Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

MOHAMED AMARA

Ensembles fermés de nombres algébriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, nº 1 (1965-1966), exp. nº 6, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_1_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
19e année, 1965/66, n° 6

20 décembre 1965

ENSEMBLES FERMÉS DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

par Mohamed AMARA

Nous nous proposons d'étudier les ensembles S_q des nombres algébriques réels, supérieurs à l'unité, introduits par Charles PISOT [7]. Nous rappellerons tout d'abord la définition de ces ensembles.

Définition. - Soit q un entier rationnel non nul. Nous désignerons par S_q un ensemble de nombres algébriques ayant les propriétés suivantes :

1° θ appartient à S_q si $\theta > 1$, et $\frac{1}{\theta}$ est le seul zéro situé dans $|z| \leqslant 1$ d'un polynôme $Q(z)$ à coefficients entiers tel que $Q(0) = q$.

2° Il existe un polynôme $A(z)$ à coefficients entiers tel que

$$A(\frac{1}{\theta}) \neq 0 \ , \qquad |A(0)| \geqslant |q| \qquad \text{et} \qquad |A(z)| \leqslant |Q(z)| \quad \text{sur} \quad |z| = 1 \ .$$

Remarques.

1° On ne change pas θ en changeant $Q(z)$ en $-Q(z)$, ou $A(z)$ en $-A(z)$. Nous pouvons supposer que $q \geqslant 1$ et $A(0) \geqslant q$.

2° La définition de S_q n'implique pas que $Q(z)$ soit nécessairement irréductible ou primitif. Nous pouvons multiplier Q et A par un même entier, ce qui montre que $S_{q'} \subset S_q$ si q' divise q . En particulier, nous avons $S_1 \subset S_q$, où S_1 est identique à l'ensemble des nombres de Pisot-Vijayaraghavan.

Les ensembles S_q ont la propriété remarquable, établie par SALEM pour $q = 1$, et généralisée par C. PISOT [7], de former un ensemble fermé.

THÉORÈME 1. - L'ensemble S_q est fermé.

Tout d'abord, pour tout θ de S_q , nous avons l'inégalité $\theta > 1 + \frac{1}{4q}$, d'où 1 ne peut être point limite de S_q .

La démonstration de ce théorème est basée sur les familles compactes de fractions rationnelles. A toute suite θ_ν de S_q tendant vers un nombre fini θ , nous associons la famille des fractions rationnelles $\frac{A_\nu(z)}{Q_\nu(z)}$ servant à les définir. De cette famille, nous pouvons extraire une suite convergeant vers une fraction $\frac{A(z)}{Q(z)}$, admettant $\frac{1}{\theta}$ comme pôle, et vérifiant toutes les propriétés pour que θ appartienne à S_q . En considérant les développements de Taylor à l'origine des fonctions $\dfrac{A_v(z)}{Q_v(z)}$ et $\dfrac{A(z)}{Q(z)}$:

$$\frac{A_v(z)}{Q_v(z)} \equiv u_{0,v} + \dots + u_{n,v}\, z^n + \dots$$

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv u_0 + \dots + u_n\, z^n + \dots .$$

Nous savons que les coefficients $u_{n,v}$, pour n fixé, sont égaux à partir d'un certain rang à leur limite u_n, ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{A_v(z)}{Q_v(z)} - \frac{A(z)}{Q(z)} \equiv z^{M(v)} \frac{K_v(z)}{Q.Q_v} ,$$

ou encore

$$A_v(z)\, Q(z) - A(z)\, Q_v(z) \equiv z^{M(v)}\, K_v(z) , \tag{1}$$

$M(v)$ tendant vers l'infini avec v, et $K_v(z)$ désignant un polynôme à coefficients entiers, soit en particulier $|K_v(0)| \geqslant 1$. La relation (1) nous permet de caractériser l'ensemble dérivé S'_q, et d'établir quelques propriétés des ensembles dérivés successifs $S_q^{(n)}$. SALEM a montré que les $S_1^{(n)}$ ne sont pas vides, il en sera de même pour les $S_q^{(n)}$, $q \geqslant 1$.

THÉORÈME 2. - <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément</u> θ <u>fini de</u> S_q <u>appartienne à l'ensemble</u> S'_q <u>est qu'il existe un polynôme</u> $A(z)$ <u>à coefficients entiers, avec</u> $A(0) \geqslant q$, <u>et tel que, sur</u> $|z| = 1$,

$$|A(z)| \leqslant |Q(z)| ,$$

<u>l'égalité n'ayant lieu qu'en un nombre fini de points</u>.

La condition nécessaire s'établit en appliquant le théorème de Rouché au premier membre de (1) et en tenant compte du fait que $M(v)$ tend vers l'infini avec v.

Pour la réciproque, nous construisons une suite θ_v de S_q admettant θ comme limite. Pour cela, nous formons la famille :

$$\varphi_v(z) \equiv \frac{A(z) + \varepsilon z^{v+h}\, P(z)}{Q(z) + \varepsilon z^{v+s}\, B(z)} ; \qquad \varepsilon = \pm 1 ,$$

P et B désignant respectivement les polynômes réciproques de Q et A, s et h les degrés respectifs de Q et A.

$\varphi_v(z)$ admet d'après sa formation exactement un pôle $\dfrac{1}{\theta_v}$ dans $|z| < 1$ et vérifie $|\varphi_v(z)| = 1$ sur $|z| = 1$. Nous avons ainsi construit une suite θ_v de S_q , et θ sera limite de cette suite, soit à droite soit à gauche suivant que $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$.

La relation (1) nous permet aussi d'établir :

LEMME 1. - Soit une suite θ_v de S_q tendant vers le nombre fini θ . Une suite extraite de la famille des $\frac{A_v(z)}{Q_v(z)}$ tendra vers $\frac{A(z)}{Q(z)}$, et pour cette suite partielle nous avons :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \left|\frac{A(z)}{Q(z)}\right|^2 \frac{dz}{z} \leqslant \lim_{v\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \left|\frac{A_v(z)}{Q_v(z)}\right|^2 \frac{dz}{z} - \frac{1}{(q\theta)^4} .$$

Du lemme 1, et par une démonstration par récurrence, nous tirons le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - Si un nombre θ appartient à l'ensemble dérivé $S_q^{(n)}$, il existe un polynôme $A(z)$ à coefficients entiers tel que $A(0) \geqslant q$ et que, sur $|z| = 1$, on ait $|A(z)| \leqslant |Q(z)|$, la valeur moyenne de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ étant au plus égale à $1 - \frac{n}{(q\theta)^4}$.

COROLLAIRE. - Le plus petit élément de l'ensemble $S_q^{(n)}$ est supérieur à $\frac{n^{1/4}}{q}$, et par conséquent augmente indéfiniment avec n .

Il n'existe donc pas de dérivé d'ordre transfini de S_q .

A. Recherche des éléments d'accumulation de S_q .

Nous rappelons en premier lieu les résultats obtenus pour S_1 .

Soit $\frac{A(z)}{Q(z)}$ la fraction rationnelle définissant un élément de S_1' . L'étude de l'équation $A(z) - Q(z) \equiv z\, u(z)$, $u(0) = 1$, a permis à MM. DUFRESNOY et PISOT [2] de déterminer le plus petit élément de S_1 , à savoir $\alpha_1 = 1,6180339...$, zéro du polynôme $1 + z - z^2$. De plus, par une autre méthode ne faisant appel qu'au "problème des coefficients", ils ont montré dans [3] que l'ensemble des éléments de S_1' inférieurs à 1,8 contient, outre α_1 , le nombre $\alpha_2 = 1,7548776...$, zéro du polynôme $1 - z + 2z^2 - z^3$. Par une méthode analogue, Mme GRANDET [6] a montré que 2 est le plus petit éléments de S_1'' . Elle n'a pas obtenu tous les éléments de S_1' inférieurs à 2 , mais toutefois elle a signalé parmi ceux-ci les nombres β_n , zéros des polynômes :

$$\frac{1 - z^{n+1}(2 - z)}{1 - z} , \qquad n \geqslant 1 .$$

L'utilisation simultanée des deux méthodes indiquées, et principalement la première, va nous permettre de déterminer tous les éléments de S'_q inférieurs au nombre θ^* , zéro du polynôme $q - 1 + (q - 1)z - (q - 3)z^2 - qz^3$.

En plus de la suite des β_n signalée par Mme GRANDET, l'ensemble des éléments de S'_1 inférieurs à $\theta^* = 2$, contient la suite des α_n , zéros des polynômes :

$$1 - z + z^n(2 - z) , \qquad n \geqslant 1 .$$

Le nombre 2 est le seul point d'accumulation des nombres α_n et β_n , lesquels vérifient :

$$\alpha_1 = \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1} < \dots < 2 .$$

Les éléments de S'_q $(q \geqslant 2)$ inférieurs à θ^* font partie de la suite des $\alpha_{1,q}$, zéros des polynômes :

$$q - 1 + z - qz^2 + z^n(q - 1 + 2z - z^2) , \qquad n \geqslant 1 ,$$

et les nombres $\alpha_{n,q}$ inférieurs à θ^* correspondent à $n \leqslant 3$, soit

$$\alpha_{1,q} < \alpha_{2,q} < \alpha_{3,q} < \theta^* .$$

MM. DUFRESNOY et PISOT dans [4] et [5] ont montré que la recherche des plus petits éléments de S_q et S'_q est intimement liée au "problème des coefficients" d'une fonction méromorphe dans $|z| \leqslant 1$ et vérifiant $|f(z)| \leqslant 1$ sur $|z| = 1$.

Soit $f(z) = \frac{A(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle associée à un élément θ de S_q . Nous dirons que $f(z)$ est de rang infini si $A(z) \equiv \varepsilon z^s Q(1/z)$, $\varepsilon = \pm 1$, de rang infini dans le cas contraire.

Soit $\frac{A(z)}{Q(z)} = u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots$ le développement de Taylor de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ à l'origine. Nous le désignerons par :

$$\frac{A}{Q} \equiv (u_0 , u_1 , \dots , u_n , \dots) .$$

Nous savons d'après [4] qu'il existe un polynôme $E_n(z)$, de degré n , avec $E_n(0) = 1$, tel que, si nous posons $D_n(z) \equiv - z^n E_n(1/z)$, le développement de $\frac{D_n(z)}{E_n(z)}$ coïncide jusqu'à l'ordre $n - 1$ avec celui de $\frac{A(z)}{Q(z)}$, soit :

$$\frac{D_n}{E_n} \equiv (u_0\ ,\ u_1\ ,\ \dots\ ,\ u_{n-1}\ ,\ w_n\ ,\ \dots)\ ,$$

w_n étant déterminé d'une manière unique. De même, si nous pouvons trouver un polynôme $E^*_n(z)$ de degré n, avec $E^*_n(0) = 1$, tel que si nous posons

$$D^*_n(z) \equiv z^n\, E^*_n(1/z)\ ,$$

le développement de $\frac{D^*_n}{E^*_n}$ s'écrit :

$$\frac{D^*_n}{E^*_n} \equiv (u_0\ ,\ u_1\ ,\ \dots\ ,\ u_{n-1}\ ,\ w^*_n\ ,\ \dots)\ ,$$

w^*_n étant déterminé d'une manière unique. Nous avons alors :

(2)
$$w_n \leqslant u_n \leqslant w^*_n\ ,$$

l'une des égalités entraînant celle de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ avec $\frac{D_n(z)}{E_n(z)}$ ou $\frac{D^*_n(z)}{E^*_n(z)}$; s'il n'y a pas égalité, $D_n(z)$ et $D^*_n(z)$ ont chacun un zéro et un seul τ_n et τ^*_n dans $|z| \geqslant 1$ tels que

$$1 \leqslant \tau_n < \theta < \tau^*_n\ ;$$

si $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang infini, les coefficients u_n vérifient des inégalités plus fortes, à savoir :

(3)
$$w_n + \frac{1}{q^2} \leqslant u_n \leqslant w^*_n - \frac{1}{q^2}\ , \qquad n \geqslant r\ .$$

Signalons la relation de récurrence vérifiée par les $D_n(z)$:

(4)
$$D_{n+2}(z) \equiv (1 + z)\, D_n(z) - z.\frac{u_{n+1} - w_{n+1}}{u_n - w_n}\, D_n(z)\ , \qquad n \geqslant 1\ .$$

Puisque nous nous intéressons aux éléments de S_q inférieurs à θ^*, de (4) nous tirons :

(5)
$$u_{n+1} - w_{n+1} < \frac{1 + \theta^*}{\theta^*}\,\frac{D_{n+1}(\theta^*)}{D_n(\theta^*)}\,(u_n - w_n)\ , \qquad n \geqslant 1\ .$$

Des propriétés des polynômes D_n et de la relation (5), nous déduisons le lemme suivant :

Des propriétés des polynômes D_n et de la relation (5), nous déduisons le lemme suivant :

LEMME 2. - Les fractions rationnelles associées aux éléments de S_q inférieurs à θ^* admettent l'un des développements suivants :

(6) $$\left(1 , \frac{1}{q} , \frac{1}{q^2} , \ldots , u_n , \ldots\right) .$$

(7) $$\left(1 , \frac{1}{q} , u_2 , \ldots , u_n , \ldots\right) \qquad 2 \leqslant q^2 u_2 \leqslant 3 .$$

(8) $$(1 , 2 , \ldots , u_n , \ldots) \qquad \text{uniquement pour } q = 1 .$$

Remarque 1. - Les développements (6) déterminent d'une manière unique la fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$, à savoir :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{q(1 - z^2) + \varepsilon z^n(q + z - qz^2)}{q - z - qz^2 + \varepsilon qz^n(1 - z^2)} , \qquad \varepsilon = \pm 1 \text{ ou } 0 , \quad \text{et} \quad n \geqslant 1 .$$

Nous obtenons deux suites admettant pour point d'accumulation $\theta^{(q)}$, zéro du polynôme $q + z - qz^2$. Si $q = 1$, $\theta^{(q)} = \alpha_1$ et, pour $q \geqslant 2$, $\theta^* < \theta^{(q)}$.

Remarque 2. - Le développement (7) montre qu'il existe un polynôme $u_1(z)$ à coefficients entiers avec $u_1(0) = 1$ et tel que

(9) $$A - Q = z\, u_1(z) .$$

De plus, si $q^2 u_2 = 3$, il existe un polynôme $u_3(z)$ à coefficients entiers avec $u_3(0) = 1$ et tel que

(10) $$\begin{cases} qE_3\, A - qD_3\, Q \equiv z^3\, u_3(z) \\ qD_3 \equiv q + (q - 2)z - (q - 3)z^2 - qz^3 . \end{cases}$$

C'est ici qu'intervient le choix de θ^* . θ^* est déterminé de manière que

$$q^2(u_3 - w_3) < 2 .$$

Or il est facile de voir que c'est un entier, et comme (3) sera vraie pour $n \geqslant 3$, il s'ensuit que

$$q^2(u_3 - w_3) = 1 ,$$

d'où (10).

Remarque 3. - Pour les développements (7), d'après (6), nous avons :

$$0 \leqslant u_n - w_n \leqslant 2 \qquad \text{pour } n \geqslant 2 ,$$

$$(1 - z)\, D_n \equiv 1 - 2z^n + z^{n+1} \quad .$$

Si $\frac{A}{Q}$ est de rang infini, nous devons avoir :

$$1 \leqslant u_n - w_n \leqslant 2 \qquad \text{pour} \quad n \geqslant 2 \quad .$$

Si pour tout n , $u_n - w_n = 2$, le développement de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ coïncide avec celui de $\frac{1}{1 - 2z}$, d'où $\theta = 2$. Par suite, pour les éléments de S_1' inférieurs à 2 , il existe un indice n tel que $u_n - w_n = 1$, d'où :

(11) $$AE_n - QD_n \equiv z^n\, u_n(z) \ , \qquad u_n(0) = 1 \quad .$$

Dans le cas où $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang fini, il existe un indice n tel que $u_n - w_n = 0$, d'où :

$$(1 - z)\, Q \equiv 1 - 2z^n + z^{n+1} \quad ,$$

$$(1 - z)\, A \equiv 1 - 2z + z^{n+1} \quad .$$

Nous remarquons que notre étude va se ramener à celle de l'équation

(12) $$A_n(z) - Q_n(z) \equiv z^n\, u_n(z) \ , \qquad u_n(0) = 1 \quad .$$

$A_n(z)$ et $Q_n(z)$ sont des polynômes à coefficients entiers tels que

$$|A_n(z)| \leqslant |Q_n(z)| \qquad \text{sur} \quad |z| = 1 \quad ,$$

l'égalité ayant lieu en un nombre fini de points. De plus $Q_n(z)$ admet exactement n zéros dans $|z| < 1$.

Posons $P_n(z) \equiv \varepsilon_n\, z^{s_n}\, Q_n(1/z)$, ε_n choisi de manière que $P_n(0) \geqslant 1$.

LEMME 3. - Le polynôme $u_n(z)$ admet tous ses zéros sur $|z| = 1$ et, de plus, distincts.

LEMME 4. - L'équation $Q_n(z) \pm z^m\, P_n(z) = 0$, où m désigne un entier positif, négatif ou nul, admet au moins $|m + s_n - 2n|$ racines distinctes sur $|z| = 1$.

Soit $\frac{A(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle associée à un élément θ de S_q' , $\theta < \theta^*$. Par suite, $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang infini. Posons :

$$P(z) \equiv \varepsilon z^s\, Q(1/z) \qquad \text{et} \qquad B(z) \equiv \varepsilon' z^h\, A(1/z) \quad ,$$

s et h désignant respectivement les degrés de Q et A , ε et ε' étant choisis de manière que $P(0)$ et $B(0)$ soient positifs.

1. Etude des fractions rationnelles $\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv (1\ ,\ 2\ ,\ \dots)$.

Nous supposerons que $\frac{B}{Q}$ admet aussi le développement (8). Le cas où $\frac{B}{Q}$ admet le développement (7) sera étudié ultérieurement. Les polynômes A , B , Q vérifient :

$$AE_{n_1} - QD_{n_1} \equiv z^{n_1} u_{n_1}(z)\ , \qquad u_{n_1}(0) = 1\ , \tag{13}$$

$$BE_{n_2} - QD_{n_2} \equiv z^{n_2} v_{n_2}(z)\ , \qquad v_{n_2}(0) = 1\ , \tag{14}$$

avec $(1 - z)\, D_{n_i} \equiv 1 - 2z^{n_i} + z^{n_i+1}$.

Nous distinguons trois cas :

(a) $h > s$. — L'application des lemmes 3 et 4 aux équations (13) et (14) et à celles qui s'en déduisent, par le changement de z en $\frac{1}{z}$, nous donne en premier lieu $n_1 = n_2$ et ensuite $A \equiv B$. Compte tenu de cette égalité, nous obtenons :

$$A[E_n^2 - z^{2n}] \equiv Q[E - D_n + z^n]\ ,$$

soit

$$\frac{A}{Q} \equiv \frac{1 - z^2}{1 - 2z} \qquad \text{et} \qquad \theta = 2\ .$$

(b) $h < s$. — Comme dans le cas précédent, nous montrons tout d'abord que $A \equiv B$. De là nous déduisons $s - h = 2$ et $\varepsilon\varepsilon' = 1$. Le résultat final s'écrira:

$$A[E_n^2 - z^{2(n+1)}] \equiv Q[E_n D_n + z^n]\ ,$$

ou encore :

$$\frac{A}{Q} \equiv \frac{1 - z^n}{1 - z(2 - z^{n+1})}\ , \qquad n \geqslant 2\ ,$$

d'où la suite des β_n $(n \geqslant 2)$.

(c) $h = s$. — Il n'existe aucune fraction rationnelle de rang infini, admettant le développement (8) et possédant un pôle supérieur à $\frac{1}{2}$.

2. Etude des $\frac{A(z)}{Q(z)} = (1\ ,\ \frac{1}{q}\ ,\ u_2\ ,\ \dots\ ,\ u_n\ ,\ \dots)$.

Les polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ vérifient alors la relation (9) :

$$A - Q \equiv z\, u_1(z)\ .$$

Le développement de $\frac{B}{Q}$ est supposé quelconque. Nous avons seulement l'hypothèse que $B(0) \leqslant q$. Si $q = 1$, $\frac{B}{Q}$ admettrait l'un des développements (7) ou (9).

(a) $h > s$. - L'application des lemmes (3) et (4) à l'équation (9) et à celle qui s'en déduit, par le changement de z en $\frac{1}{z}$, nous affirme que :

$$q = 1 \qquad \text{et} \qquad u_3 = 3 \quad .$$

Mais alors les polynômes A et Q vérifient de plus (10), et de l'étude de (10) nous déduisons le résultat :

$$\frac{A}{Q} \equiv \frac{1 - z + z^2}{1 - 2z} \qquad \text{et} \qquad \theta = 2 \quad .$$

(b) $h < s$. - De la même manière que dans le cas précédent, nous obtenons tout d'abord $q = 1$ et $u_2 = 2$. Nous avons deux possibilités suivant que $\frac{B}{Q}$ admet les développements (7) ou (8).

$$- \frac{B}{Q} \equiv (1 , 2 , \ldots) \quad .$$

En plus de (9), nous avons :

$$BE_n - QD_n \equiv z^n v_n(z) , \qquad v_n(0) = 1 \quad .$$

L'étude simultanée de ces deux relations nous donne :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{1 - z + z^n}{1 - 2z + z^n(1 - z)} , \qquad n \geqslant 3 ,$$

d'où la suite des α_n $(n \geqslant 3)$.

$$- \frac{B}{Q} \equiv (1 , 1 , \ldots) \quad .$$

Tout d'abord nous montrons que $A \equiv B$, et le résultat s'écrit :

$$\frac{A}{Q} \equiv \frac{1}{1 - z - z^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{A}{Q} \equiv \frac{1 - z + z^2}{1 - 2z + z^2 - z^3} ,$$

d'où α_1 et α_2.

(c) $h = s$. - Nous étudions tout d'abord le cas où $q^2 u_2 = 3$, cas où les polynômes A et Q vérifient les relations (9) et (10). Nous pouvons montrer que la seule fraction rationnelle associée aux éléments θ de S'_q, inférieurs à θ^*, est celle précisément qui définit le nombre θ^* :

$$\frac{A}{Q} \equiv \frac{q + (q - 2)z - (q - 2)z^2 - (q - 1)z^2}{q + (q - 3)z - (q - 1)z^2 - (q - 1)z^2} \quad .$$

Pour poursuivre la recherche des fractions rationnelles de développements

$$(1 , \frac{1}{q} , \frac{2}{q^2} , \ldots) ,$$

nous établirons en premier lieu les lemmes suivants :

LEMME 5. - Le degré U_1 de $u_1(z)$ vérifie $U_1 \leqslant s - 2$. Si $U_1 = s - 2$, $B(0) = q - 1$ ou $B(0) = q = 1$. Pour $U_1 \leqslant s - 3$, $B(0) = 1$.

LEMME 6. - Il existe un polynôme $V_{n_1}(z)$ à coefficients entiers ou $V_{n_1}(0) = 1$ tel que

$$Q_1 + \varepsilon_1 z B(z) \equiv V_{n_1}(z) [q - z - qz^2 - \varepsilon_2 qz^{n_1}(1 - z^2)] ,$$

avec $\varepsilon_1 = - 1$ pour $U_1 = s - 2$, et $\varepsilon_1 = + 1$ pour $U_1 \leqslant s - 3$.

La démonstration du lemme 6 est basée sur la transformation :

$$f_1(z) \equiv \frac{A + \varepsilon_1 zP}{Q + \varepsilon_1 zB} \equiv (1 , \frac{1}{q} , \frac{1}{q^2} , \ldots) .$$

De la remarque 1 du lemme 2, le résultat s'ensuit.

- <u>Etude du cas</u> $U_1 = s - 2$ et $B(0) = q = 1$. - Dans ce cas, les polynômes Q et P vérifient la relation $P - Q \equiv 2zu_1$, d'où $\frac{P}{Q} \equiv (1 , 2 , 4 , \ldots)$ et, d'après la remarque 3 du lemme 2,

$$(1 - z) Q(z) \equiv 1 - 2z^n + z^{n+1} , \qquad n \geqslant 2 .$$

D'où la suite des β_n $(n \geqslant 2)$ et la famille des fractions rationnelles associées:

$$\frac{A}{Q} \equiv \frac{(1 - z)(1 - z^n)}{1 - 2z + z^{n+1}} , \qquad n \geqslant 2 .$$

- <u>Etude du cas</u> $U_1 = s - 2$ et $B(0) = q - 1$ $(q \geqslant 2)$. - L'application du lemme 6 nous permet de montrer que les seuls éléments de S'_q inférieurs à θ^* font partie de la suite des $\alpha_{n,q}$ définis par les fractions :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{q - z - (q - 1)z^2 + z^n(q - (q - 1)z^2)}{q - 2z - (q - 1)z^2 + z^n(q - z - (q - 1)z^2)} ,$$

à savoir $\alpha_{1,q} < \alpha_{2,q} < \alpha_{3,q} < \theta^*$.

- <u>Etude du cas</u> $U_1 \leqslant s - 3$. - Dans l'étude de ce cas, nous nous inspirerons de la démonstration utilisée par MM. DUFRESNOY et PISOT pour montrer que α_1 est le plus petit élément de S_1'. Nous utiliserons certains de leurs résultats qui restent valables pour $q \geqslant 1$, et nous établirons le théorème suivant :

THÉORÈME 4. - Supposons qu'il existe deux polynômes à coefficients entiers V_{n_p}, avec $V_{n_p}(0) = 1$, et $Q_{n_p} \equiv q^{(p)} - z - q^{(p)} z^2 + \varepsilon_2 z^{n_p} q^{(p)}(1 - z^2)$, $(\varepsilon_2 = \pm 1)$, tels que :

$$Q(z) + \varepsilon_1 z^p B(z) \equiv V_{n_p} Q_{n_p} .$$

Alors, nous avons :

$$U_1 \equiv V_{n_p} \equiv 1 .$$

Nous savons, d'après le lemme 6, qu'il existe un polynôme V_{n_1}, $V_{n_1}(0) = 1$, tel que :

$$Q + zB \equiv V_{n_1}[q - z - qz^2 + \varepsilon_2 qz^{n_1}(1 - z^2)] , \qquad n_1 \geqslant 1 .$$

Nous sommes alors dans les conditions d'application du théorème 4, d'où :

$$(14) \qquad \begin{cases} A - Q \equiv z \\ Q + zB \equiv q - z - qz^2 - \varepsilon qz^{n-1}(1 - z^2) , & n \geqslant 2 . \end{cases}$$

- Cas où $q = 1$. - Alors $B(z)$ est identique à A. Nous déduisons la suite des α_n $(n \geqslant 2)$ et la suite des fractions associées :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{(1 - z)(1 + z^n)}{1 - 2z + z^n(1 - z)} , \qquad n \geqslant 2 ;$$

résultat valable pour $n \geqslant 1$, en ajoutant celui obtenu dans la remarque 1 du lemme 2.

- Cas où $q \geqslant 2$. - Pour $s \geqslant 4$, nous utilisons la transformation

$$\varphi(z) \equiv \frac{A - P}{Q - B} .$$

En tenant compte de (14), nous trouvons que :

$$\varphi \equiv \left(1 , \frac{1}{q - 1} , \frac{1}{(q - 1)^2} , \ldots\right) .$$

Il existe donc un polynôme $V_n(z)$ tel que :

$$(15) \qquad Q - B \equiv V_n[q - 1 - z - (q - 1)z^2 + \varepsilon_2 z^n(q - 1)(1 - z^2)] ,$$

et d'après le théorème 4, $V_n \equiv 1$.

Les relations (14) et (15) donnent alors :

$$Q(z) \equiv q - 2z - (q-1)z^2 - \varepsilon z^n(1-z) \quad ,$$

et tout nombre θ de S_q , défini par $Q(z)$, sera supérieur à θ^* , cas à éliminer.

Pour $s = 3$, nous avons :

$$Q(z) \equiv q - 2z - qz^2 + z^3 \qquad \text{ou} \qquad q - 2z + q_2 z^2 - z^3 \quad ,$$

et les nombres θ correspondants sont supérieurs à θ^* .

L'ensemble de nos résultats peuvent être résumés dans les théorèmes suivants :

THÉORÈME 5. - <u>Les éléments de</u> S_1'' <u>inférieurs à</u> 2 <u>sont les nombres</u> α_n <u>et</u> β_n . <u>Le nombre</u> 2 <u>est le plus petit élément de</u> S_1'' .

<u>Remarque</u>. - Pour tout élément α_n $(n \geqslant 3)$, nous avons mis en évidence l'existence de trois polynômes $A(z)$. D'après le théorème 2, nous pouvons former six suites admettant α_n pour point d'accumulation. Pour tout β_n , nous ne pouvons former que quatre suites ayant β_n pour limite.

THÉORÈME 6. - <u>Les quatre plus petits éléments de</u> S_q' <u>sont respectivement</u> $\alpha_{1,q}$, $\alpha_{2,q}$, $\alpha_{3,q}$, θ^* .

Pour ces éléments, il n'existe qu'un polynôme $A(z)$, alors que pour les éléments de S_1' nous avons montré l'existence d'au moins deux polynômes $A(z)$. Cette différence vient du fait que la condition $A(0) \geqslant q$ est naturelle pour S_1 , alors que c'est une restriction pour $q \geqslant 2$.

B. Recherche des plus petits éléments de S_q .

Nous avons déjà déterminé le plus petit élément de S_q' , à savoir $\alpha_{1,q}$ défini par la fraction rationnelle :

$$\frac{A_1}{Q_1} \equiv \frac{q + (q-1)z - (q-1)z^2 - (q-1)z^3}{q + (q-2)z - qz^2 - (q-1)z^3}$$

(et aussi $\dfrac{1 - z^2}{1 - z - z^2}$ pour $q = 1$). D'après le théorème 2, nous pouvons former les suites de S_q tendant vers $\alpha_{1,q}$ à droite et à gauche. Nous trouvons deux suites θ_n et $\hat{\theta}_n$, respectivement zéros des polynômes P_n et $\hat{P}_n$:

$$(1 - z^2)\ P_n \equiv A_1 - z^{2n}\ P_1\ ,\quad n \geqslant 1\ ;\qquad (1 - z)\ P_{2n+1} \equiv A_1 - z^{2n+1}\ P_1\ ,\quad n \geqslant 0\ ,$$

$$\hat{P}_{2n} \equiv A_1 + z^{2n}\ P_1\ ,\quad n \geqslant 1\ ;\qquad (1 + z)\ \hat{P}_{2n+1} \equiv A_1 + z^{2n+1}\ P_1\ ,\quad n \geqslant 0\ ;$$

nous formons en plus les suites θ'_n et $\hat{\theta}'_n$, respectivement zéros de :

$$P'_n(z) \equiv q(1 - z^2) + z^n(q + z - qz^2)\ ,\qquad n \geqslant 1\ ,$$

$$\hat{P}'_n(z) \equiv q(1 - z^2) - z^n(q + z - qz^2)\ ,\qquad n \geqslant 1\ .$$

Nous montrerons que la famille des éléments de S_q inférieurs à $\alpha_{1,q}$ contient, outre $\theta'_{n,1} \leqslant n \leqslant 4$ (tous les θ'_n pour $q = 1$), les nombres θ_n et un nombre particulier θ'' , zéro du polynôme :

$$P''(z) \equiv q - z - (q - 2)z^2 - z^3 + z^3[1 + (q - 2)z + 2z^2 - qz^3]\ .$$

De plus, les nombres de S_q , qui sont supérieurs à $\alpha_{1,q}$, mais suffisamment voisins de $\alpha_{1,q}$, appartiennent à la famille des $\hat{\theta}_n$ (et des $\hat{\theta}'_n$ pour $q = 1$).

Les différents nombres mis en évidence vérifient les inégalités :

$$(q \geqslant 2)\quad \theta_1 = \theta'_1 < \theta'_2 < \theta'_3 < \theta_2 < \theta_3 < \theta^* < \theta'_4 < \theta_4 < \ldots < \alpha_{1,q} < \ldots < \hat{\theta}_{n+1} < \hat{\theta}_n < \ldots\ .$$

La fraction rationnelle, définissant un élément $\theta < \hat{\theta}_1$, admet le développement :

$$\left(1\ ,\ \frac{1}{q}\ ,\ u_2\ ,\ \ldots\right)\qquad 1 \leqslant q^2\ u_2 \leqslant 2\ .$$

Les nombres correspondants à $q^2\ u_2 = 1$ étant entièrement déterminés, nous nous intéressons aux fractions rationnelles $\frac{A(z)}{Q(z)}$ telles que :

$$\frac{A}{Q} \equiv \left(1\ ,\ \frac{1}{q}\ ,\ \frac{2}{q^2}\ ,\ \ldots\ ,\ u_n\ ,\ \ldots\right)\ . \tag{17}$$

Nous appliquons aux développements (17) les propriétés suivantes des polynômes D_n et D^*_n associés :

1° Lorsque $u_0\ ,\ u_1\ ,\ \ldots\ ,\ u_{n-1}$ sont connus et que $s \geqslant n$ (dans le cas où $\frac{A}{Q}$ est de rang fini s), nous déterminons $D_n(z)$. Nous en déduisons la valeur de w_n . Nous devons avoir $u_n \geqslant w_n$, l'égalité entraînant $\theta = \tau_n$.

2° Nous formons ensuite le polynôme $D_{n+1}(z)$ par la relation de récurrence (4). Nous devons avoir $D_{n+1}(1) \geqslant 0$, condition équivalente à $u_n \leqslant w^*_n$, l'égalité entraînant :

$$\theta = \tau^*_n \qquad \text{et} \qquad D_{n+1}(z) \equiv (1 - z)\ D^*_n(z)\ .$$

Si les deux inégalités strictes, $u_n > w_n$ et $D_{n+1}(1) > 0$, sont satisfaites, nous avons $s \geqslant n + 1$ dans le cas où $\frac{A}{Q}$ est de rang fini s.

Nous associons aux développements (17), celui de $\frac{A_1(z)}{Q_1(z)}$:

$$\frac{A_1}{Q_1} \equiv \left(1 , \frac{1}{q} , \frac{2}{q^2} , \dots , v_n , \dots\right) . \tag{18}$$

Soit N un entier tel que $u_n = v_n$ pour $n < N$ et $u_N \neq v_N$. Nous remarquons que $N \geqslant 3$. D'autre part, si $\frac{A}{Q}$ est de rang fini s, nous avons $s \geqslant N$.

Nous devons distinguer deux cas, suivant que N est pair ou impair.

Avant d'entamer notre étude, signalons le résultat :

LEMME 7. - $k_N = q^2(u_N - v_N)$ est un entier rationnel. Il en est de même pour le nombre $k_{N+1} = q^2(u_{N+1} - v_{N+1}) - 4\frac{k_N}{q}$.

<u>Cas $N = 2p$</u>. - Nous obtenons :

$$q(1 + z)\, D_{2p}(z) \equiv P_{2p} + z\,\frac{p+2}{p+1}\,P_{2p-1} \qquad \text{et} \qquad w_{2p} = v_{2p} - \frac{1}{q^2}\,\frac{p+2}{p+1} .$$

Les propriétés de D_{2p} et D_{2p+1} entraînent :

$$-\frac{p+2}{p+1} \leqslant k_{2p} = q^2(u_{2p} - v_{2p}) \leqslant \frac{p}{p-1} .$$

En nous limitant aux nombres $\theta < \hat{\theta}_1$, nous obtenons $k_{2p} < 2$. k_{2p} étant entier rationnel d'après le lemme 7, nous avons deux possibilités :

$$\text{(a)} \quad k_{2p} = 1 \qquad \text{avec} \quad q\, D_{2p+1} \equiv \hat{P}_{2p-1} ;$$

Les propriétés de D_{2p+1} et D_{2p+2} entraînent l'entier rationnel

$$k_{2p+1} = q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1}) - \frac{4}{q} ,$$

$$-2 \leqslant k_{2p+1} \leqslant -2 + \frac{4p+6}{p^2 + p - 1} ,$$

$k_{2p+1} = -2$ donne $\theta = \hat{\theta}_{2p-1}$ et $k_{2p+1} \geqslant -1$, avec $p \leqslant 4$, $\theta > \hat{\theta}_7$, cas que nous pouvons éliminer en nous restreignant aux nombres $\theta < \hat{\theta}_7$.

$$\text{(b)} \quad k_{2p} = -1 \qquad \text{avec} \quad q\, D_{2p+1} \equiv P_{2p-1} .$$

L'entier $k_{2p+1} = q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1}) + \frac{4}{q}$ vérifie :

$$2 \leqslant k_{2p+1} \leqslant 2 + \frac{2(2p-1)}{p^2 + p - 1} \quad ,$$

$k_{2p+1} = 2$ donne $\theta = \theta_{2p-1}$ et $k_{2p+1} \geqslant 3$, avec $p = 2$, donne $\theta = \theta''$.

<u>Cas $N = 2p + 1$</u> . - Nous avons $q\, D_{2p+1}(z) \equiv P_{2p}(z)$ et $w_{2p+1} = v_{2p+1} - \frac{1}{q^2}$. L'entier $k_{2p+1} = q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1})$ vérifie :

$$-1 \leqslant k_{2p+1} \leqslant 1 + \frac{2(p+1)}{p^2 + p - 1} \quad ,$$

et comme nous nous limitons aux nombres $\theta < \hat{\theta}_7 < \hat{\theta}_4$, nous avons $k_{2p+1} < 2$.

(a) $k_{2p+1} = -1$ donne $\theta = \theta_{2p}$,

(b) $k_{2p+1} = 1$ avec $q(1 + z)\, D_{2p+2}(z) \equiv \hat{P}_{2p} + \frac{2z}{p+2} P_{2p}$,

et l'entier $k_{2p+2} = q^2(u_{2p+2} - v_{2p+2}) - \frac{4}{q}$ vérifie :

$$-2 - \frac{4}{q} \leqslant k_{2p+2} \leqslant -2 + \frac{4}{q} \quad .$$

Ces inégalités seront impossibles si nous nous limitons aux nombres $\theta < \hat{\theta}_{14}$.

L'ensemble de ces résultats est résumé dans le théorème suivant :

THÉORÈME 7. - <u>Les nombres</u> $\theta < \hat{\theta}_{14}$ <u>qui n'appartiennent pas aux familles des</u> θ'_n <u>et</u> $\hat{\theta}'_n$ <u>sont les nombres</u> θ_n , <u>les nombres</u> $\hat{\theta}_n$ $(n \geqslant 14)$, <u>et le nombre</u> θ'' .

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMARA (Mohamed). - Sur un ensemble remarquable de nombres algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 1052-1054.

[2] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur un ensemble fermé d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 70, 1953, p. 105-133.

[3] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur les dérivées successifs d'un ensemble fermé d'entiers algébriques, Bull. Sc. math., Paris, 2e série, t. 77, 1953, p. 129-136.

[4] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 72, 1955, p. 69-92.

[5] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur les éléments d'accumulation d'un ensemble fermé d'entiers algébriques, Bull. Sc. math., Paris, 2e série, t. 79, 1955, p. 54-64.

[6] GRANDET-HUGO (Marthe). - Ensembles fermés d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 92, 1965, p. 1-35.

[7] PISOT (Charles). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.

[8] SALEM (Raphaël). - A remarquable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.

[9] SIEGEL (Carl L.). - Algebraic integers whose conjugate Lie in the unit circle, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 597-602.