits existent (multiplication des inégalités membre à membre).

(b) Distributivité atténuée du produit par rapport à l'intersection.

$$a(b \wedge c) \leqslant ab \wedge ac \qquad \text{et} \qquad (a \wedge b)c \leqslant ac \wedge bc \ ,$$

pourvu que les produits écrits existent, ainsi que les intersections.

Si A est un élément neutre de E, on dira que a est entier (relativement à A) si $a \leqslant A$, que a est réflexif si $A \leqslant a$, que a est transitif si $a^2 \leqslant a$, que a est permis à gauche si $xa \leqslant a$, $\forall\ x$ tel que $\exists\ xa$.

PROPOSITION II.2. - Les éléments entiers, réflexifs, transitifs forment des parties stables pour le produit et l'intersection.

Remarque. - Pour les démonstrations de ce paragraphe, le lecteur pourra aisément adapter les démonstrations données dans les ouvrages cités dans la bibliographie.

III. Groupoïde large à involution

1. Définition et exemples.

Un groupoïde large ordonné à involution est un groupoïde large ordonné, éventuellement en $\wedge$ demi-treillis large ou en treillis large, à multiplication compatible avec la relation d'ordre, et vérifiant les axiomes :

(INV) Il existe une application de E dans E, $a \longrightarrow a^\circ$, vérifiant :

(INV-i) $(a^\circ)^\circ = a$ (involution) ;

(INV-ii) $(ab)^\circ = b^\circ a^\circ$ (anti-endomorphisme) ;

(INV-iii) $a \leqslant b \implies a^\circ \leqslant b^\circ$ (isotonie).

PROPOSITION III.1.1. - En posant $a^o = a$, $\forall a$, tout groupoïde large ordonné commutatif, tout demi-groupe large commutatif ordonné, tout demi-treillis, tout treillis (en prenant pour multiplication la deuxième opération $\vee$ du treillis), vérifient l'axiome (INV).

PROPOSITION III.1.2. - Soient F un demi-groupe large satisfaisant aux axiomes (INV-i) et (INV-ii), et G un ensemble de parties de $P(F)$ qui soit stable pour la structure induite.

Si on définit G^o comme l'ensemble des parties de $P(F)$, a^o telles que

$$\alpha \in a \ , \quad a \in G \iff \alpha^o \in a^o \ , \quad a^o \in G^o \ ,$$

alors G peut être immergé dans un demi-groupe large ordonné E à involution engendré par $G \cup G^o$.

Démonstration. - Soit $x = x_1 \ldots x_n$ un produit fini, les x_i étant éléments de G ou de G^o , et posons $x^o = x_n^o \ldots x_1^o$. Si $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in x$, où les $\alpha_i \in F$, $\alpha_n^o \ldots \alpha_1^o \in x^o$, c'est un produit fini et existant d'éléments de G^o ou de G . Donc $x \in E \implies x^o \in E$. On a évidemment (INV-i) et (INV-ii) d'après la définition de x^o . Supposons $x \subseteq y \in E$. Alors tout élément de x , $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, est élément de y ,

$$\alpha_1 \ldots \alpha_n \in y \implies \alpha_n^o \ldots \alpha_1^o \in y^o$$

et par suite $x^o \subseteq y^o$, ce qui prouve (INV-ii). D'ailleurs G est une partie stable de E .

COROLLAIRE. - Si dans une catégorie F on peut définir une application $\alpha \to \alpha^o$ satisfaisant à (INV-i) et (INV-ii), et si la source de α est le but de α^o , la construction de la proposition I.2.4 permet de construire des catégories G dans $P(F)$, qui sont immergeables dans des catégories à involution.

Exemple 1. - Soit une catégorie G dont les morphismes sont des relations binaires, c'est-à-dire des triplets de la forme (U' , a , U'') , où U' est un ensemble de couples de la forme $\binom{x'_i}{x'_i}$, U'' un ensemble de couples de la forme $\binom{x''_j}{x''_j}$ et a un ensemble de couples de la forme $\binom{x''}{x'}$, où $\binom{x''}{x''} \in U''$ et $\binom{x'}{x'} \in U'$.

Si on définit $(U' , a , U'')^o = (U'' , a^o , U')$, où a^o est l'ensemble des couples $\binom{x'}{x''}$ tels que $\binom{x''}{x'} \in a$, le demi-groupe large engendré par $G \cup G^o$ est une catégorie ordonnée à involution qui contient G , les éléments neutres étant les mêmes que ceux de G .

Remarque. - Il en est ainsi par exemple de la catégorie des ensembles, dont les éléments neutres sont les applications identiques d'un ensemble sur lui-même, les morphismes les applications d'un ensemble sur un autre, et d'une manière générale de toutes les catégories dont les morphismes sont des applications particulières, ou des relations binaires entre ensembles, contenant comme morphismes particuliers les applications identiques (catégorie des modules à gauche, catégorie des espaces topologiques, catégorie d'ordre dans un ensemble ordonné).

Exemple 2. - Les relations binaires entre une classe d'ensemble U_i forment une catégorie à involution.

Exemple 3. - L'ensemble des parties d'un groupe forme une catégorie à involution. Dans cet exemple, les éléments du groupe F forment un groupoïde de Brandt à un seul élément neutre, et la structure induite dans $P(F)$ est une catégorie à involution si on pose $\alpha^o = \alpha^{-1}$, $\forall \alpha \in F$.

Un élément a d'un groupoïde large à involution est dit symétrique s'il est égal à son réciproque a^o . Un élément réflexif et transitif est un préordre ; un élément réflexif, symétrique et transitif, est une équivalence.

PROPOSITION III.1.3. - Dans un demi-groupe à involution, possédant un élément neutre A :

(a) Un préordre est idempotent ;

(b) Le produit de deux éléments symétriques est symétrique si et seulement s'ils sont permutables ;

(c) Le produit de deux équivalences est une équivalence si, et seulement si, elles sont permutables.

Démonstration.

(a) $A \leqslant a \implies a \leqslant a^2$ et $a^2 \leqslant a \implies a^2 = a$.

(b) $a = a^o$, $b = b^o \implies (ab)^o = b^o a^o = ba$. D'où $ab = (ab)^o \iff ab = ba$.

(c) D'après (b), si a et b sont des équivalences, ab ne peut être une équivalence que si $ab = ba$. Si $ab = ba$, ab est réflexif, symétrique d'après (b), et

$$(ab)(ab) = a^2\, b^2 \leqslant ab \text{ , car } a^2 \leqslant a \text{ , } b^2 \leqslant b \text{ .}$$

On a même

$$(ab)^2 = ab \qquad \text{d'après (a).}$$

PROPOSITION III.1.4. - Dans un groupoïde large à involution ordonné en demi-treillis ou en treillis :

(a) $a^o \wedge b^o = (a \wedge b)^o$;

(b) $(a \vee b)^o = a^o \vee b^o$;

(c) l'intersection et l'union de deux éléments symétriques sont symétriques ;

(d) l'intersection de deux équivalences est une équivalences.

Démonstration.

(a) $x \leqslant a^o \wedge b^o \iff x \leqslant a^o$ et $x \leqslant b^o \iff x^o \leqslant a$ et $x^o \leqslant b \iff x^o \leqslant a \wedge b$. Même démonstration pour (b).

Si $a^o = a$, $b^o = b$, $a \wedge b = (a \wedge b)^o$, d'après (a). L'intersection de deux éléments réflexifs, symétriques, transitifs, a encore ces qualités, ce qui prouve (d).

2. Catégorie à involution.

Une catégorie à involution est une catégorie vérifiant les axiomes des groupoïdes larges ordonnés, l'axiome (INV), et telle que $a^o a$ soit défini $\forall$ a. Un objet est son propre réciproque.

Nous dirons que $a = BaA$ est

- injectif à gauche si et seulement si $aa^o \leqslant B$, ou $a \in IG$
- injectif à droite si et seulement si $a^o a \leqslant A$, ou $a \in ID$
- surjectif à gauche si et seulement si $A \leqslant a^o a$ ou $a \in SG$
- surjectif à droite si et seulement si $B \leqslant aa^o$ ou $a \in SD$.

L'ensemble $BG = IG \cap SG$ a pour éléments les applications, $BG \cap SD$ a pour éléments les surjections, $BG \cap ID$ pour éléments les injections, $BG \cap ID \cap SD$ les bijections.

Dans une catégorie à involution, on peut définir trois dualités.

1-dualité : La 1-dualité, comme $a \longrightarrow a^o$ est un anti-isomorphisme, revient à exprimer une propriété de a^o connaissant celle de a. L'expression 1-duale d'une expression est sa réciproque. Par 1-dualité :

ID s'échange avec IG

SD s'échange avec IG

$ID \cap SG$ s'échange avec $IG \cap SD$

le mot "gauche" s'échangeant avec "droite".

<u>2-dualité</u> : On appellera 2-dualité, le passage dans un ensemble ordonné d'une formule à celle obtenue en échangeant le membre de droite et le membre de gauche d'une inclusion. Par 2-dualité :

ID s'échange avec SG
IG s'échange avec SD .

<u>3-dualité</u> : Si on effectue successivement, dans un ordre d'ailleurs indifférent, les deux dualités, la formule ou propriété obtenue sera dite 3-duale. Par 3-dualité

ID s'échange avec SD
IG s'échange avec SG .

Une application reste une application, une injection devient une surjection et inversement. Ces remarques permettent d'énoncer sans démonstration des théorèmes duaux (1, 2 ou 3) d'un théorème donné, qui seront respectivement notés par 1, 2 ou 3 astérisques.

PROPOSITION III.2.1.

(a) Un morphisme est un monomorphisme si, et seulement si, son réciproque est un épimorphisme.

(b) Si $a \in IG \cap SD$, il est inversible à droite, et un de ses inverses à droite est a^o .

(c) Une bijection a est inversible, et son inverse unique est a^o .

(d) Les ensembles IG , ID , SG , SD , ainsi que leurs intersections sont des parties stables de la catégorie E .

<u>Démonstration</u>. - (a), (b), (c) sont immédiats.

(d) Si $a = BaA \in IG$ et $b = CbB \in IG$, $aa^o \leqslant B$, $bb^o \leqslant C$.

$$(ba)(ba)^o = baa^ob^o \leqslant bBb^o = bb^o \leqslant C \quad .$$

Démonstrations 1, 2 ou 3-duales pour les autres propriétés.

PROPOSITION III.2.2.

(a) Les produits aa^o et a^oa sont définis et symétriques pour tout a .

(b) Le produit a^oa est réflexif si $a \in SG$, transitif si $a \in IG$, et est une équivalence si a est une application (a^oa est alors appelée <u>équivalence associée</u> à l'application).

(c) Si i^o est une injection, i^oi est entier, symétrique, idempotent.

Démonstration. - (a) est immédiat.

(b) Si $a \in IG$, $a = BaA$, $aa^o \leqslant B$. Mais alors $a^oaa^oa \leqslant a^oBa \leqslant a^oa$, et a^oa est transitif. Si $a \in IG \cap SG$, a^oa est réflexif, symétrique et transitif, donc est une équivalence.

(c) Si $i^o \in IG \cap SG \cap ID$ et $i^o = Bi^oA$, $ii^o = A$, $i^oi \leqslant B$. Donc i^oi est entier et symétrique. De plus, $(i^oi)(i^oi) = i^oAi = i^oi$. Donc i^oi est idempotent.

3. Quotients d'un côté dans une catégorie à involution.

PROPOSITION III.3.1. - Soient, dans une catégorie à involution, deux morphismes $a = BaA$ et $b = CbA$.

(a) Si $a \in ID \cap SG$, le morphisme $x = ba^o$ vérifie $xa = b$;

(b) Si $a \in IG \cap SD$, il existe un morphisme unique vérifiant $xa = b$, qui est $x = ba^o$ si, et seulement si, $ba^oa = b$, et alors $xx^o = bb^o$. De plus, si $b \in F$ $(F = IG , ID , SG , SD)$, $x \in F$.

Démonstration. - (b) Si $aa^o = B$, $xa = b \implies xaa^o = x = ba^o$, ce qui prouve l'unicité de x , et alors $xa = b \iff ba^oa = b$. Mais alors

$$xx^o = ba^oab^o = bb^o \quad .$$

Donc

$$b \in IG \implies x \in IG \qquad \text{et} \qquad b \in SD \implies x \in SD \quad .$$

D'ailleurs $x^ox = ab^oba^o$. Si $b \in SG$, $b^ob \geqslant A$ et $x^ox \geqslant aAa^o = B$, et $x \in SG$. Si $b \in ID$, $b^ob \leqslant A$ et $x^ox \leqslant aAa^o = B$, et $x \in ID$.

PROPOSITION III.3.1*. - Soient deux morphismes a et b de même but.

(a) Si $a \in IG \cap SD$, le morphisme $x = a^ob$ vérifie $ax = b$.

(b) Si $a \in ID \cap SG$, il existe un morphisme unique x , vérifiant $ax = b$ si, et seulement si, $aa^ob = b$ et $x = a^ob$, $x^ox = b^ob$. De plus, si $b \in F$, $(F = IG , ID , SG , SD)$, $x \in F$.

PROPOSITION III.3.2. - Soient deux morphismes $a = BaA$ et $b = CbA$ de même source, tels que $a^oa \leqslant b^ob$.

(a) $b \in IG \implies ba^o \in IG$;

(a)** $a \in SD \implies ba^o \in SG$;

(b) $a \in SD$ et $b \in IG \implies ba^o$ est une application ;

(c) $a \in IG \cap SD$ et $b \in IG \cap ID \Longrightarrow ba^o$ est une injection ;

(c)*** $a \in SD \cap SG$ et $b \in IG \cap SD \Longrightarrow ba^o$ est une surjection ;

(d) $a^oa = b^ob$, $a \in SD \cap IG$, $b \in SD \cap IG \Longrightarrow ba^o$ est une bijection.

Démonstration.

(a) $ba^oab^o \leqslant bb^obb^o \leqslant C^2 = C$;

(a)** $ab^oba^o \geqslant aa^oaa^o \geqslant B^2 = B$;

(b) Résulte des deux premières propriétés ;

(c) D'après (b), $ba^o \in IG \cap SG$. D'ailleurs $a^o \in ID$ et $b \in ID \Rightarrow ba^o \in ID$;

(c)*** D'après (b), $ba^o \in IG \cap SG$. D'ailleurs $a^o \in SD$ et $b \in SD \Rightarrow ba^o \in SD$;

(d) En appliquant deux fois (b), on voit que ba^o et ab^o sont des applications. Comme ils sont réciproques, ce sont des bijections.

Application. - Soient f une surjection et E' un ensemble de morphismes a tels que $faf^of = fa$. Si on pose $h(a) = faf^o$,

(a) L'ensemble E' est stable dans E ;

(b) $h(a)\, h(a') = h(aa')$, $\forall$ a et a' éléments de E' ;

(c) Si $a \in IG$, $h(a) \in IG$, et si f est une bijection, la fonction h est une fonction bijective ;

(d) Si f' est une surjection telle que $f'(faf^o)\, f'^of' = f'(faf^o)$, l'élément $y = f'faf^of'^o = (h^oh')(a)$ vérifie l'équation $f'fa = yf'f$.

Démonstration.

(a) $faa'f^of = faf^of.a'f^of = faf^ofa' = faa'$.

(b) $h(a).h(a') = faf^o.fa'f^o = faa'f^o = h(aa')$.

(c) Si $aa^o \leqslant B$, avec $a = BaA$, $h(a)\, h(a^o) = faf^ofa^of^o = faa^of^o \leqslant ff^o$ et $h(a) \in IG$, puisque $f \in IG$. De même, $a \in SG \Longrightarrow h(a) \in SG$.

Si f est une bijection, donc inversible de $h(a) = faf^o$, on tire $a = f^oh(a)f$, et la fonction h est une fonction bijective.

(d) La démonstration est immédiate en posant $g = f'f$, à partir de la proposition III.3.1.

Soit s une surjection de source A . Nous noterons A/s le but de s , et une surjection étant un épimorphisme, l'objet quotient Es sera appelé objet quotient surjectif.

PROPOSITION III.3.3. - Soit $s = (A/s)sA$ une surjection.

(a) Si $b = BbA$ est une application, il existe un morphisme x tel que $b = xs$ si, et seulement si, $s^o s \leqslant b^o b$, et alors x est une application, $x = bs^o$.

(b) Si b est une surjection $t = (A/t)tA$, $Et \subseteq Es$ si, et seulement si, $s^o s \leqslant t^o t$, et on a $A/t = (A/s)/ts^o$.

(c) Soit s' une surjection de source A/s , où s est une surjection. On a $(A/s)/s' = A/s's$. De plus, si $s's = t$, on a $s^o s \leqslant t^o t$.

<u>Démonstration.</u>

(a) Supposons que $b = xs$. D'après III.3.1(b), on a $x = bs^o$, $bs^o s = b$, et x est une application si b est une application. Donc $b^o b = b^o bs^o s$, et comme $b \in SG$, on a $s^o s \leqslant b^o b$.

Réciproquement, si $s^o s \leqslant b^o b$, on a $bs^o s \leqslant (bb^o)b = b$, puisque b est une application, et $bs^o s \geqslant b$, car $s \in SG$. Donc $(bs^o)s = b$.

(b) Si en particulier b est une surjection t , et que $Et \subseteq Es$, $\exists\, x$ tel que $t = xs$, où x est une surjection (III.3.1(b)). D'après (a), il est équivalent de dire que $s^o s \leqslant t^o t$, et on a alors $A/t = (A/s)/ts^o$.

(c) Réciproquement, si s' est une surjection telle que $s's$ existe, alors $t = s's$ est une surjection, et le but $A/s's$ de t est égal au but de s' , $(A/s)/s'$. Comme t est multiple à gauche de s , on a $s^o s \leqslant t^o t$.

On voit que l'objet quotient Es ne dépend que de l'équivalence $s^o s$. On écrira $Es = A/s^o s$, et on aura $Et \subseteq Es$ si, et seulement si, $s^o s \leqslant t^o t$.

Par 3-dualité, si i^o est une injection de but A , nous noterons par $A//i$ la source de i^o , et le sous-objet $i^o E$ sera appelé <u>sous-objet injectif</u>.

PROPOSITION III.3.3***. - Soit i^o une injection de but A .

(a) Si b est une application de but A , il existe un morphisme x , tel que $b = i^o x$ si, et seulement si, $bb^o \leqslant i^o i$, et alors $x = ib$ est une application.

(b) Si b est une injection, $b = j^o = Aj^o(A//j)$, le sous-objet $j^o E \subseteq i^o E$ si, et seulement si, $j^o j \leqslant i^o i$, et on a

$$A//j = (A//i)//ji^o \quad .$$

(c) Si i'^o est une injection de but $A//i$, où i^o est une injection, $i^o i'^o = j^o$ est une injection, et on a

$$(A//i)//i' = A//i'i \quad \text{et} \quad j^o j \leqslant i^o i \quad .$$

On voit que le sous-objet $i^\circ E$ ne dépend que de $i^\circ i$. On notera $i^\circ E = A//i^\circ i$, et on aura $A//j^\circ j \subseteq A//i^\circ i$ si, et seulement si, $j^\circ j \leqslant i^\circ i$.

PROPOSITION III.3.4.

(a) Soient $i^\circ = Ai^\circ(A//i)$, $j^\circ = (A/s)\, j^\circ((A/s)//j)$ deux injections , s et t deux surjections $s = (A/s)sA$ et $t = ((A//i)/t)\, t(A//i)$ telles qu'on ait l'égalité

(1) $$j^\circ t = s i^\circ \quad .$$

Dans ces conditions, on a

(2) $$(A/s)//j = (A//i)t \quad .$$

(3) $$j^\circ = s i^\circ t^\circ \qquad \text{et} \qquad t = j s i^\circ$$

(4) $$j^\circ j = s i^\circ i s^\circ \qquad \text{et} \qquad t^\circ t = i s^\circ s i^\circ \quad .$$

(b) Si deux injections i° et j° vérifient la première égalité (4), s étant une surjection, $t = j s i^\circ$ est une surjection, et $j^\circ t = s i^\circ$.

(c) Si deux surjections s et t vérifient la deuxième égalité (4), i° étant une injection, $j^\circ = s i^\circ t^\circ$ est une injection, et on a $s i^\circ = j^\circ t$.

<u>Démonstration</u>. - Il est commode de faire le diagramme

$$\begin{tikzcd} A//i \arrow[r, "i^\circ"] \arrow[d, "t"'] & A \arrow[d, "s"] \\ (A/s)//j \arrow[r, "j^\circ"'] & A/s \end{tikzcd}$$

(a) De $j^\circ t = s i^\circ$, on tire $j^\circ = j^\circ t t^\circ = s i^\circ t^\circ$ et $t = j j^\circ t = j s i^\circ$. D'ailleurs $j^\circ j = s i^\circ t^\circ t i s^\circ \geqslant s i^\circ i s^\circ$, et d'autre part, $j^\circ j = s i^\circ(i s^\circ j^\circ j s i^\circ i s^\circ)$, en remplaçant t par sa valeur donnée dans (3), donne en majorant les six premiers facteurs $j^\circ j \leqslant s i^\circ i s^\circ$. D'où la première égalité (4). La deuxième se prouve de façon analogue.

(b) Soient deux injections i° et j° vérifiant $j^\circ j = s i^\circ i s^\circ$, où s est une surjection. Formons $t = j s i^\circ$. On a

$$t^\circ t = i s^\circ j^\circ j s i^\circ = i s^\circ . s i^\circ i s^\circ . s i^\circ \geqslant i A i^\circ i A i^\circ = A//i \quad .$$

Donc $t \in SG$,

$$t t^\circ = j s i^\circ i s^\circ j^\circ = j j^\circ j j^\circ = (A/s)//j \quad .$$

Donc $t \in IG \cap SD$.

D'ailleurs, $j^o t = j^o j s i^o \leqslant s i^o$, et en remplaçant $j^o j$ par sa valeur

$$j^o t = s i^o i s^o s i^o \geqslant s i^o i . A . i^o = s i^o \quad .$$

Donc $j^o t = s i^o$.

(c) La démonstration est duale de celle de (b).

4. Morphismes induits dans une catégorie à involution.

PROPOSITION III.4.1. - Soient trois morphismes BaA , $A'fA$, $B'gB$, où f est injective à gauche et surjective à droite. Il existe un morphisme induit à gauche de a par le couple (f , g) , c'est-à-dire vérifiant $a'f = ga$ si, et seulement si, on a $gaf^o f = ga$. Dans ces conditions, $a' = gaf^o$ a les mêmes qualités d'injectivité et de surjectivité que ga .

Démonstration. - Le morphisme a' est alors quotient à gauche de ga par f , et il suffit d'appliquer III.3.1(b).

Remarque. - Le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A' \arrow[r, "a'"] & B' \end{tikzcd}$$

est alors commutatif.

PROPOSITION III.4.2.

(a) Si g est une application ou si $g \in IG \cap SD$, la condition

(1) $$gaf^o f = ga$$

est équivalente à la condition

(2) $$g^o gaf^o f = g^o ga \quad .$$

(b) Si f et g sont deux surjections, le couple (q , r) d'équivalences, où $q = f^o f$, $r = g^o g$, est appelé congruence pour a si, et seulement si, on a

(2) $$raq = ra \quad .$$

La condition (2) est alors équivalente à

(3) $$aq \leqslant ra \quad .$$

(c) Si a est une application, f et g deux surjections, les conditions (1), (2), (3) sont équivalentes à

(4) $$aqa^o \leqslant r \quad .$$

Démonstration.

(a) Si on a $gaf^of = ga$, on a $g^ogaf^of = g^oga$. Réciproquement, si $g \in IG \cap SD$, ou si g est une application $gg^og = g$, et en multipliant à gauche par g les deux membres de (2), on obtient (1).

(b) Supposons (2) : $raq = ra$. Comme r est réflexive, on a (3) $aq \leqslant raq = ra$. Inversement, si $aq \leqslant ra$, $raq \leqslant r^2 a = ra$. Mais comme q est réflexive, $ra \leqslant raq$. Donc, $raq = ra$ (2).

(c) Si a est une application et $aq \leqslant ra$, on a $aqa^o \leqslant raa^o \leqslant r$, puisque $a \in IG$. D'ailleurs, si on a (4) : $aqa^o \leqslant r$, $aqa^oa \leqslant ra$, et comme $a \in SG$,

$$aq \leqslant aqa^oa \leqslant ra \qquad (3).$$

PROPOSITION III.4.3.

(a) Si les (q_i , r_i) sont des congruences pour a $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et si les q_i d'une part et les r_i d'autre part sont permutables, alors $(q_1 \dots q_n , r_1 \dots r_n)$ est une congruence pour a .

(b) Si a est une application et que (q , r) , (q' , r') soient deux congruences pour a , l'<u>intersection des deux congruences</u> $(q \wedge q' , r \wedge r')$ est une congruences pour a .

Démonstration.

(a) On a $aq_i \leqslant r_i a$, $\forall i$. Par récurrence, supposons $aq_1 \dots q_k \leqslant r_1 \dots r_k a$. On a

$$aq_1 \dots q_{k+1} \leqslant r_1 \dots r_k aq_{k+1} \leqslant r_1 \dots r_k r_{k+1} a \quad .$$

Si les q_i sont permutables, leur produit est une équivalence. Il en est de même pour les r_i , et par suite, $(q_1 \dots q_n , r_1 \dots r_n)$ est une congruence pour a .

(b) Supposons $aqa^o \leqslant r$, $aq'a^o \leqslant r'$.

$$a(q \wedge q')a^o \leqslant aqa^o \wedge aq'a^o \leqslant r \wedge r' \quad .$$

Par dualités, on obtient les propositions suivantes :

PROPOSITION III.4.1*. - Soient trois morphismes a^o , f^o , g^o , où $f^o \in ID \cap SG$; il existe un morphisme induit à droite de a^o par le couple (f^o , g^o) , c'est-à-dire vérifiant $f^oa'^o = a^og^o$ si, et seulement si, on a la condition

(1') $$f^ofa^og^o = a^og^o \quad .$$

Dans ces conditions $a'^o = fa^og^o$ a les mêmes qualités d'injectivité et de surjectivité que a^og^o .

PROPOSITION III.4.2***.

(a) Si g° est une application ou si $g^\circ \in ID \cap SG$, la condition (1') est équivalente à la condition

(2') $$f^\circ f a^\circ g^\circ g = a^\circ g^\circ g \quad .$$

(b) Si f° et g° sont des injections, le couple (u , v), où $u = f^\circ f$, $v = g^\circ g$, est appelé <u>couple stable</u> pour a° si, et seulement si, on a

(2') $$u a^\circ v = a^\circ v \quad .$$

La condition (2') est alors équivalente à

(3') $$a^\circ v \leqslant u a^\circ \quad .$$

(c) Si a° est une application, et f°, g° deux injections, les conditions (1'), (2'), (3') sont équivalentes à

(4') $$v \leqslant a u a^\circ \quad .$$

PROPOSITION III.4.3***.

(a) Si les (u_i , v_i) sont n couples stables pour a°, on a

$$a^\circ(v_1 \ldots v_n) \leqslant (u_1 \ldots u_n)a^\circ \quad .$$

(b) Si a° est une application, et que (u , v) et (u' , v') soient des couples stables pour a°, l'<u>intersection des couples stables</u> $(u \wedge u' , v \wedge v')$ est un couple stable pour a°.

PROPOSITION III.4.4. - Soit $a = AaA$.

(a) Le morphisme induit faf° est symétrique, $\forall f$, si a est symétrique ;

(b) Si a est réflexif, et si $f \in SD$, le morphisme faf° est réflexif ;

(c) Si a est transitif, le morphisme faf° est transitif, si $f \in ID$ ou si $(f^\circ f , f^\circ f)$ est une congruence pour a.

<u>Démonstration</u>.

(a) $(faf^\circ)^\circ = fa^\circ f^\circ$ et $a^\circ = a \implies faf^\circ$ symétrique.

(b) Si a est réflexif, $faf^\circ \geqslant ff^\circ$ et si $f \in SD$, faf° est réflexif.

(c) $faf^\circ . faf^\circ \leqslant fa^2 f^\circ \leqslant faf^\circ$ si a est transitif, et $f \in ID$. Si $(f^\circ f , f^\circ f)$ est une congruence pour a, $faf^\circ f = fa$ et faf° est transitif.

PROPOSITION III.4.5. - Soient $a = BaA$ un morphisme, (u, v) un couple stable pour a, $u = i^o i$, $v = j^o j$, i^o, j^o des injections, et (q, r) une congruence pour a, avec $q = s^o s$, $r = t^o t$, s et t étant deux surjections.

(a) On a les formules

$$rav = rurav = ravqv \quad .$$

(b) (jqj^o, iri^o) est une congruence pour le morphisme induit iaj^o.

(b)*** (tut^o, svs^o) est un couple stable pour le morphisme induit tas^o.

<u>Démonstration</u>. - Il y a intérêt à faire le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A//j \arrow[r, "iaj^o"] \arrow[d, "j^o"'] & B//i \arrow[d, "i^o"] \\
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "s"'] & B \arrow[d, "t"] \\
A/s \arrow[r, "tas^o"] & B/t
\end{tikzcd}$$

(a) Par hypothèse, $uav = av$, $raq = ra$. Comme $u \leqslant B$, $rurav \leqslant r^2 av = rav$. Mais comme $r \geqslant B$, on a $rurav \geqslant ruav = rav$. D'où

$$rav = rurav \quad .$$

D'ailleurs, $ravqv \geqslant rav^2 = rav$, puisque

$$q \geqslant A \quad \text{et} \quad v \leqslant A \implies ravqv \leqslant raqv = rav \quad .$$

(b) Il faut prouver que $iri^o.iaj^o.jqj^o = iri^o.iaj^o$, que $iruavqj^o = iruaj^o$, ou encore que $iravqj^o = iruaj^o$. Mais $ravqv = rav = ruav \implies iravqj^o = iruaj^o$ en multipliant à droite par j^o et à gauche par i.

(b)*** Il faut prouver que $tut^o.tas^o.svs^o = tas^o.svs^o$, que $turaqvs^o = taqvs^o$, ou que $turavs^o = taqvs^o$. Mais de $rurav = rav = raqv$, on tire, en multipliant à gauche par t et à droite par s^o, $turavs^o = taqvs^o$.

Soient deux parties stables F et G d'une catégorie E. Nous dirons que le morphisme a' est (F, G)-<u>homomorphe</u> au morphisme a s'il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $ga = a'f$. Il revient au même de dire que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A' \arrow[r, "a'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

PROPOSITION III.4.6. - La relation R entre morphismes $(a, a') \in R$ si, et seulement si, a' est (F, G)-homomorphe à a, est une relation transitive. Elle est de plus réflexive si F et G contiennent les objets de E.

Démonstration. - $ga = a'f$ et $g'a' = a''f'$ entraînent $g'(a'f)$ et par suite, $g'ga$, et donc $g'g$, sont définis, et $g'g \in G$ car G est stable. De même, $f'f$ est défini, et on a $g'ga = g'a'f = a''f'f$.

Nous dirons que a' est homomorphe à a si F et G sont confondus avec la classe des surjections de E. Le couple (f, g), dans le cas général, est appelé (F, G)-homomorphisme, et homomorphisme si f et g sont des surjections.

Remarque. - La relation entre morphismes $(a, a') \in R \iff \exists f \in F$ et $g \in G$, $a' = fag$, est une relation de préordre analogue aux (F, G)-homomorphismes.

Un isomorphisme est un (F, G)-homomorphisme où $F = G$ est la classe des bijections de E.

Nous dirons que deux objets d'une catégorie A et A' sont en bijection s'il existe une bijection $f = A'fA$.

PROPOSITION III.4.7.

(a) Le couple (f, g) de surjections est un homomorphisme pour a, si, et seulement si, le couple (q, r), avec $q = f^\circ f$, $r = g^\circ g$ est une congruence pour a.

(b) Si les objets (A, A') d'une part, (B, B') d'autre part, sont en bijection, et si $A'fA = f$, $B'gB = g$, les morphismes $a = BaA$ et $a' = B'gaf^\circ A'$ sont isomorphes.

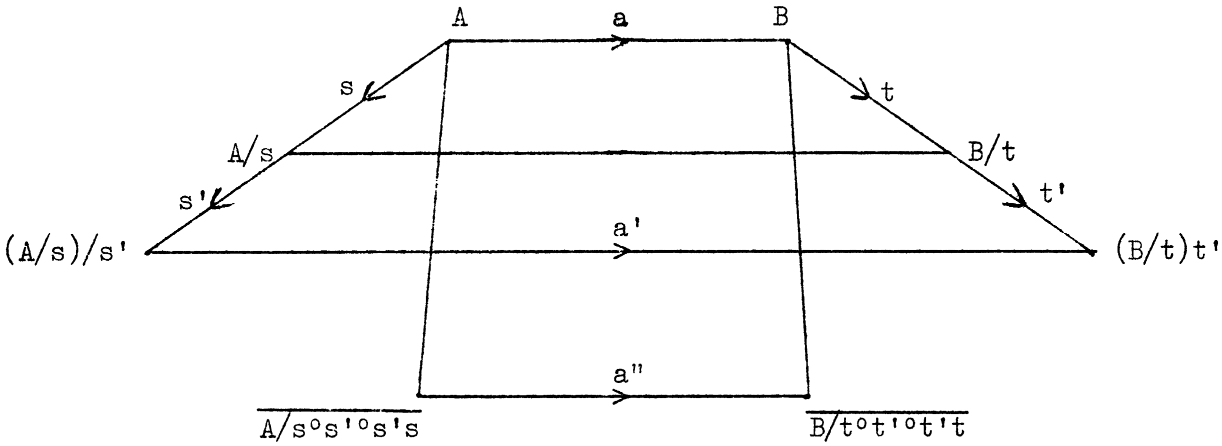
Démonstration.

(a) D'après la proposition III.4.2(b), $\exists f, g$ surjections telles que $a'f = ga$ si, et seulement si, (q, r) est une congruence pour a.

(b) Si f et g sont deux bijections, on a $f^\circ f = A$ et $g^\circ g = B$. Donc $(f^\circ f, g^\circ g)$ est une congruence pour tout morphisme a, et $a' = gaf^\circ$ est isomorphe à a, $\forall a$.

COROLLAIRE (Théorème d'homomorphisme). - Si s, t, s', t' sont des surjections, et si $(s^\circ s, t^\circ t)$ est une congruence pour BaA, tout morphisme $\overline{(B/t)/t'^\circ t'}\; a' \;\overline{(A/s)/s'^\circ s'}$ est isomorphe à un morphisme $\overline{B/t^\circ t'^\circ t' t}\; a'' \;\overline{A/s^\circ s'^\circ s' s}$. Si $(s'^\circ s', t'^\circ t')$ est congruence pour a', a' est homomorphe à a.

<u>Démonstration</u>. - D'après III.3.3(c), tout but d'une surjection de $\overline{(A/s)/s'^o s'}$ est en bijection avec tout but de $\overline{A/s^o s'^o s' s}$, et de même pour $\overline{(B/t)/t'^o t'}$ et $\overline{B/t^o t'^o t' t}$.



ÉNONCÉ ABRÉGÉ. - <u>Tout quotient par une congruence d'un objet quotient est isomorphe au quotient par la congruence relevée</u>.

5. Relations entre les propriétés d'un produit et celles de ses facteurs.

PROPOSITION III.5.1.

(a) Si $a \in ID$, $a = A'aA$ est tel qu'il existe $x^o \leqslant a$, et $A' \leqslant ax$, alors $a = x^o$ et $a \in ID \cap SD$.

(b) $b \in IG$ et $a \in IG \implies (ab \in IG \cap SD \implies a \in SD \cap IG)$.

(c) $a \in IG$ et $a \geqslant abb^o \implies ab \in IG$.

(d) $a \in ID$, $b \in IG$ et $ab \in SD \implies a = abb^o$ et $a \in ID \cap SD$.

<u>Démonstration</u>.

(a) On suppose $a^o a \leqslant A$, $x^o \leqslant a$, $A' \leqslant ax$. De la dernière inclusion, on tire $a^o \leqslant a^o ax \leqslant Ax = x$. D'où $a = x^o$, $A' \leqslant aa^o$ et $a \in SD$.

(b) Si $aa^o \leqslant A'$, $bb^o \leqslant A$, $abb^o a^o = A'$. Donc $A' \leqslant abb^o a^o \leqslant aa^o \leqslant A'$, et par suite $aa^o = A'$, et $a \in SD$.

(c) Si $aa^o \leqslant A'$ et $a \geqslant abb^o$, $abb^o a^o \leqslant A'$ et $ab \in IG$.

(d) Supposons $a \in ID$, $b \in IG$, $ab \in SD$, où

$$a^o a \leqslant A \ , \quad bb^o \leqslant A \ , \quad abb^o a^o \geqslant A' \ .$$

Posons $x^o = abb^o$. Il vient $x^o \leqslant a$ et $A' \leqslant ax$. D'après (a), $a = abb^o$ et $a \in SD$.

Par dualités, on obtient les résultats suivants.

PROPOSITION III.5.1*.

(b)* $b \in ID$, $a \in ID$, $ab \in ID \cap SG \implies b \in ID \cap SG$.

(b)** $b \in SD$, $a \in SD$, $ab \in IG \cap SD \implies a \in IG \cap SD$.

(b)*** $b \in SG$, $a \in SG$, $ab \in ID \cap SG \implies b \in ID \cap SG$.

(c)* $b \in ID$ et $b \leqslant a^o ab \implies ab \in ID$.

(c)** $a \in SD$ et $a \leqslant a^o ab \implies ab \in SD$.

(c)*** $b \in SG$ et $b \leqslant a^o ab \implies ab \in SG$.

(d)* $a \in ID$, $b \in IG$, $ab \in SG \implies b = a^o ab$ et $b \in IG \cap SG$.

(d)** $a \in SG$, $b \in SD$, $ab \in IG \implies a = abb^o$ et $a \in SG \cap IG$.

(d)*** $a \in SG$, $b \in SD$, $ab \in ID \implies b = a^o ab$ et $b \in SD \cap ID$.

PROPOSITION III.5.2.

(a) Un morphisme injectif à gauche et inversible à gauche est injectif à droite.

(a)*** Un morphisme surjectif à gauche et inversible à droite est surjectif à droite.

(b) Si une application est inversible, son inverse unique est sa réciproque.

(c) Tous les inverses à gauche d'une injection sont surjectifs à droite.

(c)*** Tous les inverses à droite d'une surjection sont injectifs à droite.

Démonstration.

(a) Si $a = A'aA$ et $xa = A$, on a $xaa^o \leqslant xA' = x$. Donc $a^o \leqslant x$ et $a^o a \leqslant xa = A$.

(b) Si une application est inversible, son inverse x est, d'après (a), telle que $x \geqslant a^o$ et, d'après (a)*** telle que $a^o \leqslant x$. Donc $x = a^o$.

(c) Si $a^o a = A$ et $aa^o \leqslant A'$, de $xa = A$, on tire $xaa^o = a^o$, et $xaa^o \leqslant xA' = x$. Donc $a^o \leqslant x$, $a \leqslant x^o$ et $a^o a \leqslant xx^o$, ce qui prouve que $x \in SD$.

PROPOSITION III.5.3.

(a) Si $c = ba$, $b \in SG \cap ID$, et $c \in SD$, alors $a \in SD$.

(a)*** $b \in IG \cap SD$ et $ab \in ID \implies a \in ID$.

Démonstration. - On a $a = b^o ba$ et $aa^o = b^o baa^o b^o b \geqslant b^o b$, ce qui prouve que $a \in SD$, puisque $b \in SG$.

PROPOSITION III.5.4. - Si g est une application, gf et hg des bijections, alors f , g , h sont des bijections.

<u>Démonstration</u>. - Supposons $f = BfA$, $g = CgB$, $h = DhC$. Comme $gff^o g^o = C$, g est inversible à droite. De même, hg est inversible à gauche et par suite g est aussi inversible à gauche. Donc g est une bijection.

De $gff^o g^o = C$, on tire $gff^o g^o g = gff^o = g$ et $g^o gff^o = g^o g = B$ ou $ff^o = B$, ce qui montre que f est inversible à droite. De même, $f^o g^o gf = A$ prouve que f est inversible à gauche. Donc f est une bijection.

Même démonstration pour prouver que h est une bijection.

PROPOSITION III.5.5.

(a) Si parmi hgf , gfh , fhg , deux sont des injections et le troisième une surjection, alors f , g , h , sont des bijections.

$(a)^{***}$ Si parmi hgf , gfh , fhg , deux sont des surjections et le troisième une injection, alors f , g , h , sont des bijections.

<u>Démonstration</u>. - (a) Supposons hgf , gfh injections, et fhg surjection. De $f^o g^o h^o hgf = A$ on tire que f est inversible à gauche, mais comme f est injective à gauche, f est injective à droite. De même $B = fhgg^o h^o f^o$ montre que f est inversible à droite, et par suite, f est une bijection.

$hgff^o = hg$ est le produit des deux injections hgf et f^o . Donc hg est une injection, et $f^o(fhg) = hg$ est le produit de deux surjections, donc une surjection. Donc hg est une bijection. En considérant gfh et fhg au lieu de hgf et fhg , on voit que g est une bijection, et par suite $(hg)g^o = h$ est une bijection.

PROPOSITION III.5.6.

(a) S'il existe une injection i^o telle que $a = ai^o i$, ai^o est surjectif à gauche si, et seulement si, $i^o \leqslant a^o ai^o$.

$(a)^{***}$ S'il existe une surjection s telle que $a = s^o sa$, sa est injectif à gauche si, et seulement si, $saa^o \leqslant s$.

$(a)^{**}$ S'il existe une injection i^o telle que $a = ai^o i$, ai^o est injectif à droite si, et seulement si, $a^o ai^o \leqslant i^o$.

$(a)^{*}$ S'il existe une surjection s telle que $a = s^o sa$, sa est surjectif à droite si, et seulement si, $s \leqslant saa^o$.

Démonstration.

(a) Si $ai^o \in SG$, on a $A//i \leqslant ia^oai^o$, et en multipliant à gauche par i^o ,

$$i^o \leqslant i^oia^oai^o = a^oai^o \text{ , car } i^oia^o = a^o \text{ .}$$

Réciproquement, si $i^o \leqslant a^oai^o$, il vient, en multipliant à gauche par i ,

$$A//i \leqslant ia^oai^o \text{ , et } ai^o \in SG \text{ .}$$

PROPOSITION III.5.7.

(a) Si r est une équivalence et si $r = s^os$, avec ss^o neutre, s est une surjection, et on a $sr = s$.

(b) Si r est réflexif et vérifie $r = rr^or$, c'est une équivalence.

(c) Si a est symétrique et transitif, en particulier si a est une équivalence et si $b \in SG$, $b \leqslant a$, on a $a = ab$.

Démonstration.

(a) On a d'abord $sr = ss^os = s$. D'ailleurs s^os est réflexif. Donc $s \in SD$, et par suite, comme ss^o est neutre, s est une surjection.

(b) Si $A \leqslant r$, on a $r^o \leqslant r^or$ et $r^o \leqslant rr^o$. D'où $rr^o \leqslant rr^or$, et par suite $rr^o \leqslant r$. Mais de $r^o \leqslant rr^o$, on tire, en prenant les réciproques, $r \leqslant rr^o$. D'où $r = rr^o$, ce qui prouve que r est symétrique. D'ailleurs $r^2 = rr^o = r$, ce qui prouve que r est idempotent.

(c) Supposons $A \leqslant b^ob$, alors $ab \leqslant a^2 = a$ d'une part. Mais d'autre part, $A \leqslant b^ob \implies a \leqslant ab^ob$. Comme $b \leqslant a$, $b^o \leqslant a^o = a$ et $a \leqslant a^2b$ donne $a \leqslant ab$. Donc $a = ab$.

PROPOSITION III.5.8.

(a) Si un monomorphisme a vérifie $a = aa^oa$, il est inversible à gauche. En particulier, si une application est un monomorphisme, cette application est une injection.

(a)* Si un épimorphisme a vérifie $a = aa^oa$, il est inversible à droite. En particulier, si une application est un épimorphisme, c'est une surjection.

Démonstration.

(a) Si a est un monomorphisme, et $a = aa^oa$, on a $aA = a(a^oa)$. D'où $A = a^oa$ et par suite, $a \in ID \cap SG$.

Si a est une application et un monomorphisme, comme $a = aa^oa$, on en déduit que a est une injection.

(a)* Même démonstration.

6. Exemples et applications.

PROPOSITION III.6.1. - Soient F un groupoïde large ordonné à multiplication compatible, et $\overline{F}$ un groupoïde anti-isomorphe à F (par exemple $\overline{F}$ le groupoïde large 1-dual de E). On ordonne $\overline{F}$ par $\overline{a} \leqslant \overline{b} \iff a \leqslant b$. On considère l'ensemble $E = (F \cup \overline{F} \times F \cup \overline{F})$ formé de couples (x , y) où x et y sont éléments de F ou de $\overline{F}$, et on définit dans E une multiplication

$$(x , y)(x' , y') = (xx' , yy') \quad ,$$

qui n'est définie que si xx' existe ainsi que yy' (x et x' doivent appartenir tous deux à E ou $\overline{E}$ et être composables, et de même pour y , y'). Les éléments de E sont ordonnés par $(x , y) \leqslant (x' , y') \iff x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$.

(a) E est un groupoïde large ordonné à multiplication compatible. Si F est un demi-groupe large ou une catégorie, il en est de même de E .

(b) Si $(x , y) = (a , b)$, $(a , b \in F)$, on pose $(x , y)^\circ = (\overline{b} , \overline{a})$.

Si $(x , y) = (a , \overline{b})$, $(a , b \in F)$, on pose $(x , y)^\circ = (b , \overline{a})$.

Si $(x , y) = (\overline{a} , b)$, $(a , b \in F)$, on pose $(x , y)^\circ = (\overline{b} , a)$.

Si $(x , y) = (\overline{a} , \overline{b})$, $(a , b \in F)$, on pose $(x , y)^\circ = (b , a)$.

Dans ces conditions, l'application de E dans E , $(x , y) \longrightarrow (x , y)^\circ$ vérifie (INV-i), (INV-ii), (INV-iii). De plus, F est isomorphe à la partie de E formée de couples de la forme (a , a) , où $a \in F$. Mais (x , y) n'est pas composable avec $(x , y)^\circ$.

(c) Si F est un groupoïde large ordonné à multiplication compatible, $F \times F$ vérifie l'axiome (INV-i), (INV-ii), (INV-iii), en posant $(a , b)^\circ = (b , a)$ et $(a , b)(c , d) = (ac , db)$, $(a , b) \leqslant (c , d) \iff a \leqslant c$ et $b \leqslant d$.

La démonstration est laissée au lecteur.

Soit F un groupoïde de Brandt dont les éléments seront désignés par des minuscules grecques. On se donne dans $P(F)$ une classe U d'éléments $U_i \in P(F)$, les U_i étant formés d'éléments neutres de F , et on considère tous les triplets de la forme (U' , a , U'') , où $U' \in U$, $U'' \in U$, et où $a \in P(F)$ est formé d'éléments de F , α , dont la source est élément de U'' et le but est élément de U' . On munit la classe E de ces triplets de la structure définie en I.2.4. D'après I.2.4

E est une catégorie que nous appellerons catégorie induite d'un groupoïde de Brandt (par exemple la catégorie formée de toutes les relations binaires entre ensembles donnés, la catégorie des parties d'un groupe).

PROPOSITION III.6.2. - Soit E une catégorie induite d'un groupoïde de Brandt F:

(a) E est une catégorie à involution ;

(b) Soit un morphisme de E : $(U', a, U")$. On considère l'application f de a dans U', qui à tout morphisme $\alpha \in a$, fait correspondre $f(\alpha) \in U'$, but de α dans F :

(i) $(U', a, U")$ est surjectif à droite si, et seulement si, f est surjective.

(ii) $(U', a, U")$ est surjectif à droite si, et seulement si, $(U', a, U")$ n'est pas diviseur à droite de $\emptyset$.

(iii) $(U', a, U")$ est injectif à droite si, et seulement si, f est injective.

(c) Tout monomorphisme est surjectif à gauche.

Démonstration.

(a) Nous poserons $(U', a, U") \leqslant (U', b, U")$ si, et seulement si,

$$\alpha \in a \implies \alpha \in b \quad ,$$

c'est-à-dire la relation d'inclusion ensembliste. Les axiomes (O) et (OC) sont évidemment vérifiés. On posera

$$(U', a, U")^{\circ} = (U", a^{\circ}, U') \quad ,$$

où a° est formé de tous les inverses dans F des éléments de a :

$$\alpha \in a \iff \alpha^{\circ} \in a^{\circ} \quad .$$

Alors (INV-i) et (INV-iii) sont évidemment vérifiés. D'ailleurs, si on a deux éléments de E, $(U', a, U")$ et $(U", b, U"')$:

$$\gamma \in (U', ab, U"')^{\circ} \iff \gamma \in (U"', (ab)^{\circ}, U') \iff \gamma = \beta^{\circ}\alpha^{\circ} \iff$$
$$\gamma \in (U"', b^{\circ}, U")(U", a^{\circ}, U') \ .$$

On voit aussi que $(U', a, U")(U", a^{\circ}, U')$ est toujours défini. Donc E est une catégorie à involution.

(b)-(i) Supposons que $(U', a, U") \in SD$, où $(U', U', U') \leqslant (U', aa^{\circ}, U')$. Si $A' \in U'$ (A' neutre dans F), on a alors $A' = \alpha\alpha'^{\circ}$, où $\alpha \in a$, $\alpha' \in a$ et par suite, A' est but de α. Donc f est surjective.

Réciproquement, si f est surjective, $\forall A' \in U'$, $\exists \alpha \in a$ de but A'. Soit $\alpha \in A'aA''$, où $A'' \in U''$. Alors $\alpha^o = A''\alpha^o A' \in a^o$, et

$$(A', A', A') = (A', \alpha\alpha^o, A') \in (U', aa^o, U') .$$

Donc $(U', U', U') \subseteq (U', aa^o, U')$ et $(U', a, U'') \in SD$.

(b)-(ii) Supposons que

$$(U'', b, U''') \in SD \text{ et } (U', a, U'')(U'', b, U''') = \emptyset = (U', \emptyset, U''') .$$

Si a contient au moins un élément $\alpha \in F$, de source $A'' \in U''$, comme A'' est but d'au moins un morphisme $\beta \in b$, le produit $(U', a, U'')(U'', b, U''')$ contient au moins le morphisme $\alpha\beta$ et par suite ne peut être vide.

Réciproquement, supposons que $(U'', b, U''') \notin SD$. Alors $\exists A'' \in U''$, tel qu'il n'y ait aucun élément $\beta \in b$, de but A'', et

$$(U'', A'', U'')(U'', b, U''') = (U'', \emptyset, U''') .$$

(b)-(iii) Supposons que f soit injective. Alors $\forall A' \in U'$, il existe au plus un $\alpha \in a$, de but A'. Si $\xi = A\xi B$, $\xi B \in a^o a$, avec $A \in U''$, $B \in U''$, on a $\xi = \alpha'^o\alpha$, où α, α' sont éléments de A. Si A' est le but de A, c'est aussi le but de α', car A' est la source de α'^o. Donc $\alpha = \alpha'$, et

$$(U'', a^o a, U'') \subseteq (U'', U'', U'') \text{ et } (U', a, U'') \in ID .$$

Réciproquement, si $(U', a, U'') \in ID$, alors $(U'', a^o a, U'') \leqslant (U'', U'', U'')$ et $\alpha'^o\alpha = A'' \in U''$. En vertu de l'unicité de l'inverse dans un groupoïde de Brandt, $\alpha' = \alpha$, et il n'existe qu'un seul morphisme ayant même but que α dans a.

(c) Montrons que si (U', a, U'') n'est pas surjectif à gauche, ce n'est pas un monomorphisme, avec $(U', a, U'') = \emptyset$. Il existe $A'' \in U''$, qui n'est source d'aucun morphisme $\alpha \in a$. Soit $\alpha = B'\alpha B'' \in a$, et considérons les morphismes

(U'', b, U'') formé du seul morphisme de F, $B'' = (U'', B'', U'')$

et

(U'', c, U'') formé des deux morphismes de F, (U'', B'', U'') et (U'', A'', U'').

On a $(U', a, U'')(U'', b, U'') = (U', a, U'')(U'', c, U'')$, car les deux membres sont formés des morphismes de (U', a, U'') de source B'', et $b \neq c$. Donc (U', a, U'') n'est pas un monomorphisme.

PROPOSITION III.6.2*.

(b) Soit un morphisme de E, (U', a, U''). On considère l'application g de a dans U'', qui à tout morphisme $\alpha \in a$ fait correspondre sa source $g(\alpha) \in U''$.

(i) (U', a, U'') est surjectif à gauche si, et seulement si, g est surjective.

(ii) (U', a, U'') est surjectif à gauche si, et seulement si, (U', a, U'') n'est pas diviseur de $\emptyset$ à gauche.

(iii) (U', a, U'') est injectif à gauche si, et seulement si, g est injective.

(c) Tout épimorphisme est surjectif à droite.

Remarque. - Le lecteur interprétera les résultats dans le cas des relations binaires.

Application. - Une structure algébrique à une opération n-aire peut être définie par une application a d'un ensemble $U = U_1 \times \ldots \times U_n$, appelé ensemble des données dans un ensemble V, appelé ensemble de résultats. Nous représenterons par (V, a, U) cette structure.

Une structure (V', a', U') est homomorphe à a dans un homomorphisme surjectif (f, g), si f et g sont deux surjections $f = U'fU$, $g = V'gV$, telles que :

$$a'f(x) = ga(x) \ , \quad \forall\, x \in U \ , \text{ ou } \quad a'f = ga \ .$$

Pratiquement, on posera $f(x) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$ où les f_i sont des surjections de U_i sur U'_i avec $U' = U'_1 \times \ldots \times U'_n$.

Si $q = f^\circ f$, $r = g^\circ g$ sont les équivalences associées à f et g, le couple (f, g) sera un homomorphisme de (V, a, U) si, et seulement si,

(1) $$x \equiv y \pmod q \implies a(x) \equiv a(y) \pmod r \ ,$$

où $\binom{x}{y} \in q \implies \binom{a(x)}{a(y)} \in r$. Mais

$$\binom{a(x)}{a(y)} = \binom{y}{a(y)}\binom{x}{y}\binom{a(x)}{x}$$

et la condition (1) revient à

$$aqa^\circ \leqslant r$$

qui exprime que (q, r) est congruence pour a.

Remarque. - Dans le cas des groupoïdes, si on fait $f_1 = f_2 = g$, on retrouve les équivalences compatibles.

Si $U'' \subseteq U$, $V'' \subseteq V$, (U'', V'') est stable pour a, si $x \in U'' \implies a(x) \in V''$. Désignant par i° l'injection canonique de U dans U'', et par j° l'injection canonique de V'' dans V, cela revient à dire que

$$x = i^\circ ix \implies ax = j^\circ jax$$

ou encore que

$$\binom{x}{x} \in i^\circ i \implies \binom{x}{x} \in a^\circ j^\circ ja \quad .$$

En posant $i^\circ i = v$, $j^\circ j = u$, cela revient à $v \leqslant a^\circ ua$, on voit que (V'', U'') est stable pour a si, et seulement si, (u, v) est un couple stable pour a.

PROPOSITION III.6.3. - Dans la catégorie à involution des parties d'un groupe F, tout élément est surjectif, tout complexe transitif (c'est-à-dire stable) et symétrique est une équivalence (c'est-à-dire un sous-groupe).

IV. Demi-groupe large modulaire

1. Égalités et inégalités modulaires.

Soit un demi-groupe large ordonné en demi-treillis, et à multiplication compatible. Nous dirons qu'il est modulaire si on peut définir dans E une application $a \longrightarrow a^\circ$, satisfaisant à

$$(\text{INV-i}) \quad (a^\circ)^\circ = a \ , \qquad (\text{INV-iii}) \quad a \leqslant b \implies a^\circ \leqslant b^\circ \ ,$$

et aux égalités dites égalités modulaires :

$$(M_1) \qquad \begin{cases} ab \wedge c = a(b \wedge a^\circ c) \wedge c \\ ab \wedge c = (a \wedge cb^\circ)b \wedge c \quad . \end{cases}$$

PROPOSITION IV.1.1.

(a) Les égalités modulaires (M_1) sont équivalentes aux inégalités

$$(M_2) \qquad \begin{cases} ab \wedge c \leqslant a(b \wedge a^\circ c) \\ ab \wedge c \leqslant (a \wedge cb^\circ)b \quad . \end{cases}$$

(b) Les égalités modulaires (M_1) sont équivalentes à l'égalité modulaire

$$(M) \qquad ab \wedge c = ((a \wedge cb^\circ)(b \wedge a^\circ c)) \wedge c \quad .$$

(c) L'égalité modulaire (M) est équivalente à l'inégalité modulaire

$$(M') \qquad ab \wedge c \leqslant (a \wedge cb^\circ)(b \wedge a^\circ c) \quad .$$

Démonstration.

(a) Supposons qu'on ait (M_1). Alors :

$$ab \wedge c = a(b \wedge a^\circ c) \wedge c \leqslant a(b \wedge a^\circ c) \quad ,$$

ce qui prouve la première inégalité (M_2). Même démonstration pour la deuxième inégalité (M_2) à partir de la deuxième égalité (M_1).

Supposons qu'on ait $ab \wedge c \leqslant a(b \wedge a^\circ c)$. On en déduit

$$ab \wedge c = ab \wedge c \wedge c \leqslant a(b \wedge a^\circ c) \wedge c \quad .$$

Mais d'ailleurs

$$a(b \wedge a^\circ c) \leqslant ab \implies a(b \wedge a^\circ c) \wedge c \leqslant ab \wedge c \quad .$$

D'où la première égalité (M_1). Même raisonnement pour la deuxième égalité (M_1).

(b) Supposons qu'on ait les deux égalités (M_1)

$$ab \wedge c = a(b \wedge a^\circ c) \wedge c \quad .$$

Appliquons au deuxième membre la deuxième égalité (M_1)

$$a(b \wedge a^\circ c) \wedge c = ((a \wedge c(b \wedge a^\circ c)^\circ)(b \wedge a^\circ c)) \wedge c \quad .$$

Comme $(b \wedge a^\circ c)^\circ \leqslant b^\circ$, en vertu de (INV-iii), on a

$$ab \wedge c \leqslant ((a \wedge cb^\circ)(b \wedge a^\circ c)) \wedge c \quad ,$$

et comme $(a \wedge cb^\circ)(b \wedge a^\circ c) \leqslant ab$, on a aussi l'inclusion contraire. D'où l'égalité (M).

Réciproquement, supposons qu'on ait (M), $ab \wedge c = ((a \wedge cb^\circ)(b \wedge a^\circ c) \wedge c$. Comme

$$a \wedge cb^\circ \leqslant a \ , \quad ab \wedge c \leqslant a(b \wedge a^\circ c) \ , \text{ première inégalité } (M_2)$$

et

$$b \wedge a^\circ c \leqslant b \ , \quad ab \wedge c \leqslant (a \wedge cb^\circ)b \ , \text{ deuxième inégalité } (M_2).$$

(c) Supposons qu'on ait (M), $ab \wedge c = ((a \wedge cb^\circ)(b \wedge a^\circ c)) \wedge c$. Alors on a évidemment (M'). Réciproquement, si on a

$$\text{(M')} \qquad ab \wedge c \leqslant (a \wedge cb^\circ)(b \wedge a^\circ c) \quad ,$$

on en déduit

$$ab \wedge c \wedge c \leqslant ((a \wedge cb^\circ)(b \wedge a^\circ c)) \wedge c$$

et on a l'égalité comme on a l'inclusion contraire.

PROPOSITION IV.1.2. - Un treillis est modulaire, avec $a = a^\circ$, et la multiplication étant l'opération $\vee$ si et seulement s'il satisfait à la condition de Dedekind

$$a \leqslant c \implies a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c \quad .$$

Démonstration. - Si la multiplication est commutative, les deux égalités (M_1) se réduisent à une seule. Supposons qu'on ait (M_1)

$$(a \vee b) \wedge c = (a \vee (b \wedge (a \vee c))) \wedge c \quad .$$

Supposons $a \leqslant c$, le deuxième membre s'écrit $(a \vee (b \wedge c)) \wedge c$, et comme $a \leqslant c$,

$$b \wedge c \leqslant c \implies (a \vee (b \wedge c)) \leqslant c \quad ,$$

il se réduit à $a \vee (b \wedge c)$.

Réciproquement, supposons qu'un treillis satisfasse à la condition de Dedekind, et calculons $(a \vee (b \wedge (a \vee c))) = U$. Comme $a \leqslant a \vee c$,

$$U = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad \text{et} \quad U \wedge c = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge c = (a \vee b) \wedge c \quad ,$$

c'est-à-dire le premier membre de l'égalité (M_1).

Supposons qu'un demi-groupe large ordonné à involution A contienne un ensemble P d'éléments dits principaux, représentés par des minuscules grecques satisfaisant aux conditions suivantes :

(P_i) $\forall\, a \in A$, $\exists\, \alpha \leqslant a$;

(P_{ii}) $a \leqslant b \iff (\alpha \leqslant a \implies \alpha \leqslant b)$, $\forall\, \alpha \in P$;

(P_{iii}) $\xi \leqslant ab \iff \xi = \alpha\beta$, $\alpha \leqslant a$, $\beta \leqslant b$.

L'ensemble des parties d'un groupoïde large F, ordonné par la relation d'inclusion, contient des éléments principaux qui sont les parties réduites à un seul élément de F.

PROPOSITION IV.1.3. - Si un demi-groupe large ordonné à involution contient des éléments principaux satisfaisant à la condition $\xi = \alpha\beta$ entraîne $\alpha = \xi\beta^o$ et $\beta = \alpha^o\xi$, il est modulaire (il en est ainsi notamment si les éléments principaux forment un groupoïde de Brandt).

Démonstration. -

$$\xi \leqslant ab \wedge c \implies \xi \leqslant ab \implies \xi = \alpha\beta \quad ,$$

où

$$\alpha \leqslant a \,,\quad \beta \leqslant b \implies \alpha = \xi\beta^o \implies \alpha \leqslant cb^o \quad .$$

D'où $\alpha \leqslant cb^o \wedge a$ et $\xi \leqslant (cb^o \wedge a)b$, et $(ab \wedge c) \leqslant (cb^o \wedge a)b$. On démontrerait de même la deuxième inégalité (M_2).

COROLLAIRE 1. - L'ensemble des complexes d'un groupe forme une catégorie modulaire.

COROLLAIRE 2. - Tout catégorie à involution, dont les morphismes sont des relations binaires, est une catégorie modulaire.

On supposera désormais que (INV) satisfait à (INV-i), (INV-ii), (INV-iii).

PROPOSITION IV.1.4. - En posant $t_i = (a_1 a_2 \dots a_{i-1})^\circ c\, (a_{i+1} \dots a_n)^\circ \wedge a_i$, un demi-groupe large à involution est modulaire si, et seulement si, on a

$$(a_1 \dots a_n) \wedge c = (t_1 \dots t_n) \wedge c \qquad (n \geqslant 2) \quad .$$

Démonstration. - Par récurrence,

$$(a_1 \dots a_{n-1})a_n \wedge c = ((a_1 \dots a_{n-1}) \wedge c a_n^\circ)t_n \wedge c$$

et on poursuit la récurrence sur le coefficient de t_n . Pour $n = 2$, on retrouve l'égalité (M).

PROPOSITION IV.1.5. - Etant donnés trois éléments a , b , c d'un demi-groupe large modulaire, on considère les a_n , b_n définis par les relations de récurrence

$$a_1 = a \ , \quad b_1 = b \ , \quad a_{n+1} = a_n \wedge c b_n^\circ \ , \quad b_{n+1} = b_n \wedge a_n^\circ\, c \quad .$$

(a) On a, pour tout naturel n ,

$$a_{n+1} = a \wedge c b_n^\circ \ , \quad b_{n+1} = b \wedge a_n^\circ\, c \quad .$$

(b) On a, pour tout naturel n ,

$$ab \wedge c = a_n\, b_n \wedge c \quad .$$

Démonstration. - On a $a_2 = a_1 \wedge cb^\circ = a \wedge cb^\circ$, $b_2 = b_1 \wedge a^\circ c = b \wedge a_1^\circ\, c$. Supposons par récurrence

$$a_n = a \wedge c b_{n-1}^\circ \qquad b_n = b \wedge a_{n-1}^\circ\, c \quad .$$

On a $a_{n+1} = a_n \wedge c b_n^\circ = a \wedge c b_{n-1}^\circ \wedge c b_n^\circ$. Mais

$$b_n \leqslant b_{n-1} \implies b_n^\circ \leqslant b_{n-1}^\circ \implies c b_n^\circ \leqslant c b_{n-1}^\circ \quad .$$

D'où $a_{n+1} = a \wedge c b_n^\circ$. De même

$$b_{n+1} = b_n \wedge a_n^\circ\, c = b \wedge a_{n-1}^\circ\, c \wedge a_n^\circ\, c = b \wedge a_n^\circ\, c \quad ,$$

car $a_n \leqslant a_{n-1}$. On a, d'après (M), $ab \wedge c = a_2\, b_2 \wedge c$. Supposons par récurrence $ab \wedge c = a_n\, b_n \wedge c$. D'après (M),

$$ab \wedge c = a_n\, b_n \wedge c = ((a_n \wedge c b_n^\circ)(b_n \wedge a_n^\circ\, c)) \wedge c = a_{n+1}\, b_{n+1} \wedge c \quad .$$

PROPOSITION IV.1.6. - Si on pose $u = ab \wedge c$, $v = a \wedge cb^{o}$, $w = b \wedge a^{o}c$, on a les formules

$$u = vw \wedge c = v(v^{o}u \wedge b) \wedge c \ , \quad v = uw^{o} \wedge a \ , \quad w = v^{o}u \wedge b \ .$$

Démonstration. - Il suffit d'appliquer la formule (M) aux expressions de u, v, w.

PROPOSITION IV.1.7.

(a) Si $b \wedge a^{o}c \leqslant c$, et $ac \leqslant c$, on a l'égalité de Dedekind

(D) $$ab \wedge c = a(b \wedge c) \ .$$

(b) Si c est symétrique et transitif, et si $a \leqslant c$, on a l'égalité de Dedekind

(D) $$ab \wedge c = a(b \wedge c) \ .$$

(a)* Si $a \wedge cb^{o} \leqslant c$ et $cb \leqslant c$, on a l'égalité de Dedekind

(D') $$ab \wedge c = (a \wedge c)b \ .$$

(b)* Si c est symétrique et transitif, et si $b \leqslant c$, on a l'égalité de Dedekind

(D') $$ab \wedge c = (a \wedge c)b \ .$$

Démonstration.

(a) D'après la première inégalité (M_1), et les hypothèses,

$$ab \wedge c \leqslant a(b \wedge a^{o}c) \leqslant a(b \wedge c) \leqslant ab \wedge ac \leqslant ab \wedge c$$

puisque $b \wedge a^{o}c \leqslant b \wedge c$ et $ac \leqslant c$.

(b) Si $c = c^{o}$, $a \leqslant c \implies a^{o} \leqslant c^{o} = c$, et $a^{o}c \leqslant c^{2} \leqslant c$. Donc $b \wedge a^{o}c \leqslant c$. D'ailleurs $a \leqslant c$, $c \leqslant c \implies ac \leqslant c^{2} \leqslant c$, et on est ramené au cas (a).

Remarque. - Dans le cas d'un treillis, on retrouve qu'un treillis modulaire vérifie (D).

Dans le cas des parties d'un groupe, un élément symétrique et transitif, c , est nécessairement un sous-groupe. Dans l'exemple des relations binaires, le langage est le même que dans le texte.

PROPOSITION IV.1.8.

(a) On a $ab \wedge c \leqslant aa^{o}c \wedge c$, $ab \wedge c \leqslant cb^{o}b \wedge c$.

$ab \wedge c \leqslant cb^{o}a^{o}c \wedge c$; $ab \wedge c \leqslant aa^{o}c$; $ab \wedge c \leqslant cb^{o}b$; $ab = ab \wedge ab \leqslant abb^{o}b$.

(b) Si d peut se mettre sous la forme $d = ab$, $d \wedge c \leqslant cd^{o}c \wedge c$.

(c) Si $ab \leqslant a$, $ab = a(b \wedge a^{o}a)$.

(d) S'il existe b tel que $a \leqslant ab$, alors $a \leqslant aa^{o}a$.

Démonstration.

(a) résulte immédiatement de (M_1) et (M_2), et (b) de la troisième inclusion de (a).

(c) $ab = ab \wedge a \leqslant a(b \wedge a^\circ a) \leqslant ab \implies ab = a(b \wedge a^\circ a)$.

(d) $a = ab \wedge a \leqslant a(b \wedge a^\circ a) \leqslant aa^\circ a$.

Remarque. - La formule (d) précédente, $a \leqslant aa^\circ a$, est valable en particulier chaque fois qu'il existe un élément neutre à droite pour a , en particulier, si E est une catégorie modulaire. Ce n'est pourtant pas une conséquence de l'égalité modulaire, comme le prouve le contre-exemple suivant.

Soit E le demi-groupe commutatif à deux éléments x , y , ordonné par l'inclusion stricte $x < y$, et la table de multiplication

$$x^2 = xy = yx = y^2 = x \quad .$$

Il est à involution en posant $x^\circ = x$, $y^\circ = y$, et comme $ab \wedge c = x$, quels que soient a , b dans E , il est modulaire. On a néanmoins $yy^\circ y = x$ qui est strictement inférieur à y .

PROPOSITION IV.1.9.

(a) Si $b \wedge a^\circ ac \leqslant b \wedge c$, on a $a(b \wedge c) = ab \wedge ac$.

(a)* Si $b \wedge ca^\circ a \leqslant b \wedge c$, on a $(b \wedge c)a = ba \wedge ca$.

Démonstration. - $ab \wedge ac \leqslant a(b \wedge a^\circ ac) \leqslant a(b \wedge c) \leqslant ab \wedge ac$

Remarque. - En particulier, si $a^\circ a$ est entier, $a(b \wedge c) = ab \wedge ac$ et $(b \wedge c)a = ba \wedge ca$.

2. Catégorie modulaire.

On appelle catégorie modulaire une catégorie à involution vérifiant les axiomes de modularité (M).

Par exemple, l'ensemble des parties d'un groupe, une catégorie de relations binaires, un treillis modulaire à élément minimum sont des catégories modulaires.

On appelle première projection de $a = BaA$, le morphisme entier

$$pr_1(a) = a^\circ a \wedge A \ ,$$

et deuxième projection de a , la première projection de a° , c'est-à-dire

$$pr_2(a) = aa^\circ \wedge B \quad .$$

PROPOSITION IV.2.1. - Dans une catégorie modulaire, si $a = BaA$,

(a) $a \wedge b \leqslant aa^o b$, $a \wedge b \leqslant ab^o a$, $a \wedge b \leqslant ab^o b$, $a \leqslant aa^o a$;

(b) $\forall\ x = CxB$ et $b = CbA$, $b \wedge xa \leqslant b \wedge ba^o a = b(A \wedge a^o a) = b\ pr_1(a)$ et $b \wedge xa \leqslant xx^o b \wedge b = (xx^o \wedge C)b = pr_2(x).b$;

(c) $pr_1(xa) \leqslant pr_1(a)$;

(d) $a = a\ pr_1(a) = pr_2(a).a$;

(e) $pr_1(a) \leqslant pr_1(b) \iff a \leqslant ab^o b$ et $a \leqslant b \implies pr_1(a) \leqslant pr_1(b)$;

(f) $a\ pr_1(b) = a \implies pr_1(a) \leqslant pr_1(b)$;

(g) $pr_1(ba) = pr_1(pr_1(b).a)$;

(h) Si u est entier, il est symétrique et idempotent, $u = uu^o = u^o$.

Démonstration.

(a) On a, d'après (M_1), $(aA \wedge b) = a(A \wedge a^o b) \wedge b$, d'où

$$a \wedge b \leqslant a(A \wedge a^o b) \leqslant aa^o b \quad .$$

De même, d'après (M_2),

$$Ba \wedge b \leqslant (B \wedge ba^o)a \implies a \wedge b \leqslant ba^o a \quad .$$

De même (M') appliquée à $a \wedge bA$ donne

$$(a \wedge bA) \leqslant (b \wedge a)(A \wedge b^o a) \leqslant ab^o a \quad .$$

Si $b = a$, on en tire $a \leqslant aa^o a$.

(b) On a

$$b \wedge xa \leqslant x(a \wedge x^o b)$$

d'après la première inégalité (M_2). D'où $b \wedge xa \leqslant xx^o b$, et par suite

$$b \wedge xa \leqslant xx^o b \wedge b \quad .$$

De même, d'après la deuxième inégalité (M_2),

$$b \wedge xa \leqslant b \wedge ba^o a \quad .$$

On a d'ailleurs

$$b \wedge ba^o a = bA \wedge ba^o a \leqslant b(A \wedge b^o ba^o a) \quad ,$$

d'après (M_2). Mais en posant $b^o ba^o = x$, $A \wedge xa \leqslant A \wedge Aa^o a$. On a donc

$$b \wedge ba^o a \leqslant b(A \wedge a^o a) \leqslant b \wedge ba^o a \quad .$$

D'où l'égalité :

$$b(a^o a \wedge A) = b.pr_1(a) = ba^o a \wedge b \quad .$$

On démontre de même $(xx^o \wedge C)b = xx^o b \wedge b$.

(c) On a $pr_1(xa) = a^o x^o xa \wedge A = (a^o x^o x).a \wedge A \leqslant a^o aA \wedge A$, d'après (b).

(d) D'après (b), $a(a^o a \wedge A) = aa^o a \wedge a = a$, d'après (a).

(e) Si $a \leqslant b$, $a^o \leqslant b^o$ et $a^o a \wedge A \leqslant b^o b \wedge A$, ce qui prouve

$$a \leqslant b \implies pr_1(a) \leqslant pr_1(b) \quad .$$

Supposons $a^o a \wedge A \leqslant b^o b \wedge A$. On en tire

$$a = a.(a^o a \wedge A) \leqslant a(b^o b \wedge A) = ab^o b \wedge a \quad .$$

D'où $a \leqslant ab^o b$.

Réciproquement, $a \leqslant ab^o b \implies a^o a \wedge A \leqslant (b^o ba^o ab^o)b \wedge A \leqslant b^o b \wedge A$.

(f) Si $a\, pr_1(b) = a$, $a(b^o b \wedge A) = ab^o b \wedge a = a$, $a \leqslant ab^o b$ et $pr_1(a) \leqslant pr_1(b)$

(g) Comme $b = b\, pr_1(b)$, on a $pr_1(b.(pr_1(b).a)) \leqslant pr_1(pr_1(b).a)$, d'après (c). Pour établir l'inclusion contraire, on peut utiliser le critère (e). Il suffit de prouver que

$$pr_1(b).a \leqslant pr_1(b).a.a^o b^o ba$$

ou $b^o ba \wedge a \leqslant b^o baa^o b^o ba \wedge aa^o b^o ba$, ou, en posant $b^o ba = x$, que

$$x \wedge a \leqslant xx^o a \wedge ax^o a \quad ,$$

ce qui résulte immédiatement des deux premières inclusions (a).

(h) $u \leqslant A \implies u^o \leqslant A$, $u \leqslant u$, $u^o \leqslant A \implies uu^o \leqslant u$. Mais, d'après (a), $u = u \wedge A \leqslant uu^o A = uu^o$. Donc $uu^o = u$ et $(uu^o)^o = u^o = u$.

PROPOSITION IV.2.2. - Si $pr_1(a) = i^o i$, où i^o est une injection, on a $a = ai^o i$, et ai^o est surjectif à gauche.

Réciproquement, si i^o est une injection telle que $a = ai^o i$ et que ai^o soit surjectif à gauche, $i^o i = pr_1(a)$.

<u>Démonstration</u>. - $a\, pr_1(a) = a \implies ai^o i = a$. D'ailleurs $i^o i = a^o a \wedge A \leqslant a^o a$, et par suite, $ia^o ai^o \geqslant ii^o ii^o = A//i$ et $ai^o \in SG$.

Réciproquement, si i^o est une injection telle que $a = ai^o i$ et $ai^o \in SG$, c'est-à-dire $A//i < ia^o ai^o$, en multipliant à gauche par i^o et à droite par i , on obtient

$$i^o i \leqslant i^o ia^o ai^o i \leqslant a^o a \quad .$$

Donc $i^o i \leqslant a^o a \wedge A = pr_1(a)$, ou $pr_1(i) = i^o i \leqslant pr_1(a)$. Mais d'ailleurs,

$pr_1(a) = pr_1(ai^\circ i)$ entraîne, d'après la proposition IV.2.1-(c),

$$pr_1(a) \leqslant pr_1(i) \quad .$$

D'où l'égalité.

Nous ne considèrerons dans la suite que des catégories modulaires vérifiant l'axiome suivant :

Axiome des projections P. - Pour tout morphisme a, il existe une injection telle que $pr_1(a) = i^\circ i$.

Soit un morphisme $a = BaA$, dont la deuxième projection est $pr_2(a) = j^\circ j$. Si j'° est une deuxième injection telle que $j'^\circ j' = j^\circ j$, on sait que les deux injections j° et j'° définissent le même sous-objet $j^\circ E$ de B (III.3.3***). Nous appellerons image du morphisme a, et désignerons par $im(a)$, le sous-objet $j^\circ E$ de son but B :

$$im(a) = j^\circ E \text{ , où } j^\circ j \wedge B = aa^\circ \wedge B \quad .$$

Soit maintenant un sous-objet $i^\circ E$ de la source A de a, et soit i'° une injection de but A, telle que $i'^\circ E = i^\circ E$. Dans ces conditions, $i^\circ i = i'^\circ i'$. Les deux morphismes ai° et ai'° ont même image. En effet

$$pr_2(ai^\circ) = ai^\circ ia^\circ \wedge B = ai'^\circ i'a^\circ \wedge B \quad .$$

On appelle image par a du sous-objet $i^\circ E$ de a, et on désigne par $a(i^\circ E)$, l'image du morphisme ai° . On a donc

$$a(i^\circ E) = (k^\circ E) = im(ai^\circ) \quad ,$$

où k° est une injection telle que $k^\circ k = pr_2(ai^\circ) = ai^\circ ia^\circ \wedge B$.

PROPOSITION IV.2.3. - Pour tout morphisme a, et injections i° et j° telles que les produits existent :

(a) $i^\circ E \subseteq j^\circ E \implies a(i^\circ E) \subseteq a(j^\circ E)$;

(b) $a \leqslant b \implies a(i^\circ E) \subseteq b(j^\circ E)$;

(c) $ba(i^\circ E) = b(a(i^\circ E))$.

Démonstration.

(a) $i^\circ E \subseteq j^\circ E \iff i^\circ i \leqslant j^\circ j \implies pr_2(ai^\circ) \leqslant pr_2(aj^\circ) \implies a(i^\circ E) \subseteq a(j^\circ E)$.

(b) $a \leqslant b \implies a^\circ \leqslant b^\circ \implies ai^\circ ia^\circ \leqslant bi^\circ ib^\circ \implies$

$$pr_2(ai^\circ) \leqslant pr_2(bi^\circ) \implies a(i^\circ E) \subseteq b(i^\circ E) \text{ .}$$

(c) Soient $b = CbB$ et $a = BaA$. Supposons $a(i^\circ E) = j^\circ E$. On a $j^\circ j = pr_2(ai^\circ)$ et

$$b(a(i^\circ E)) = b(j^\circ E) = k^\circ E \text{ , où } k^\circ k = pr_2(bj^\circ) \quad .$$

D'ailleurs, $ba(i^\circ E) = k'^\circ(E)$, où $k'^\circ k' = pr_2(bai^\circ)$. Il faut prouver que

$$pr_2(bai^\circ) = pr_2(bj^\circ) \quad .$$

Mais $pr_2(bj^\circ) = pr_2(b.pr_2(j^\circ))$ (IV.2.1-(g)) et $pr_2(bai^\circ) = pr_2(b.pr_2(ai^\circ))$ et comme $pr_2(j^\circ) = pr_2(ai^\circ)$, la propriété est établie.

Remarque. - En désignant par F la classe $E \cup F'$, où F' désigne la classe des sous-objets de la catégorie E , F a une structure de demi-groupe large ordonné à multiplication compatible (en identifiant les relations d'ordre sur E et sur F').

PROPOSITION IV.2.4. - Soit $f = BfA$ une application, et soient deux injections de but A et B , i° et j° , telles que $j^\circ E = f(i^\circ E)$.

(a) jfi° est une surjection ayant même équivalence associée que f .

(b) Si s' est une surjection telle que $s'^\circ s' = if^\circ fi^\circ$, les deux objets $B//j$ et $(A//i)/s'$ sont en bijection.

Démonstration. - Il est commode de faire le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & A//i \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr, "i^\circ"] & & & \\
(A//i)/s' & & A \arrow[dr, "f"] & & \\
 & & & B \arrow[dr, "j^\circ"] & \\
 & & & & B//j=\overline{f(i^\circ E)}
\end{tikzcd}$$

(a) D'après IV.2.2, $jfi^\circ \in SD$ et $j^\circ jfi^\circ = fi^\circ$. Calculons

$$(jfi^\circ)^\circ\, jfi^\circ = if^\circ j^\circ jfi^\circ = if^\circ fi^\circ \supseteq A//i$$

car $fi^\circ \in SG$, et

$$jfi^\circ if^\circ j^\circ \leqslant j(B)j^\circ = B//j \quad ,$$

puisque $fi^\circ \in IG$. Donc $jfi^\circ \in SG$, $jfi^\circ \in IG$, et comme $jfi^\circ \in SD$, jfi° est une surjection.

(b) Les deux surjections s' et jfi° ont même équivalence associée. Donc leurs buts sont en bijection.

PROPOSITION IV.2.5 (*Théorème d'homomorphisme*). - *Soient un morphisme* $a = A_2\, a A_1$, i_1° *une injection de but* A_1, i_2° *une injection de but* A_2 *telles que le couple* (u_2 , u_1) *soit stable pour* a $(u_1 = i_1^\circ\, i_1 , \; u_2 = i_2^\circ\, i_2)$, *et soient* $f_k = A'_k\, f_k\, A_k$ *deux applications telles que* $(f_1^\circ\, f_1 , f_2^\circ\, f_2)$ *soit une congruence pour* a $(k = 1 , 2)$.

Si $f_k(i_k^\circ\, E) = j_k^\circ\, E$ *et si* s_k *est une surjection telle que* $s_k^\circ\, s_k = i_k\, f_k^\circ\, f_k\, i_k^\circ$, *les deux morphismes*

$$a'' = \overline{f_2(i_2^\circ\, E)}\; i_2\, f_2\, a f_1^\circ\, i_1^\circ\; \overline{f_1(i_1^\circ\, E)}$$

et

$$a''' = \overline{(i_2^\circ(E)/i_2\, f_2^\circ\, f_2\, i_2^\circ)}\; s_2\, i_2\, a i_1^\circ\, s_1^\circ\; \overline{(i_1^\circ(E)/i_1\, f_1^\circ\, f_1\, i_1^\circ)}$$

sont isomorphes.

Démonstration. - Le couple (u_2 , u_1) étant stable pour a, et $(f_1^\circ\, f_1 , f_2^\circ\, f_2)$ étant une congruence pour a, il en résulte (III.4.5) que $(i_1\, f_1^\circ\, f_1\, i_1^\circ , i_2\, f_2^\circ\, f_2\, i_2^\circ)$ est une congruence pour le morphisme induit $i_2\, a i_1^\circ$. Le morphisme a''' existe donc, et par suite a'', et ils sont isomorphes, car, d'après la proposition IV.2.4, leurs sources sont en bijection ainsi que leurs buts.

Il est commode de faire le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\overline{(i_1^\circ\, E)}/s_1 \arrow[r, "a'''"] & \overline{(i_2^\circ\, E)}/s_2 \\
\overline{i_1^\circ\, E} \arrow[u, "s_1"] \arrow[d, "i_1^\circ"'] & \overline{i_2^\circ\, E} \arrow[u, "s_2"'] \arrow[d, "i_2^\circ"] \\
A_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\
A'_1 \arrow[r, "a'"] \arrow[d, dash] & A'_2 \arrow[d, dash] \\
\overline{f_1(i_1^\circ\, E)} \arrow[r, "a''"] & \overline{f_2(i_2^\circ\, E)}
\end{tikzcd}$$

ÉNONCÉ ABRÉGÉ. - *L'image d'un couple stable de sous-objets par un homomorphisme est isomorphe au quotient de ce couple stable par la congruence induite*.

Soit q une équivalence dans A, et j° une injection de but A. On appelle *saturation* de $j^\circ j = v$ par l'équivalence q, la deuxième projection de $q j^\circ$, c'est-à-dire $qj^ojq \wedge A$. De même, si $q = AqA$ et $r = BrB$ sont des équivalences, et si i^o est une injection de but B , on appelle <u>saturation du couple</u> (u , v) , où $u = i^oi$, $v = j^oj$, par le couple d'équivalences (q , r) , le couple

$$(qvq \wedge A , rur \wedge B) \quad .$$

PROPOSITION IV.2.6. - Dans une catégorie modulaire, soit un morphisme $a = BaA$.

(a) Si (u , v) est stable pour a , et (q , r) une congruence pour a , le couple saturé de (u , v) par (q , r) est un couple stable pour a .

(b) Si a est injectif à gauche, l'intersection de deux couples stables (ou de deux congruences) pour a , est un couple stable (ou une congruence) pour a .

<u>Démonstration</u>.

(a) Il faut prouver que $(rur \wedge B)\, a\, (qvq \wedge A) = a(qvq \wedge A)$. Pour calculer les deux membres, on peut appliquer IV.2.1-(b). Tout revient à prouver que le premier membre

$$X = (rura(qvq \wedge A)) \wedge (a(qvq \wedge A))$$

et, en appliquant encore IV.2.1-(b),

$$X = ruraqvq \wedge rura \wedge a(qvq \wedge A) \quad .$$

Mais $ruraqvq \leqslant ruraq^2 = ruraq = rura$, puisque (q , r) est une congruence. Le deuxième terme de l'intersection figurant dans X peut être supprimé. Or

$$ruraqvq = ruravq = ravqvq = ravq = raqvq \qquad (III.4.5),$$

et comme $r \geqslant B$, $ruraqvq = raqvq \geqslant aqvq \geqslant aqvq \wedge a$. Donc

$$X = aqvq \wedge a = a(qvq \wedge A) \quad .$$

(b) Si (u , v) est un couple stable pour a , on a $av \leqslant ua$ (III.4.2***). Supposons $av_1 \leqslant u_1 a$, $av_2 \leqslant u_2 a$,

$$a(v_1 \wedge v_2) \leqslant av_1 \wedge av_2 \leqslant u_1 a \wedge u_2 a \quad .$$

En appliquant la modularité, on a $(u_1 a \wedge u_2 a) \leqslant (u_1 \wedge u_2 aa^o)a$, et si $aa^o \leqslant B$, on a donc

$$a(v_1 \wedge v_2) \leqslant (u_1 \wedge u_2)a$$

ce qui prouve la propriété. Même démonstration pour les congruences.

PROPOSITION IV.2.7. - Soit j^o une injection de but A . Si la saturation de j^oj par une équivalence q , s'écrit $qj^ojq \wedge A = m^om$, où m^o est une injection de but A ,

(a) mj° est une injection ;

(b) Si s est une surjection vérifiant $s^\circ s = mqm^\circ$, alors smj° est une surjection, et on a $(A//j)/smj^\circ = (A//m)/s$.

Démonstration.

(a) Comme $q \geqslant A$, $qj^\circ jq \wedge A \geqslant j^\circ j \wedge A = j^\circ j$. Donc $m^\circ m \geqslant j^\circ j$. Donc $j^\circ E \subseteq m^\circ E$ et $j^\circ = m^\circ(mj^\circ)$, où mj° est une injection (III.3.3***).

(b) Montrons que, si s est une surjection telle que $s^\circ s$ soit l'équivalence induite par q dans la saturation $\overline{q(j^\circ E)}$ de $j^\circ j$, smj° est une surjection. Comme s et mj° sont deux applications, smj° est une application. Il suffit de prouver que $smj^\circ \in SD$, ou que $smj^\circ jm^\circ s^\circ \geqslant (A//m)/s$. Mais

$$m^\circ m \leqslant qj^\circ jq \implies m \leqslant mqj^\circ jq = mq.m^\circ mj^\circ.jm^\circ m.q = s^\circ s.mj^\circ jm^\circ.mq \quad ,$$

et en multipliant à droite par m° ,

$$A//m = mm^\circ \leqslant s^\circ s.mj^\circ jm^\circ.s^\circ s \quad ,$$

et en multipliant à gauche par s et à droite par s° ,

$$ss^\circ = (A//m)/s \leqslant smj^\circ jm^\circ s^\circ \quad ,$$

ce qu'il fallait prouver.

On peut faire le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A//j \arrow[dr, "j^\circ"'] & & A//m = q(A//j^\circ j) \arrow[dl, "m^\circ"] \arrow[dr, "s^\circ"] & \\
& A & & (A//m)/s
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION IV.2.8 (Deuxième théorème d'isomorphisme). - En reprenant les notations de la proposition IV.2.5, et en posant $f_1^\circ f_1 = r_1$, $f_2^\circ f_2 = r_2$, $\overline{r_k(i_k^\circ E)}$ une source quelconque de la saturation $r_k(i_k^\circ E)$, soient m_k° les injections $m_k^\circ = A_k\, m_k^\circ\, \overline{r_k(i_k^\circ E)}$ telles que $m_k^\circ m_k = r_k i_k^\circ i_k r_k \wedge A$, et t_k les surjections telles que $t_k^\circ t_k = m_k r_k m^\circ$ (équivalence induite de r_k dans $r_k(i_k^\circ E)$). Dans ces conditions, le morphisme

$$a^{iv} = (\overline{r_2(i_2^\circ E)}/t_2).t_2\, m_2\, am_1^\circ\, t_1^\circ.\overline{r_1(i_1^\circ E)}/t_1$$

est isomorphe aux morphismes a'' et a''' définis dans la proposition IV.2.5.

Démonstration. - D'après IV.2.6, le couple saturé de $(i_2^\circ i_2 , i_1^\circ i_1)$ par la congruence (r_1 , r_2) à savoir $(m_2^\circ m_2 , m_1^\circ m_1)$ est stable pour a . D'après III.4.5, la congruence induite $(m_1 r_1 m_1^\circ , m_2 r_2 m_2^\circ)$ est une congruence pour $m_2 am_1^\circ$. Il en résulte, d'après la proposition IV.2.5, que a^{iv} est isomorphe à

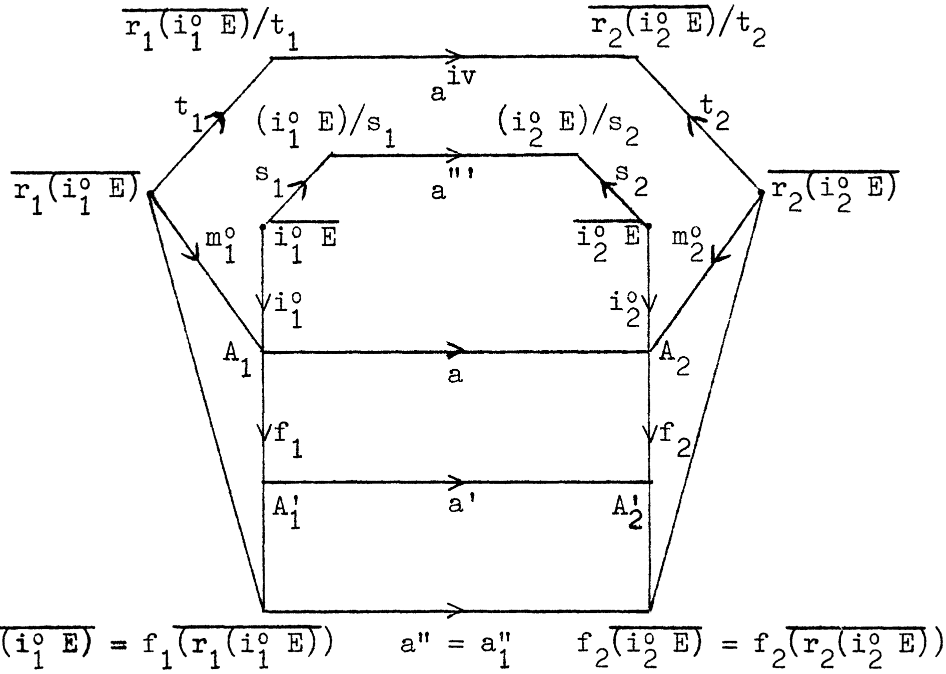
$$a''_1 = f_2\overline{(r_2(i^o_2\ E))}.m_2\ f_2\ r_2\ ar_1\ f^o_1\ m^o_1.f_1\overline{(r_1(i^o_1\ E))} \quad .$$

Mais en vertu de IV.2.3-(c), et puisque f_k est une application,

$$f_k\ r_k = f_k \quad \text{et} \quad a''_1 = a'' \quad .$$

Donc a'' est isomorphe à a^{iv} et par suite, a''' est isomorphe à a^{iv} .

<u>Remarque</u>. - On a le diagramme global :



ÉNONCÉ ABRÉGÉ. - <u>Les quotients par les congruences induites d'un couple stable et de sa saturation sont isomorphes</u>.

PROPOSITION IV.2.9 (<u>Lemme de bijection croisée</u>). - Soient quatre équivalences dans A , p , q , q' , r , telles que $p \leqslant q \leqslant r$ et $p \leqslant q' \leqslant r$. Si i^o est une injection de but A , on pose

$$q(i^oE) = m^oE \quad \text{et} \quad r(i^oE) = n^oE \quad ,$$

où m^o et n^o sont des injections. Soient s et t deux surjections telles que $s^os = mpm^o$, $t^ot = nq'n^o$. Soit le morphisme $f = tnm^os^o = \overline{r(i^oE)/t}.f.\overline{q(i^oE)/s}$.

(a) Dans tous les cas, f est une application.

(b) Si $qq' = q'q = r$, f est une surjection.

(c) Si $q \wedge q' = p$, et si $mq'm^o \leqslant mqm^o$, f est une injection.

Démonstration.

(a) Comme $q \leqslant r$, $q(i^{\circ}E) \subseteq r(i^{\circ}E)$, ce qui prouve que $nm^{\circ} = \overline{r(i^{\circ}E)}\, nm^{\circ}\, \overline{q(i^{\circ}E)}$ est une injection, et comme $m^{\circ}m \leqslant n^{\circ}n$, on a (III.3.3***), $m^{\circ} = n^{\circ}nm^{\circ}$. Comme $p \leqslant q'$, $mpm^{\circ} \leqslant mq'm^{\circ}$; donc

$$s^{\circ}s \leqslant mn^{\circ}n.q'n^{\circ}nm^{\circ} = mn^{\circ}t^{\circ}tnm^{\circ} \quad .$$

Les deux applications s et tnm° vérifient la condition de III.3.3-(a), et par suite $tnm^{\circ}s^{\circ}$ est une application.

(b) Supposons que $q'q = r$. Alors on a aussi $qq' = r$, car le produit de deux équivalences n'est une équivalence que si elles sont permutables. On a

$$q'(q(i^{\circ}E)) = q'q(i^{\circ}E) = r(i^{\circ}E) \quad .$$

D'après IV.2.7-(b), il existe une surjection de source $\overline{q(i^{\circ}E)}$ et de but $q'(q(i^{\circ}E))/s'$, où $s'^{\circ}s'$ est l'équivalence induite de q' dans $\overline{q'(q(i^{\circ}E))}$. Comme $\overline{q'q(i^{\circ}E)} = \overline{r(i^{\circ}E)}$, $s'^{\circ}s'$ est égal à $t^{\circ}t$, et on peut choisir

$$\overline{q'q(i^{\circ}E)}/s' = r(i^{\circ}E)/t \quad ,$$

et tnm° est alors une surjection. Comme $s^{\circ} \in SD$ et que $tnm^{\circ}s^{\circ}$ est une application, c'est nécessairement une surjection.

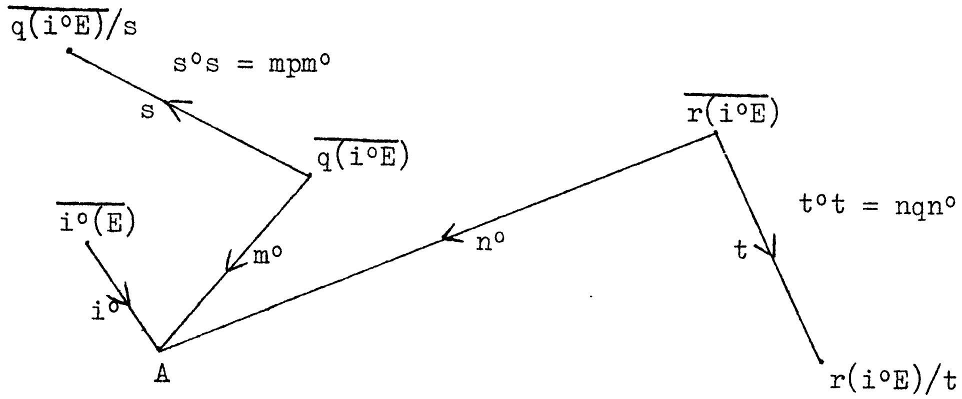
(c) On a $m(q' \wedge q)m^{\circ} = (mq' \wedge mq)m^{\circ} = mq'm^{\circ} \wedge mqm^{\circ}$ (IV.1.9, Remarque). Si $q \wedge q' = p$, on a donc $mpm^{\circ} = mq'm^{\circ} \wedge mqm^{\circ}$, et $mq'm^{\circ} \leqslant mqm^{\circ}$ entraîne

$$mpm^{\circ} = mq'm^{\circ} = s^{\circ}s \quad .$$

Dans ces conditions, formons $f^{\circ}f$.

$$f^{\circ}f = smn^{\circ}t^{\circ}tnm^{\circ}s^{\circ} = smn^{\circ}nq'n^{\circ}nm^{\circ}s^{\circ} = smq'm^{\circ}s^{\circ} = smpm^{\circ}s^{\circ} = (A//m)/s \quad .$$

Remarque. - D'après IV.2.8, $q'(q(i^{\circ}E))/nq'n^{\circ}$ et $q(i^{\circ}E)/mq'm^{\circ}$ sont en bijection. Si on a (b) et (c), $mq'm^{\circ} = mpm^{\circ}$, ce qui démontre directement que $r(i^{\circ}E)/nq'n^{\circ}$ et $q(i^{\circ}E)/mpm^{\circ}$ sont alors en bijection.



Deux couples d'éléments d'un groupoïde, (q', r') et (q'', r'') sont dits *correspondants* si on a les égalités $q'r'' = r'q''$ et $r''q' = q''r'$.

PROPOSITION IV.2.10 (*Théorème des couples d'équivalence correspondants*). - *Soit dans une catégorie modulaire quatre équivalences* q' , r' , q'' , r'' , *telles que*

(a) $q' \leqslant r'$ et $q'' \leqslant r''$, *et* (q', r') *est correspondant à* (q'', r'') *pour le produit et pour l'intersection*.

(b) *Si* i^o *est une injection de but* A , *on pose*

$$(r' \wedge r'')(i^oE) = m^oE \ , \quad r'(i^oE) = m'^oE \ , \quad r''(i^oE) = m''^o(i^oE)$$

où m^o , m'^o , m''^o *sont des injections, et on suppose*

$$mq'm^o \leqslant m(r' \wedge r'')m^o \ , \quad mq''m^o \leqslant m(r' \wedge r'')m^o \ .$$

Dans ces conditions, $\overline{r'(i^oE)/m'q'm'^o}$ *et* $\overline{r''(i^oE)/m''q''m''^o}$ *sont en bijection*.

Démonstration. - Posons $q' \wedge q'' = p$, $q' = q'$, $r' \wedge r'' = q$, $r' = r$. On a $p \leqslant q \leqslant r$, $p \leqslant q' \leqslant r$. On a d'ailleurs

$$qq' = (r' \wedge r'')q' = r''q' \wedge r'$$

en appliquant l'égalité de Dedekind. Mais $r''q' = q''r'$ en vertu de la correspondance, et $qq' = q''r' \wedge r' = r'$, puisque q'' est réflexif. Comme r' est une équivalence, on a

$$qq' = q'q \ , \text{ et } \ qq' = q'q = r \ .$$

Calculons $q \wedge q' = r' \wedge r'' \wedge q' = r'' \wedge q' = r'' \wedge q' \wedge q' = q'' \wedge r' \wedge q' = q'' \wedge q' = p$. On a de plus, $mq'm^o \leqslant mqm^o$ par hypothèse. On est donc dans les conditions de IV.2.9, et $\overline{r(i^oE)/m'q'm'^o}$, $\overline{q(i^oE)/mpm^o}$, c'est-à-dire $\overline{r'(i^oE)/m'q'm'^o}$ et $\overline{(r' \wedge r'')(i^oE)/m(q' \wedge q'')m^o}$ sont en bijection. En permutant les éléments affectés de $'$ et ceux affectés de $''$, on voit de même que $\overline{r''(i^oE)/m''q''m''^o}$ est en bijec- avec $\overline{(r' \wedge r'')(i^oE)/m(q' \wedge q'')m^o}$. D'où le résultat.

PROPOSITION IV.2.11 (*Troisième théorème d'isomorphisme*). - *Soit un morphisme* $a = A_2\, aA_1$ *et quatre congruences* (q_1', q_2') , (q_1'', q_2'') , (r_1', r_2') , (r_1'', r_2'') , *telles que*, $\forall\, k$ $(k = 1, 2)$, *les conditions* (a) *et* (b) *de* IV.2.10 *soient satisfaites*. *Soit* i_k^o *une injection de but* A_k *telle que le couple* $(i_2^o\, i_2 , i_1^o\, i_1)$ *soit stable pour* a . *On pose*

$$(r_k' \wedge r_k'')(i_k^o\, E) = m_k^o\, E \ , \quad r_k'(i_k^o\, E) = m_k'^o E \ , \quad r_k''(i_k^o\, E) = m_k''^o\, E$$

et on suppose qu'on ait, pour $\forall\, k$, *la condition* (c) *de* IV.2.10,

$$m_k\, q_k'\, m_k^o \leqslant m_k(r_k' \wedge r_k'')m_k^o \qquad m_k\, q_k''\, m_k^o \leqslant m_k(r_k' \wedge r_k'')m_k^o \ .$$

<u>Si</u> s_k <u>est une surjection telle que</u> $s_k^o\, s_k = m_k(q_k' \wedge q_k'')m_k^o$,
s_k' <u>est une surjection telle que</u> $s_k'^o s_k' = m_k'(q_k')m'^o$,
s_k'' <u>est une surjection telle que</u> $s_k''^o s_k'' = m_k''\, q_k''\, m''^o$,

<u>dans ces conditions, les trois morphismes</u> b , b' , b'' <u>ci-dessous sont isomorphes</u>

$$b = \overline{(r_2' \wedge r_2'')(i_2^o\, E)/s_2}.s_2\, m_2\, am_1^o\, s_1^o.\overline{(r_1' \wedge r_1'')(i_1^o\, E)/s_1}$$

$$b' = \overline{r_2'(i_2^o\, E)/s_2'}.s_2'\, m_2'\, am_1'^o\, s_1'^o.\overline{r_1'(i_1^o\, E)/s_1'}$$

$$b'' = \overline{r_2''(i_2^o\, E)/s_2''}.s_2''\, m_2''\, am_1''^o\, s_1''^o.\overline{r_1''(i_1^o\, E)/s_1''} \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Comme $(i_2^o\, i_2 , i_1^o\, i_1)$ est stable pour a , le couple saturé par les congruences (r_2' , r_1') , (r_2'' , r_1'') et la congruence intersection est aussi stable pour a (IV.2.6), et les couples d'équivalences induites sont des congruences pour les morphismes induits (III.4.5-(b)). D'où l'existence des morphismes induits b , b' , b'' . Mais les buts et les sources de b et b' , b et b'' , b' et b'' sont respectivement en bijection d'après IV.2.10. D'où l'isomorphisme.

ÉNONCÉ ABRÉGÉ. - <u>Soient deux couples de congruences</u> (q' , r') <u>et</u> (q'' , r'') <u>correspondants</u>. <u>Soit un couple stable, tel que les congruences induites par</u> q' <u>et</u> q'' <u>soient dans la saturation par</u> $(r' \wedge r'')$, <u>contenues dans la congruence induite par</u> $(r' \wedge r'')$. <u>Alors les quotients de la saturation par</u> r' <u>de la congruence induite par</u> q' , <u>et de la saturation par</u> r'' <u>de la congruence induite par</u> q'' , <u>sont isomorphes</u>.

3. Application aux demi-groupes et aux groupes.

Soit un groupoïde F ; si A_1 est l'application identique de $F \times F$ sur lui-même, et A_2 l'application identique de F sur lui-même, et si l'on pose $a(\alpha , \beta) = \alpha\beta$, alors l'application a est telle que $a = A_2\, aA_1$. Nous considérerons les homomorphismes de F qui sont de la forme suivante :

$$f(\alpha , \beta) = (\alpha , g(\beta)) \quad ,$$

où g est une surjection de F dans un ensemble F' pour le deuxième facteur et pour le résultat. Pour que la structure $(F \times F' , a' , F')$ existe, il faut et il suffit que $(f^o f , g^o g)$ soit une congruence, ou que

$$(\alpha , \beta) \equiv (\alpha' , \beta') \pmod{f^o f} \implies \alpha\beta \equiv \alpha'\beta' \pmod{g^o g}$$

ou que

$$f(\alpha , \beta) = f(\alpha' , \beta') \iff \alpha = \alpha' \quad \text{et} \quad g(\beta) = g(\beta') \implies g(\alpha\beta) = g(\alpha\beta') \quad ,$$

c'est-à-dire que l'équivalence associée à g soit compatible à gauche.

PROPOSITION IV.3.1. - Les surjections f et g **pour un groupoïde**, définies par $f(\alpha , \beta) = (\alpha , g(\beta))$, définissent une congruence si, et seulement si, l'équivalence associée à g est compatible à gauche.

En prenant la notation multiplicative pour la structure homomorphe, on a

(1) $$\alpha . g(\beta) = g(\alpha\beta) , \forall \alpha , \beta \in F .$$

Réciproquement, si on a (1), $g(\beta) = g(\gamma) \implies \alpha g(\beta) = \alpha g(\gamma) \implies g(\alpha\beta) = g(\alpha\gamma)$, et l'équivalence est compatible à gauche.

PROPOSITION IV.3.2. - Supposons que F soit un demi-groupe, la structure homomorphe à F est une structure de demi-groupe F opérant sur F' .

Démonstration. - On a $\alpha(\beta g(\gamma)) = \alpha g(\beta\gamma) = g(\alpha(\beta\gamma)) = (g(\alpha\beta)\gamma) = \alpha\beta g(\gamma)$.

PROPOSITION IV.3.3. - On suppose désormais que F soit un groupe ; la structure homomorphe à F est une structure d'espace homogène où le groupe F opère transitivement sur F' .

Si ε désigne l'élément neutre de F , on a

(2) $$g(\alpha) = \alpha g(\varepsilon) .$$

Il en résulte que, $\forall g(\alpha) \in F'$, $g(\beta) \in F'$, $\beta\alpha^{-1} g(\alpha) = \beta\varepsilon g(\varepsilon) = g(\beta)$, ce qui prouve que F opère transitivement sur F' . On a d'ailleurs $\varepsilon g(\alpha) = g(\varepsilon\alpha) = g(\alpha)$.

PROPOSITION IV.3.4. - L'ensemble des éléments ν de F tels que $g(\nu) = g(\varepsilon)$ est un sous-groupe $K(g^o g)$ de F , appelé noyau de g , et

$$g(\alpha) = g(\beta) \iff \alpha^{-1} \beta \in K(g^o g) .$$

Car l'équivalence $g^o g$ étant compatible à gauche, $g(\alpha) = g(\beta)$ entraîne $g(\alpha^{-1} \beta) = g(\alpha^{-1} \alpha) = g(\varepsilon)$. Si en particulier, $g(\alpha) = g(\beta) = g(\varepsilon)$, $g(\alpha^{-1} \beta) = g(\varepsilon)$, ce qui prouve que l'ensemble $K(g^o g)$ est un sous-groupe de F .

Inversement, si un sous-groupe quelconque K est donné dans F , la relation $(\alpha , \beta) \in g^o g$ si et seulement si $\alpha^{-1} \beta \in K$, est une équivalence compatible à gauche $g^o g(K)$, et on a $g^o g K(g^o g) = g^o g$.

Nous représenterons par F/K la structure homomorphe du groupe F ayant pour noyau le sous-groupe K .

PROPOSITION IV.3.5. - Si r et r' sont deux équivalences dans F compatibles à gauche,

(a) $r \subseteq r' \iff K(r) \subseteq K(r')$;

(b) $K(r \cap r') = K(r) \cap K(r')$;

(c) $(\alpha , \beta) \in rr' \iff \beta^{-1} \alpha \in K(r)\, K(r')$. Les deux équivalences r et r' sont permutables si, et seulement si, leurs noyaux sont permutables, et alors rr' est une équivalence compatible à gauche, et on a $K(rr') = K(r).K(r')$.

Démonstration.

(a) $(\alpha , \beta) \in r \iff \alpha^{-1} \beta \in K(r) \implies ((\alpha , \beta) \in r' \iff \alpha^{-1} \beta \in K(r'))$.

(b) $\gamma \in K(r \cap r') \iff (\gamma , \varepsilon) \in r \cap r' \iff (\gamma , \varepsilon) \in r$, et

$$(\gamma , \varepsilon) \in r' \iff \gamma \in K(r) \text{ et } \gamma \in K(r') \iff \gamma \in K(r) \cap K(r') .$$

(c) $(\alpha , \beta) \in rr' \iff \exists\, \gamma$ tel que

$$(\alpha , \gamma) \in r' \text{ et } (\gamma , \beta) \in r \iff \gamma^{-1} \alpha \in K(r') \text{ et } \beta^{-1} \gamma \in K(r) \implies \beta^{-1} \alpha \in K(r).K(r') .$$

Réciproquement, si $\beta^{-1} \alpha \in K(r)\, K(r')$, $\beta^{-1} \alpha = \xi\xi'$, où $\xi \in K(r)$ et $\xi' \in K(r')$. D'où $\alpha = \beta\xi\xi'$. En posant $\beta\xi = \gamma$, $\gamma^{-1} \alpha \in K(r')$ et $\beta^{-1} \gamma \in K(r)$, et $(\alpha , \beta) \in rr'$.

Si $K(r)\, K(r') = K(r')\, K(r)$, alors $K(r)\, K(r')$ est un sous-groupe, et il en résulte que rr' est l'équivalence associée qui est compatible à gauche. Comme

$$(\alpha , \beta) \in rr' \iff \beta^{-1} \alpha \in K(rr') \iff \beta^{-1} \alpha \in K(r)\, K(r') ,$$

on en tire que $K(r).K(r') = K(rr')$.

Un couple stable pour la structure $(F , a , F \times F)$ est donné par trois parties de F , V_1 , V_2 et U , telles que $V_1 V_2 \subseteq U$. Une congruence est donnée par trois surjections, f_1 , f_2 , g , telles que $(f_1^o f_1 , f_2^o f_2) = q$, $(g^o g) = r$ vérifient $raq = ra$. Ici f_1 est l'application identique et $f_2 = g$. Le deuxième théorème d'isomorphisme (IV.2.8) donne ici :

PROPOSITION IV.3.6.

(a) Si U est une partie quelconque de F , sa saturation par une équivalence r est $rU = UK(r)$.

(b) L'image d'une partie stable (V_1 , V_2 , U) est $(V_1 , g(V_2) , g(U))$. Si $g^o g = r$ est compatible à gauche, $(V_1 , V_2 K(r) , UK(r))$ a même image que (V_1 , V_2 , U) , et est aussi une partie stable.

(c) Si on désigne par $U/K(r) \cap U$, où U est une partie de F, l'ensemble quotient de U par l'équivalence induite par r dans U, les structures

$$(V_1, g(V_2), g(U)), \quad (V_1, V_2/K(r) \cap V_2, U/K(r) \cap U) \quad \text{et} \quad (V_1, V_2 K(r)/K(r), UK(r)/K(r))$$

sont isomorphes si V_1, V_2, U contiennent l'élément neutre ε du groupe F.

Démonstration.

(a) $\alpha \in rU \iff \exists\, \eta \in U$ et $(\alpha, \eta) \in r \iff \eta^{-1}\alpha \in K(r) \implies \alpha \in UK(r)$. Réciproquement, si $\alpha \in UK(r)$, $\alpha = \eta\xi$ où $\eta \in U$ et $\xi \in K(r)$, et donc $\eta^{-1}\alpha \in K(r)$ et $\alpha \in rU$.

(b) De $V_1 V_2 \subseteq U$, on tire $V_1 V_2 K(r) \subseteq UK(r)$, ce qui prouve directement que la saturation de la partie stable (V_1, V_2, U) est stable. L'image de la saturation $(V_1, V_2 K(r), UK(r))$ est $(V_1, g(V_2 K(r)), g(UK(r)))$. Mais comme tout élément α de $UK(r)$ est équivalent (mod r) à un élément $\eta \in U$, on a $g(\alpha) = g(\eta)$. D'où $g(UK(r)) = g(U)$.

(c) L'ensemble des éléments de U équivalents à ε mod r, est $K(r) \cap U$. Si U contient l'élément neutre ε, $K(r) \cap UK(r) = K(r)$. Soient i^o l'injection canonique de U dans F, et j^o l'injection canonique de $UK(r)$ dans F. On a

$$(\alpha, \beta) \in iri^o \iff \alpha^{-1}\beta \in K(r) \cap U \implies \alpha^{-1}\beta \in K(r) \implies (\alpha, \beta) \in jrj^o .$$

A toute classe de $U/K(r) \cap U$ correspond donc une classe de $UK(r)/K(r)$, par une application φ. Comme toute classe de $UK(r)/K(r)$ contient au moins un élément η de U, l'application φ, qui fait correspondre à la classe de η dans $U/K(r) \cap U$ la classe de η dans $UK(r)/K(r)$, est surjective. Comme $\eta, \eta' \in U$, dont les classes modulo $K(r) \cap U$ sont distinctes, appartiennent à des classes distinctes dans $UK(r)/K(r)$, φ est injective, ce qui termine la démonstration directe de (c).

PROPOSITION IV.3.7. - Soient dans un groupe F deux couples d'équivalences compatibles à gauche (q', r'), (q'', r''), telles que :

(a) $q' \leqslant r'$, $q'' \leqslant r''$, (q', r') et (q'', r'') sont correspondants, et chacun est correspondant du couple $(q' \wedge q'', r' \wedge r'')$. Ces conditions sont les mêmes pour les noyaux.

(b) B est un sous-groupe de F tel que m^o soit l'injection canonique de $BK(r' \wedge r'')$ dans F et que l'on ait

$$K(q') \cap BK(r' \cap r'') \subseteq K(r' \cap r'')$$

$$K(q'') \cap BK(r' \cap r'') \subseteq K(r' \cap r'') .$$

Dans ces conditions, les espaces homogènes $BK(r')/K(q')$ et $BK(r'')/K(q'')$ sont isomorphes (troisième théorème d'isomorphisme pour les groupes).

Démonstration. - On utilise IV.2.10. D'après IV.3.5, les conditions (a) sont équivalentes à $K(q') \subseteq K(r')$ et $K(q'') \subseteq K(r'')$, et les couples de sous-groupes $(K(q') , K(r'))$ et $(K(q'') , K(r''))$ sont correspondants entre eux et au couple $(K(q' \wedge q'') , K(r' \wedge r''))$ vis-à-vis de l'intersection et du produit des complexes d'un groupe.

La condition (b) de IV.2.10, $mq'm^o \leqslant m(r' \wedge r'')m^o$, est équivalente à

$$K(mq'm^o) \subseteq K(m(r' \wedge r'')m^o) \quad ,$$

d'après IV.3.5-(a). Les deux équivalences sont des équivalences dans la saturation $(r' \wedge r'')B$, c'est-à-dire d'après IV.3.6-(a), des équivalences dans $BK(r' \cap r'')$, et leurs noyaux, d'après IV.3.6-(b), sont

$$K(q') \cap BK(r' \cap r'') \quad \text{et} \quad K(r' \cap r'') \cap BK(r' \cap r'') = K(r' \cap r'') \quad .$$

Les conditions (b) de IV.2.10 sont donc dans ce cas :

$$K(q') \cap BK(r' \cap r'') \subseteq K(r' \cap r'')$$

$$\text{(b')} \qquad K(q'') \cap BK(r' \cap r'') \subseteq K(r' \cap r'') \quad .$$

De même, le noyau de $m'q'm'^o$, où m'^o est l'injection canonique de $r'B$ dans E , c'est-à-dire de $BK(r')$ dans E , est

$$K(q') \cap BK(r') = K(q') \qquad \text{puisque} \quad q' \leqslant r' \quad .$$

Il en est de même pour les éléments affectés du signe " au lieu de ' . D'après IV.2.10, les espaces homogènes $BK(r')/K(q')$ et $BK(r'')/K(q'')$ sont alors en bijection.

Remarque 1. - Les conditions (b') sont certainement réalisées si B est le sous-groupe de F réduit à l'élément neutre, et $K(r')/K(q')$, $K(r'')/K(q'')$ sont en bijection.

Remarque 2. - On trouverait des résultats analogues en prenant un homomorphisme dans F , $f(\alpha , \beta) = (g(\alpha) , g(\beta))$, mais alors $g^o g$ serait une équivalence compatible dans F , les noyaux des sous-groupes normaux, et les espaces homogènes des groupes quotients.

BIBLIOGRAPHIE

Pour le chapitre I, consulter :

DUBREIL (Paul). - Algèbre, 3e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Cahiers scientifiques, 20).

KUROŠ (A. G.), LIVŠIC (A. Kh.) und ŠUL'GEIFER (E. G.). - Zur Theorie der Kategorien, p. 9-70. - Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963 (Mathematische Forschungsberichte, 15).

Pour le chapitre II, consulter :

DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

FUCHS (L.). - Partially ordered algebraic systems. - Oxford, Pergamon Press, 1963 (International Series of Monographs on pure and applied Mathematics, 28).

Pour les chapitres III et IV, consulter :

BOURBAKI (N.). - La théorie des ensembles, Chapitre 2. - Paris, Hermann, 1954 (Act. scient. et ind., 1212 ; Bourbaki, 17).

CHÂTELET (A.). - Algèbre des relations de congruence, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 64, 1947, p. 339-368.

LÉVY-BRUHL (Jacques). - Sur les catégories ordonnées, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 1669-1671.

LÉVY-BRUHL (Jacques). - Demi-groupes et catégories modulaires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 4134-4136.

PUPPE (Dieter). - Korrespondenzen in Abelschen Kategorien, Math. Annalen, t. 148, 1962, p. 1-30.

RIGUET (Jacques). - Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois, Bull. Soc. math. France, t. 76, 1948, p. 114-155.