Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Annette Decomps-Guilloux

Théorèmes d'approximation dans les adèles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, nº 1 (1965-1966), exp. nº 8, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_1_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
19e année, 1965/66, n° 8

17 janvier 1966

THÉORÈMES D'APPROXIMATION DANS LES ADÈLES

par Annette DECOMPS-GUILLOUX

I. Anneau des I-adèles. Définitions. Notations.

I désignera un sous-ensemble fini de P, ensemble de toutes les valuations distinctes de Q, corps des rationnels. o sera la valuation ordinaire, et $Q_o = R$ le corps complété de Q par rapport à la valuation ordinaire, p sera un élément de P, valuation définie par $|p|_p = \frac{1}{p}$, et Q_p le corps complété de Q par rapport à la valuation p-adique.

L'adèle $V_P(Q)$ est l'ensemble des éléments $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ du produit cartésien de R par tous les corps p-adiques $(x_0 \in R, \ldots, x_n \in Q_{p_n})$ tels que $|x_n|_{p_n} \leqslant 1$, sauf au plus pour un nombre fini d'indice n. L'addition et la multiplication composante par composante donnent à $V_P(Q)$ une structure d'anneau.

$V_P(Q)$ contient des sous-anneaux remarquables

$$V_I = \{x \in V_P, \quad x_p = 0 \quad \text{si} \quad p \notin I\} .$$

Du point de vue topologique, on considère V_I comme isomorphe au produit $\prod_{p \in I} Q_p$.

On notera $|x|_p = |x_p|_p$.

Rappelons l'expression de la décomposition d'Artin [1] dans V_I ($Z[I]$ désigne l'anneau des rationnels dont le dénominateur ne contient que des facteurs p appartenant à $I^- = I$ si $o \notin I$, $I^- = I - \{0\}$ si $o \in I$).

x étant un élément de V_I, il existe une décomposition

$$x = e_I\, E(x) + \varepsilon_I(x)$$

où $E(x) \in Z[I]$ et ε_I vérifie les inégalités

$$|\varepsilon_I(x)|_p \leqslant 1 \qquad \forall\, p \in I ,$$

$$a \leqslant \varepsilon_0(x) < a + 1 \qquad \text{si} \quad o \in I ,$$

$$a \leqslant - E(x) < a + 1 \qquad \text{si} \quad o \notin I .$$

$\varepsilon_0(x)$ désignant la composante réelle de $\varepsilon_I(x)$, a étant fixe, la décomposition est unique.

On prendra toujours dans ce qui suit $a = -\frac{1}{2}$.

II. Nombres α dans V_I .

1. Nombres α réels. Définition. Rappel des propriétés [5].

Un nombre réel $\omega > 1$ est un nombre α s'il peut être obtenu comme la limite

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

associée à une suite u_n d'entiers rationnels, déterminée par la relation de récurrence

$$\text{(R)} \qquad -\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} - \frac{u_n^2}{u_{n-1}} < \frac{1}{2} \ ,$$

et la donnée de u_0 et u_1 .

Si $u_1 \geqslant u_0 + \frac{\sqrt{u_0}}{2}$, la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers un élément $\alpha \geqslant 1$.

Si $u_1 > u_0 + \sqrt{u_0}$, dans ce cas $\alpha > 1$ et la suite $\frac{u_n}{\alpha^n}$ converge vers un élément λ .

L'ensemble des nombres α contient les nombres de Pisot (S) et de Salem (T) . On ne sait pas s'il contient d'autres éléments.

2. Nombres α_I (o n'appartient pas à I).

(a) Définition.

Un élément ω de V_I , vérifiant $|\omega|_p > 1$, $\forall\ p \in I$, est un élément de α_I s'il peut être obtenu comme la limite

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} e_I \ ,$$

où u_n est une suite d'éléments de $Z[I]$ déterminée par :

- la donnée de u_0 et u_1 avec $|u_1|_p > |u_0|_p > 1$, $\forall\ p \in I$,
- la condition (C), $-\frac{1}{2} < u_n \leqslant \frac{1}{2}$ $\forall\ n \geqslant 0$,
- les relations (R)

$$\left|\frac{u_{n+1}^2}{u_n} - u_{n+2}\right|_p \leqslant 1 \qquad \forall\, p \in I \ .$$

(b) Les relations (R) et la condition (C), et la donnée de u_0 et u_1, déterminent effectivement une suite d'éléments de $Z[I]$, et l'ensemble α_I est dénombrable.

(R) et (C) entraînent $u_{n+2} = E\left(\frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right)$ donc, u_0 et u_1 étant donnés, u_n est déterminé $\forall\, n$.

(c) Etude de la suite $\omega_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. – La démonstration comprend les étapes suivantes :

– La suite $|u_n|_p$ est croissante, $\forall\, p \in I$.

– La suite ω_n est convergente dans V_I. On montre pour cela que ω_n est une suite de Cauchy dans Q_p, $\forall\, p \in I$. On définit donc

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \omega_n \quad \text{dans } V_I \ ,$$

avec $\omega = (\omega_p)$ où $\omega_p = \lim\limits_{n\to\infty} \omega_n$ dans Q_p.

– La suite $\frac{u_n}{\omega^n}$ a pour limite un élément λ de V_I ; et l'inégalité

$$\left|\lambda - \frac{u_n}{\omega^n}\right|_p \leqslant p^{-t_p(n+2)}$$

où l'on pose $\left|\frac{u_1}{u_0}\right|_p = p^{t_p}$; ou encore

$$|\lambda\omega^n - u_n|_p \leqslant p^{-2t_p} \ ,$$

ce qui permet d'envisager la réciproque suivante :

(d) Si l'on considère un élément $\omega \in V_I$ vérifiant $|\omega|_p = p^{t_p}$, $t_p > 0$, $\forall\, p \in I$ pour lequel il existe un élément $\lambda \in V_I$ tel que, dans la décomposition d'Artin

$$\lambda\omega^n = e_I\, E(\lambda\omega^n) + \varepsilon_I(\lambda\omega^n) \ ,$$

on ait

$$|\varepsilon_I(\lambda\omega^n)|_p \leqslant p^{-2t_p} \qquad \forall\, p \in I \ ,$$

alors ω est un élément de α_I.

On montre en effet que la suite $u_n = E(\lambda\omega^n)$ vérifie les relations (R) et que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \omega\right|_p = 0 \qquad \forall\ p \in I .$$

(e) <u>L'ensemble</u> α_I <u>est dense dans</u> V_I pour $|\omega|_p > 1$, $\forall\ p \in I$. Ceci provient du fait que, d'une part, l'ensemble $e_I\ Z[I]$ est dense dans V_I si $0 \notin I$, et d'autre part, de l'inégalité $|\omega - \omega_0|_p \leqslant \frac{1}{|u_1|_p}$.

3. <u>Nombres</u> α_I (o <u>appartient à</u> I).

(a) <u>Définition</u>.

Un élément ω de V_I vérifiant $|\omega|_p > 1$, $\forall\ p \in I^-$, et $\omega_0 > 1$, est un élément de α_I s'il peut être obtenu comme la limite

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}\, e_I ,$$

où u_n est une suite d'éléments de $Z[I]$ déterminée par :

- la donnée de u_0 et u_1 vérifiant

$$|u_1|_p > |u_0|_p > 1 , \quad \forall\ p \in I^- \qquad \text{et} \qquad u_1 > u_0 + \sqrt{2u_0} \ ;$$

- les relations (R)

$$\left|\frac{u_{n+1}^2}{u_n} - u_{n+2}\right|_p \leqslant 1 , \quad \forall\ p \in I^- \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_{n+1}^2}{u_n} - u_{n+2} < \frac{1}{2} .$$

(b) <u>Les relations</u> (R) <u>et la donnée de</u> u_0 <u>et</u> u_1 <u>déterminent effectivement une suite d'éléments de</u> $Z[I]$, <u>et l'ensemble</u> α_I <u>est dénombrable</u>.

Les relations (R) entraînent en effet que $u_{n+2} = E(\frac{u_{n+1}^2}{u_n})$, donc, u_0 et u_1 étant donnés, u_n est déterminée $\forall\ n$.

(c) <u>Etude de la suite</u> $\omega_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. - La démonstration comprend les étapes suivantes :

- $|u_n|_p$ est une suite croissante, $\forall\ p \in I^-$. La suite $\{u_n\}$ est également une suite croissante pour la valuation ordinaire. Pour démontrer ce dernier point, on cherche à quelles conditions sur a et b , la relation (H) $u_n \geqslant au_{n-1} + b$ avec a et b > 0 , jointe à (R) entraîne $u_{n+1} \geqslant au_n + b$. On trouve la condition $u_1 \geqslant u_0 + \sqrt{2u_0}$ comme étant la meilleure permettant d'assurer la permanence d'une telle relation $u_n \geqslant a u_{n-1} + b$, $\forall\, n$ avec

$$a = 1 + \sqrt{\frac{1}{2u_0}} \qquad \text{et} \qquad b = \sqrt{\frac{u_0}{2}} \ .$$

- La suite $\omega_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est convergente dans V_I . On montre pour cela que ω_n est une suite de Cauchy dans Q_p , $\forall\, p \in I^-$ et dans R .
- La suite $\dfrac{u_n}{\omega^n}$ a pour limite un élément λ de V_I . On a les inégalités

$$|\lambda - \frac{u_n}{\omega^n}|_p \leqslant p^{-t_p(n+2)} \quad ,$$

en posant

$$|\frac{u_1}{u_0}|_p = p^{t_p}$$

et

$$|u_n - \lambda\omega_0^n| < \frac{1}{2(\omega_0 - 1)(\omega_0 - 1 - \varepsilon)} \quad ,$$

décomposition qui est surtout intéressante si $\omega_0 > 2$. En effet, dans ce cas $u_n = E(\lambda\omega^n)$.

(d) L'ensemble α_I est dense dans V_I pour $|\omega|_p > 1$, $\forall\, p \in I^-$ et $\omega_0 > 1$. Ceci provient du fait que $Q\, e_I$ est dense dans V_I et des inégalités

$$|\omega - \omega_0|_p \leqslant \frac{1}{|u_1|_p} \qquad \text{et} \qquad |\omega - \omega_0| < \frac{1}{u_1 - u_0} \ .$$

III. Méthode de Thue dans les adèles.

1. Méthode de Thue ; résultats dans le domaine réel.

La méthode de Thue pour montrer qu'un élément est algébrique, basée sur le principe des tiroirs, a été reprise par C. PISOT dans [5], et lui a permis d'énoncer le théorème suivant :

Soient α et λ deux nombres réels supérieurs à 1 ; posons

$$\lambda\alpha^n = u_n + \eta_n \qquad \text{où } u_n \in Z \text{ et } -\frac{1}{2} \leqslant \eta_n < \frac{1}{2} \ .$$

Si nous supposons que, $\forall\, n \geqslant 0$, on ait

$$|\eta_n| \leqslant \frac{1}{\eta} \qquad \text{avec} \quad \eta \geqslant 2e\alpha(\alpha+1)(1+\log\lambda) \quad ,$$

alors α et λ sont algébriques, et α est un nombre de Pisot ou de Salem.

2. Définition de l'ensemble S_I .

S_I est l'ensemble des éléments algébriques θ de V_I tels que $|\theta|_p > 1$, $\forall\, p \in I$, et pour lesquels il existe un polynôme $A \in Z[X]$ ayant les propriétés suivantes :

- θ est racine de A dans V_I ;
- les racines de A dans Ω_p (clôture algébrique de Q_p), distinctes de θ pour $p \in I$, appartiennent au disque $|X|_p \leqslant 1$, $\forall\, p \in P$.

Des sous-ensembles de S_I sont constitués par les ensembles $S_I^{p'}$ introduits par Françoise BERTRANDIAS dans [2], généralisant les ensembles S_q [6].

3. Méthode de Thue appliquée aux éléments de S_I dans le cas où o n'appartient pas à I .

(a) Notations. - On considèrera $\theta \in V_I$, $\lambda \in V_I$. On posera

$$|\theta|_p = p^{t_p} , \quad t_p > 0 \qquad \forall\, p \in I ,$$

$$|\lambda|_p = p^{b_p} , \quad b_p > 0 \qquad \forall\, p \in I ;$$

$$\prod_{p\in I} p^{t_p} = q \qquad \prod_{p\in I} p^{b_p} = m \quad .$$

On écrira la décomposition d'Artin

$$\lambda\theta^n = e_I\, E_I(\lambda\theta^n) + \varepsilon_I(\lambda\theta^n) \quad ,$$

en posant $u_n = E_I(\lambda\theta^n)$, vérifiant $-\frac{1}{2} < u_n \leqslant \frac{1}{2}$.

(b) Enoncé du théorème.

Soit θ un élément de V_I , vérifiant $|\theta|_p > 1$, $\forall\, p \in I$; s'il existe λ appartenant à V_I et vérifiant $|\lambda|_p > 1$, $\forall\, p \in I$, tel que dans la décomposition d'Artin

$$\lambda\theta^n = e_I\, u_n + \varepsilon_I(\lambda\theta^n)$$

on ait

$$|u_n| < \frac{1}{q^2\, e(1+\log m)} \qquad \forall\, n \geqslant 0 \quad ,$$

alors θ et λ sont algébriques, et $\theta \in S_I$.

(c) Démonstration. - On se propose de trouver des entiers rationnels $a_0, \ldots, a_1$ tels que

$$V_n = a_0 u_n + \ldots + a_s u_{n+s} = 0 \qquad \forall n$$

avec $|a_i| \leqslant a$, $\forall i = 0, \ldots, s$.

On désigne par $\frac{1}{U}$ une borne supérieure pour les u_n .

La démonstration comporte les étapes suivantes :

- Si $U > a(s+1)q$ et si $V_0 = 0$, alors $V_n = 0$, $\forall n$.

On utilise le fait que V_{n+1} étant un élément de $Z[I]$ si $V_{n+1} \prod_{p \in I} |V_{n+1}|_p < 1$, alors $V_{n+1} = 0$.

- On peut trouver, quel que soit l'entier $s \geqslant 1$, des entiers $a_0, \ldots, a_s$ tels que $V_0 = 0$ dès que $a \geqslant qm^{1/s} - 1$ si $U > a(s+1)q$.

C'est cette partie de la démonstration qui utilise le principe des tiroirs : on dénombre en effet, compte tenu des majorations envisagées, le nombre de valeurs que peut prendre l'expression

$$V'_0 = A_0|u_0| + \ldots + A_s|u_s|$$

où les A_i prennent successivement toutes les valeurs $0, 1, \ldots, a$. On a donc $(a+1)^{s+1}$ systèmes, si ce nombre est supérieur au nombre de valeurs que peut prendre l'expression V'_0 , deux expressions de V'_0 sont égales, et leurs coefficients sont distincts. On a donc une expression de V_0 nulle avec des coefficients non tous nuls.

Ceci est réalisé si

$$(a+1)^{s+1} \geqslant \frac{(s+1)\ aq^s\ m}{U} ,$$

et a fortiori si $a + 1 > qm^{1/s}$.

- En prenant pour s l'entier défini par $s - 1 \leqslant \log m < s$, et pour a l'entier défini par $a < qm^{1/s} \leqslant a + 1$, l'inégalité $U \geqslant q^2 e(1 + \log m)$ entraîne $U > a(s+1)q$.

Dans ces conditions, on peut trouver des entiers tels que $V_0 = 0$ réalisant $V_n = 0$, $\forall n \geqslant 0$.

- La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ représente donc une fraction rationnelle $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$.

L'étude du polygone de Newton permet de dire que θ est racine dans V_I du polynôme P

$$P(z) = qz^s + a_{s-1} z^{s-1} + \dots + a_0 = 0 \quad ,$$

où $q = \prod_{p\in I} p^{t_p}$ et $|a_{s-1}|_p = 1$, $\forall\, p \in I$, et dont toutes les racines complexes sont intérieures au cercle unité ou sur le cercle unité, donc θ est algébrique et appartient à S_I .

D'autre part

$$\lambda = \frac{-\theta P(1/\theta)}{Q'(1/\theta)} \quad ,$$

λ appartient donc au corps de θ .

4. Méthode de Thue appliquée aux éléments de S_I dans le cas où o appartient à I .

(a) Notations. - On considèrera $\theta \in V_I$, $\lambda \in V_I$. On posera

$$|\theta|_p = p^{t_p} \ , \quad t_p > 0 \ , \quad \forall\, p \in I^- \quad \text{et} \quad \prod_{p\in I^-} p^{t_p} = q \quad ,$$

$$|\lambda|_p = p^{b_p} \ , \quad b_p > 0 \ , \quad \forall\, p \in I^- \quad ,$$

$$\prod_{p\in I^-} p^{b_p} = m' \qquad \text{et} \qquad \lambda_0 \prod_{p\in I^-} p^{b_p} = m \quad .$$

On écrira la décomposition d'Artin

$$\lambda\theta^n = e_I\, E(\lambda\theta^n) + \varepsilon_I(\lambda\theta^n) \quad ,$$

en prenant $\varepsilon_0(\lambda\theta^n) = \varepsilon_0^{-1/2}(\lambda\theta^n)$ vérifiant $-\frac{1}{2} \leqslant \varepsilon_0(\lambda\theta^n) < \frac{1}{2}$.

(b) Enoncé du théorème.

Soit θ un élément de V_I vérifiant $|\theta|_p > 1$, $\forall\, p \in I^-$, et $\theta_0 > 1$; s'il existe $\lambda \in V_I$ vérifiant $|\lambda|_p > 1$, $\forall\, p \in I^-$, et $\lambda_0 > 1$, tel que dans la décomposition d'Artin

$$\lambda\theta^n = e_I\, E(\lambda\theta^n) + \varepsilon_I(\lambda\theta^n)$$

on ait

$$\forall\, n \geqslant 0 \ , \qquad |\varepsilon_0(\lambda\theta^n)| < \frac{1}{2eq^2\, \theta_0(1+\theta_0)(1+\log m)} \quad ,$$

alors θ et λ sont algébriques et $\theta \in S_I$.

(c) Démonstration. - Elle comporte les mêmes étapes que précédemment. Seules les majorations diffèrent ; on désigne par $\frac{1}{\psi}$ la borne supérieure de $\varepsilon_0(\lambda\theta^n)$.

- Si $\psi > (1 + \theta_0)(s + 1)$ aq et si $V_0 = 0$, alors $V_n = 0$, $\forall n$.

- On peut trouver, quel que soit l'entier $s \geqslant 1$, des entiers $a_0 , \ldots , a_s$ tels que $V_0 = 0$, dès que $a \geqslant 2q\theta_0 m^{1/s} - 1$.

- En prenant s entier défini par $s - 1 \leqslant \log m < s$, et a entier défini par $a < 2q\theta_0 m^{1/s} \leqslant a + 1$, l'inégalité

$$\psi \geqslant 2e(1 + \theta_0)\theta_0 q^2(1 + \log m) \quad \text{entraîne} \quad \psi > (1 + \theta_0)(s + 1) aq .$$

- θ est racine dans V_I d'un polynôme

$$P(z) = qz^s + a_{s-1} z^{s-1} + \ldots + a_0$$

où $q = \prod_{p\in I^-} p^{t_p}$, et

$$|a_{s-1}|_p = 1 \qquad \forall p \in I^- ,$$

dont toutes les racines complexes sont intérieures au cercle unité sauf θ_0 , donc $\theta \in S_I$ et $\lambda = \frac{-\theta P(1/\theta)}{Q'(1/\theta)}$.

IV. Etude de l'ensemble S_I

1. I se réduit à un seul élément $\{p\}$.

Dans ce cas, S_I est l'ensemble $\mathfrak{A}$ introduit par C. CHABAUTY [3].

Rappelons-en la définition :

Un élément θ de Q_p vérifiant $|\theta|_p > 1$ appartient à $\mathfrak{A}$ s'il est racine d'une équation de la forme

$$P(x) = p^t x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_{s-1} x + a_s = 0$$

(où les a_i sont des entiers rationnels, t un entier rationnel > 0), dont tous les zéros sont dans $|z| \leqslant 1$, dans C , dans $|z|_p \leqslant 1$, dans Ω_p .

On notera $|\theta_i|$ les modules des racines de P dans C , $i = 1 , 2 , \ldots , s$, $|\theta_i|_p$ les valeurs absolues p-adiques des conjugués de θ dans Ω_p , $i = 2, \ldots, s$. CHABAUTY introduit les sous-ensembles

$$\mathcal{B} = \{\theta \ , \quad \theta \in \mathcal{A} \ , \quad |\theta_i|_p < 1 \quad \text{pour} \quad i = 2 \ , \ \dots \ , \ s\} \ ,$$
$$\mathcal{C} = \{\theta \ , \quad \theta \in \mathcal{A} \ , \quad |\theta_i| < 1 \quad \text{pour} \quad i = 1 \ , \ 2 \ , \ \dots \ , \ s\} \ ,$$
$$\mathcal{D} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \ .$$

L'étude des éléments de $\mathcal{B}$ n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, et de $\mathcal{A}$ n'appartenant pas à $\mathcal{C}$, c'est-à-dire tels que le polynôme P a effectivement une racine sur le cercle unité complexe, donc la racine imaginaire conjuguée (en supposant que la racine considérée est différente de ± 1, ce qui serait sans intérêt) permet de constater dans ce cas que P se décompose sous la forme

$$P(x) = P_1(x) \ \Pi(x) \ ,$$

où $P_1(x)$ est un polynôme n'ayant aucune racine sur le cercle unité complexe, $\Pi(x)$ un polynôme réciproque dont toutes les racines complexes sont sur le cercle unité.

θ est racine de P_1 ou de Π, si θ est racine de P_1, $\theta \in \mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}$, ce qui permet de classer les éléments de $\mathcal{A}$ en deux ensembles que l'on appellera S_p et T_p, mettant en évidence l'analogie existant avec les nombres de Pisot et Salem.

Définitions.

On appellera S_p, ou plutôt S_p^0 suivant la notation de F. BERTRANDIAS, l'ensemble des éléments θ de Q_p, $|\theta|_p > 1$, racine d'un polynôme de la forme

$$P(x) = p^t \ x^s + a_1 \ x^{s-1} + \dots + a_{s-1} \ x^{s-1} + a_s = 0 \ ,$$

où $|a_1|_p = 1$ (ce qui implique que tous les zéros de P sont intérieurs au cercle unité p-adique ou sur ce cercle, sauf θ) et dont tous les zéros complexes sont intérieurs au cercle unité.

On notera T_p l'ensemble des éléments θ de Q_p, $|\theta|_p > 1$, racine d'un polynôme réciproque P :

$$P(x) = p^t \ x^s + a_1 \ x^{s-1} + \dots + a_1 \ x + p^t \ ,$$

où $|a_1|_p = 1$, $t > 0$ (ce qui implique que P a un zéro extérieur au cercle unité dans Ω_p, soit θ, un zéro intérieur, et tous les autres zéros de P sont sur le cercle unité), et dont tous les zéros appartiennent au cercle unité dans C.

D'après le résultat de CHABAUTY, S_p^0 est fermé.

L'analogie entre T_p et T est précisée par le théorème suivant :

THÉORÈME. - Tout élément de S_p^0 est limite d'éléments de T_p .

La démonstration reprend la méthode introduite par R. SALEM [7].

On considère un élément θ de S_p^0 , zéro d'un polynôme

$$P(x) = p^t x^s + a_1 x^{s-1} + \dots + a_s ,$$

et l'on forme la suite des polynômes

$$R_m(x) = x^m P(x) + Q(x) .$$

On montre successivement les deux points suivants :

- θ_m zéro de R_m , vérifiant $|\theta_m|_p > 1$, appartient à T_p .

R_m est en effet un polynôme réciproque dont tous les zéros dans C sont sur le cercle unité.

Dans Ω_p , R_m a un zéro extérieur au cercle unité θ_m , un zéro intérieur $\frac{1}{\theta_m}$, tous les autres zéros sont sur le cercle unité.

- Dans Q_p , on a $\lim\limits_{m\to\infty} \theta_m = \theta$.

2. Cas général : I est un sous-ensemble fini de I .

Nous allons chercher à caractériser les éléments de S_I qui n'appartiennent à aucun des sous-ensembles $S_I^{p'}$, où $p' \in P$, c'est-à-dire tels que, $\forall\, p \in P$, il existe effectivement une racine de A sur $|x|_p = 1$.

Plus précisément, si nous associons à θ la partition (I_h) , $h = 1 , \dots , m$, de I relative à l'élément algébrique θ (F. BERTRANDIAS [2], I, § 14), le polynôme minimal de θ , $P_{m_I}(\theta , X)$, polynôme unitaire, s'écrit par définition

$$P_{m_I}(\theta , X) = \prod_{h=1,\dots,m} P_{m_{I_h}}(\theta , X) ,$$

où les polynômes $P_{m_{I_h}}(\theta , X)$ sont des polynômes irréductibles et distincts deux à deux, et $P_{m_{I_h}}(\theta , X)$ a l'expression

$$P_{m_{I_h}}(\theta , X) q_h = A_h(x) ,$$

où A_h est un polynôme à coefficients entiers irréductible ayant pour racine θ_{I_h} dans V_{I_h} .

A s'écrit

$$A(x) = qx^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \dots + a_0 = \prod A_h(x) \quad ,$$

où $q = \prod_{p \in I} p^{t_p}$, $t_p > 0$, $|a_{n-1}|_p = 1$, $\forall\ p \in I$.

La décomposition $A(x) = \prod A_h(x)$ peut présenter deux aspects :

- $\exists$ un élément de la partition I_{h_o} pour lequel $\exists\ p \in P$ tel que les racines de $A_h(x)$ sont dans $|x|_p < 1$ (sauf $\theta_{I_{h_o}}$ si $p \in I_{h_o}$), alors

$$\theta_{I^0_{h_o}} \in S^p_{I_{h_o}} \quad .$$

- $\forall\ h$, le polynôme $A_h(x)$ a au moins une racine sur le cercle unité dans Ω_p, $\forall\ p \in P$, en particulier pour o .

Nous laisserons le premier cas pour nous intéresser au second.

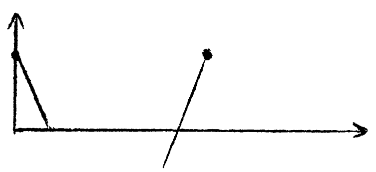
(a) $o \notin I_h$. - A_h a une racine sur le cercle unité, l'imaginaire conjugué de cette racine est également racine, A_h est réciproque et de la forme :

$$A_h(x) = q_h^{(0)}\, x^s + q_h^{(1)}\, x^{s-1} + \dots + q_h^{(1)}\, x + q_h^{(0)} \quad ,$$

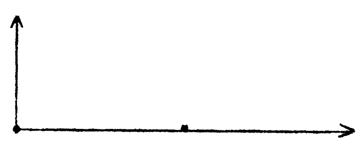
où

$$q_h^{(0)} = \prod_{p \in I_h} p^{t_p} \qquad |q_h^{(1)}|_p = 1 \ , \quad \forall\ p \in I_h \quad .$$

Le polygone de Newton a la forme suivante :



$\forall\ p \in I_h$



$\forall\ p \notin I_h$.

(b) $o \in I_h$. - A_h est, dans ce cas, un polynôme réciproque dont une racine complexe est extérieure au cercle unité, une intérieure ; toutes les autres sont sur le cercle unité.

Le polygone de Newton présente la même allure que précédemment.

Ces différentes remarques nous amènent donc à introduire un nouvel ensemble T_I .

<u>Définition de</u> T_I .

T_I est l'ensemble des éléments θ algébriques de V_I , vérifiant $|\theta|_p > 1$,

$\forall\ p \in I$, et $\theta_0 > 1$ si $o \in I$, et pour lesquels il existe un polynôme A à coefficients entiers rationnels ayant les propriétés suivantes :

- θ est racine de A dans V_I ;
- A est un polynôme réciproque de la forme

$$A(x) = qx^s + q_1\ x^{s-1} + \dots + q_1\ x + q \ ,$$

où $q = \prod_{p \in I^-} p^{t_p}$ et $|q_1|_p = 1$, $\forall\ p \in I^-$;

- les racines de A dans C sont toutes sur le cercle unité si $o \notin I$.

A a dans C une racine θ_0 extérieure au cercle unité, une intérieure ; toutes les autres racines sont sur le cercle unité si $o \in I$.

Dans ces conditions, si $(I_h)_{h=1\dots m}$ est la partition de I relative à θ , et $A(x) = \Pi\ A_h(x)$, la décomposition de A correspondante, tous les facteurs A_h sont réciproques, et toutes leurs racines complexes sont sur le cercle unité (à l'exception d'un polynôme A_h si $o \in I$, qui a une racine intérieure au cercle unité, une extérieure, toutes les autres appartenant au cercle unité).

D'autre part, l'égalité

$$qx^s + q_1\ x^{s-1} + \dots + q_1\ x + q = \Pi(q_h^{(0)}\ x^{s_h} + q_h^{(1)}\ x^{s_h - 1} + \dots + q_h^{(1)}\ x + q_h^{(0)})$$

entraîne $q = \Pi\ q_h^{(0)}$,

$$q^{(1)} = \sum_{h_j = 1, \dots, m} (\Pi\ q_{h_i}^{0})\ q_{h_j}^{(1)} \ ,$$

et par conséquent $|q_{h_j}|_p = 1$; A_{h_j} a donc, dans Ω_p , pour $p \in I_{h_j}$, une racine extérieure au cercle unité, une intérieure ; toutes les autres sont sur le cercle unité.

Donc $\theta_{I_{h_j}} \notin S^{p'}_{I_{h_j}}$ pour $p \in I_{h_j}$. Si $p \notin I_{h_j}$, il est évident que $\theta_{I_{h_j}} \in S^{p'}_{I_{h_j}}$.

Le théorème suivant permet de préciser l'analogie entre les éléments introduits et les nombres de Pisot et de Salem.

THÉORÈME. - Tout élément de S_I^0 est limite d'éléments de T_I .

<u>Démonstration</u>. - Soit θ un élément de V_I appartenant à S_I^0 , racine d'un polynôme $P \in Z[z]$:

$$P(z) = qz^s + q_1\ z^{s-1} + \dots + q_s \ ,$$

où

$$q = \prod_{p \in I^-} p^{t_p} \qquad \text{et} \qquad |q_1|_p = 1 \ , \quad \forall\ p \in I^- \ ,$$

dont les racines complexes sont dans $|z| < 1$ (sauf θ_0 si $p \in I$).

Formons $R_m(z) = z^m P(z) + Q(z)$ qui est un polynôme réciproque.

(a) $R_m(z)$ __a une racine__ $\theta_m \in T_I$. - $R_m(z)$ a, pour $p \in I^-$, une racine $\theta_{m,p}$ extérieure à $|z|_p = 1$, une racine intérieure ; toutes ses autres racines sont sur le cercle unité.

Pour $p \notin I$, $R_m(z)$ a toutes ses racines sur $|z|_p = 1$.

Dans C , si $o \notin I$, on montre que $R_m(z)$ a $m + s$ racines sur le cercle unité.

Si $o \in I$, une démonstration analogue à la démonstration de R. SALEM permet de conclure que R_m a une racine intérieure au cercle unité, une racine extérieure ; toutes les autres racines appartiennent au cercle unité.

θ_m est donc un élément de T_I .

(b) $\lim_{m\to\infty} \theta_m = \theta$, __élément de__ S_I^0 . - On montre les deux points suivants :

- $\lim \theta_{m,p} = \theta_p$, $\forall\ p \in I^-$.

La démonstration est analogue au cas où I se réduit à un seul élément.

- $\lim \theta_{m,0} = \theta_0$, si $o \in I$.

La démonstration est analogue à celle de R. SALEM.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions, New York and Princeton University, 1950-1951 (multigraphié).

[2] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965 (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[3] CHABAUTY (Claude). - Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 465-466.

[4] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola norm. sup., Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248.

[5] PISOT (Charles). - Répartition modulo 1 des puissances successives des nombres réels, Comment. Math. Helvet., t. 19, 1946-1947, p. 153-160.

[6] PISOT (Charles). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.

[7] SALEM (Raphaël). - Power series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.