Jean Kuntzmann

Synthèse de fonctions booléennes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, nº 1 (1965-1966), exp. nº 5, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_1_A4_0>

13 décembre 1965

SYNTHÈSE DE FONCTIONS BOOLÉENNES

par Jean KUNTZMANN

I. Généralités

1. Opérateur booléen.

Nous désignerons sous ce nom un organe technologique dont les entrées reçoivent des quantités physiques représentant les valeurs booléennes 0 et 1 et dont la sortie fournit une quantité physique représentant la valeur d'une fonction booléenne des entrées.

2. Réseau booléen ordonné.

En connectant des sorties d'opérateurs booléens à des entrées d'autres opérateurs sans jamais former de circuit topologique, on obtient un réseau booléen ordonné. Les fonctions réalisées par les sorties successives se déterminent en calculant des fonctions de fonctions.

3. Fonction booléenne incomplète.

Les fonctions qu'il est nécessaire de réaliser dans la construction d'un automatisme ont en général la particularité de n'être pas définies pour certains jeux de valeurs des variables.

Soit, par exemple, à réaliser un additionneur décimal portant sur un seul chiffre. On représentera les 10 valeurs possibles du chiffre décimal au moyen de 4 quantités booléennes par exemple :

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
⋮	⋮
9	1001

Le chiffre des dizaines de la somme (qui ne peut prendre que les valeurs 0 et 1) est donc une fonction booléenne de 8 variables (4 pour chaque terme de la somme). Mais les variables ne prennent que

$$10 \times 10 = 100 \text{ valeurs}$$

sur les $16 \times 16 = 256$ valeurs possibles. Par exemple, le jeu 11111111 ne correspond à rien.

4. Position du problème de synthèse.

Le problème de synthèse des fonctions booléennes consiste, une fonction booléenne incomplète Φ étant donnée ainsi que des opérateurs, à construire un réseau à une seule sortie fournissant une fonction F telle que

$$F(X) = \Phi(X) \qquad \text{pour tout } X \text{ pour lequel } \Phi(X) \text{ est défini .}$$

On dira encore que $F(X)$ est compatible avec $\Phi(X)$.

5. Possibilité du problème.

Une première question est de savoir si un tel problème est possible. Ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, il est impossible d'obtenir x' à partir des variables x , y , ... et des opérateurs $u + v$ et uv .

Ce problème peut être considéré comme résolu par la théorie des familles de fonctions booléennes [c'est-à-dire des fonctions qui peuvent être obtenues, à partir d'opérateurs donnés, par les opérations de composition et de réduction (deux variables distinctes sont remplacées par une seule)]. Avec tous les opérateurs usuels, le problème est d'ailleurs très simple.

6. Synthèse systématique.

Il peut être intéressant de réaliser la synthèse d'une fonction quelconque à partir d'opérateurs donnés par un procédé ayant un caractère systématique. On peut, par exemple, procéder de la manière suivante :

(a) On définit une fonction $F(X)$, compatible avec $\Phi(X)$, en posant

$$F(X) = \Phi(X) \qquad \text{si } \Phi(X) \text{ est défini,}$$
$$F(X) = 1 \qquad \text{dans le cas contraire.}$$

(b) On sait faire la synthèse d'une fonction $F(X)$ quelconque au moyen de l'opérateur

$$U = xy + x'z \quad .$$

Cette synthèse est basée sur la formule de Lagrange

$$F(x , Y) = xF(1 , Y) + x'F(0 , Y) \quad ,$$

qui ramène l'écriture d'une fonction de n variables booléennes à celle de fonctions de $n - 1$ variables.

(c) Le problème consiste maintenant à faire la synthèse de

$$U = xy + x'z$$

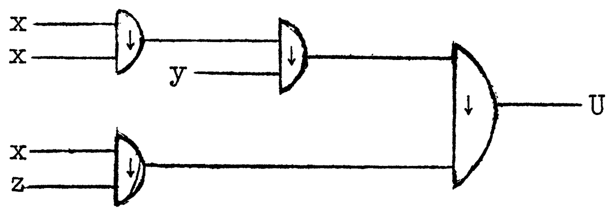
à partir des opérateurs donnés. Supposons par exemple que nous disposions de l'opérateur "Ni".

$$x \downarrow y = x'y' \quad .$$

On écrira

$$U = ((x \downarrow x) \downarrow y) \downarrow (x \downarrow z) \quad ,$$

c'est-à-dire, sous forme de schéma,



Cette synthèse systématique peut être intéressante dans certains cas où les considérations primordiales sont celles de régularité de la structure et de l'ordre d'utilisation des variables.

7. Restriction aux réseaux arborescents.

Dans l'étude qui va suivre, on peut considérer deux cas : Le premier est relatif à un réseau arborescent ; ceci revient à dire qu'une sortie d'organe n'est connectée qu'à une seule entrée. Le deuxième cas est le cas général d'un réseau sans circuit topologique.

8. Notion de coût.

Le plus souvent, la considération qui permettra de choisir entre plusieurs réseaux est celle de leur coût. Cette notion, qui dépend de la technologie utilisée, pourra être schématisée par une notion mathématique.

Nous dirons qu'une synthèse est optimale si elle réalise une fonction $F(X)$ compatible avec $\Phi(X)$ à partir d'opérateurs donnés et avec le plus petit coût possible.

Nous verrons qu'il existe des méthodes de synthèse optimale. Elles sont en général lourdes et coûteuses à utiliser.

Ceci amène à considérer des synthèses heuristiques qui donnent, avec un travail raisonnable, des réseaux de coût raisonnable.

9. Définition précise de la fonction coût pour un réseau arborescent.

(a) Le coût $c(R)$ d'un réseau arborescent est une fonction dont la variable est le réseau lui-même, et dont la valeur est prise dans un ensemble discret de valeurs numériques positives.

(b) Soient S_1 une sortie d'organe d'un réseau R, et R_1 la partie du réseau située en amont de S_1 :

$$c(R) > c(R_1) \quad .$$

(c) Toute variable a un coût nul.

(d) Si dans un réseau R, comportant une partie amont R_1, on remplace R_1 par R_1^* avec

$$c(R_1^*) \leqslant c(R_1) \quad ,$$

on obtient un nouveau réseau R^* et

$$c(R^*) \leqslant c(R) \quad .$$

II. Théorie des réseaux d'opérateurs croissants

Nous considérons maintenant des opérateurs croissants, c'est-à-dire tels que

$$X_1 \geqslant X_2 \implies O(X_1) \geqslant O(X_2)$$

(la relation d'ordre sur X est le produit des relations d'ordre $0 < 1$ sur chacune des variables booléennes simples).

10. Réseaux arborescents équivalents.

Deux réseaux R et R^*, produisant à leur sortie des fonctions $f(X)$ et $f^*(X)$, sont dits équivalents par rapport à une fonction $\varphi(X)$ si :

(a) $c(R) = c(R^*)$, et

(b) $\{f(X) = \varphi(X)\} \iff \{f^*(X) = \varphi(X)\}$.

La notion d'équivalence définit une partition de l'ensemble des réseaux arborescents.

11. Amélioration d'un réseau.

Avec les mêmes notations, on dira que R^* est une amélioration de R si

$$c(R^*) \leqslant c(R) \qquad \text{et} \qquad \{f(X) = \varphi(X)\} \implies \{f^*(X) = \varphi(X)\} \quad .$$

L'amélioration sera dite stricte si les deux réseaux ne sont pas équivalents.

12. Théorème d'amélioration.

Dans un réseau arborescent R , le remplacement d'une partie amont R_1 par une amélioration R_1^* donne R^* , amélioration de R . Il faut montrer :

- une propriété évidente des coûts ;
- que, si

$$\{f_1(X) = \varphi(X)\} \implies \{f_1^*(X) = \varphi(X)\} \quad ,$$

alors

$$\{f(X) = \varphi(X)\} \implies \{f^*(X) = \varphi(X)\} \quad .$$

La démonstration est facile. Puisque tous les opérateurs sont croissants,

$$f(X) = A(X)\ f_1(X) + B(X)$$

et

$$f^*(X) = A(X)\ f_1^*(X) + B(X) \quad .$$

Si X est tel que $B(X) = 1$, $f(X) = f^*(X) = 1$, et la propriété est vraie.

Si X est tel que $B(X) = 0$ et $A(X) = 0$, $f(X) = f^*(X) = 0$, et la propriété est vraie.

Enfin si X est tel que $B(X) = 0$ et $A(X) = 1$,

$$f(X) = f_1(X) \qquad \text{et} \qquad f^*(X) = f_1^*(X) \quad ,$$

et la propriété est vraie.

On voit immédiatement que, si R_1^* est équivalent à R , R^* est équivalent à R .

Par contre, R_1^* peut être une amélioration stricte de R , alors que R^* est équivalent à R .

13. Réseau non améliorable.

On dira qu'un réseau R est non améliorable si ni lui-même, ni aucune de ses parties amont ne possède d'amélioration stricte.

On a les propriétés suivantes :

- Toute partie amont d'un réseau non améliorable est non améliorable.
- Tout réseau possède une amélioration non améliorable. En effet, raisonnons par récurrence sur le coût du réseau. La propriété est évidente pour le coût 0 . Si

elle est vraie pour tous les coûts inférieurs à c, on considèrera les parties amont maximales. Elles peuvent être supposées non améliorables. On ne peut réaliser à partir d'elles qu'un nombre fini de sorties dont certaines sont non améliorables.

14. Réseaux non améliorables équivalents.

On peut remarquer que si, dans un réseau, on remplace une partie amont par un réseau équivalent, on obtient un réseau équivalent.

Nous nous proposons de déterminer une famille de réseaux non améliorables telle que tout réseau non améliorable soit équivalent à un réseau de la famille. D'après ce qui précède, on peut utiliser l'algorithme suivant :

- Ayant déterminé les réseaux de la famille de coût inférieur à c, on détermine ceux de coût c en prenant comme variables de sortie les sorties de certains des réseaux de coût inférieur à c. On forme tous ces réseaux, et on les range dans un certain ordre (pour le coût 0, on écrit tout simplement les variables).
- On forme pour chaque réseau obtenu l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de la variable pour lesquelles $f(X) = \varphi(X)$. On supprime tous les réseaux de coût c pour lesquels $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^*$ ($\mathcal{E}^*$ ensemble analogue pour un réseau antérieur de coût c ou inférieur).

15. Recherche d'une synthèse optimale arborescente.

Considérons (s'il en existe un) un réseau fournissant une synthèse arborescente optimale de la fonction $\varphi(X)$.

Sa sortie vérifie donc $f(X) = \varphi(X)$ dès que $\varphi(X)$ est défini, et son coût est minimal. Il est donc équivalent à un réseau non améliorable fourni par l'algorithme précédent.

III. Réseaux d'opérateurs monotones

La théorie précédente se généralise aisément aux opérateurs monotones, c'est-à-dire croissants ou décroissants par rapport aux diverses variables.

Cette extension est intéressante car la classe des opérateurs monotones contient pratiquement tous les opérateurs intéressants. Exemples :

$$x + y\ ,\quad xy\ ,\quad x'\ ,\quad x'y'\ ,\quad x' + y\ ,\quad \text{etc.}$$

Sans faire la théorie complète, nous allons indiquer comment on opère.

16. Réseaux arborescents directement et inversement équivalents.

La notion définie au n° 10 s'appellera maintenant équivalence directe.

Pour obtenir l'équivalence inverse, on remplace la dernière condition par

$$\{f'(X) = \varphi(X)\} \iff \{f'^*(X) = \varphi(X)\} \quad .$$

On définit ensuite une amélioration directe et une amélioration inverse.

17. Théorème d'amélioration.

Il prend la forme suivante :

Une amélioration directe ou inverse de R_1 donne une amélioration de même nature de R si l'on rencontre entre la sortie de R_1 et celle de R un nombre pair d'entrées accentuées, une amélioration de nature opposée si l'on rencontre un nombre impair d'entrées accentuées.

18. Réseau directement ou inversement non améliorable et algorithme correspondant.

On développera facilement la notion de réseau directement ou inversement non améliorable. L'algorithme détermine deux familles de réseaux ; ceux de la première sont directement non améliorables, ceux de la seconde sont inversement non améliorables, et tout réseau non améliorable est équivalent à un réseau de la famille de même nature que lui.

Lorsque l'on cherche pour le coût c un réseau non améliorable d'une famille, on prend comme variables de l'opérateur de sortie :
- des sorties de réseau de la même famille, si la variable d'entrée est non accentuée ;
- des sorties de l'autre famille, si la variable d'entrée est accentuée.

Le processus fournira donc (si elles existent) :
- une fonction $f_1(X)$ compatible avec $\varphi(X)$;
- une fonction $f_2(X)$ telle que $f_2'(X)$ soit compatible avec $\varphi(X)$.

IV. Questions restant à résoudre.

Nous avons étudié jusqu'à maintenant les réseaux arborescents. Il est possible de faire une étude théoriquement un peu plus compliquée (et pratiquement beaucoup plus) pour les réseaux d'opérateurs croissants à une sortie.

La théorie ne s'étend aux réseaux d'opérateurs monotones que s'ils satisfont à une condition de parité. Le nombre de variables accentuées rencontrées, entre une sortie d'organe et la sortie du réseau, doit avoir une parité indépendante du chemin suivi. Cette restriction enlève beaucoup de son intérêt pratique à ce résultat.

Obtention de conditions plus générales sur la fonction coût. - Une étude en cours consiste à étendre ces résultats à la synthèse simultanée de plusieurs fonctions. Ceci conduit à étudier des réseaux ordonnés à plusieurs sorties, et plus particulièrement des multi-arborescences, c'est-à-dire des réseaux à plusieurs sorties, dont la partie amont de toute sortie est une arborescence.

V. Exemples

Tous les exemples sont relatifs à l'opérateur majorité $M = xy + yz + zx$. Les programmes sont inscrits en ALGOL, compilés et exécutés sur IBM 7044.

1er exemple : 6 variables.

$$xy + xzu + xzt + xzv + xtu + xtv + xuv + yztu + yztv + yzuv + ytuv \quad .$$

Il s'agit d'une fonction complète impaire croissante, donc synthétisable au moyen de M .

	optimale	heuristiques			
		1	2	3	4
opérateur	5				9
temps de calcul	61 s				4 s

2e exemple : 8 variables.

$$cdefg + bdeg + bceg + acfg + abch + bceh + cefh + abdh + acdfh + defh \;.$$

	optimale	heuristiques			
		1	2	3	4
opérateur	4	7	6	4	15
temps de calcul	52 s	28 s	12 s	6 s	8 s

3e exemple : 10 variables.

	optimale	heuristiques			
		1	2	3	4
opérateur	3	5	4	4	26
temps de calcul	13 s	14 s	7 s	3 s	13 s

4e exemple : 12 variables.

	optimale	heuristiques			
		1	2	3	4
opérateur		12	14	12	56
temps de calcul		240 s	74 s	33 s	34 s

5e exemple : 15 variables.

	optimale	heuristiques			
		1	2	3	4
opérateur		19	21		230
temps de calcul		660 s	450 s		210 s

19. Une méthode heuristique pour la synthèse par des opérateurs croissants.

Cette méthode est basée sur un affaiblissement du théorème d'amélioration.

On suppose construites certaines fonctions f_1 , f_2 , ... , f_p (au début, ce seront tout simplement les variables indépendantes).

Appliquons certaines de ces fonctions comme variables à l'entrée d'un opérateur croissant. On obtient une fonction f_{p+1} . On forme l'ensemble $\mathcal{E}_{p+1}$ des valeurs de X pour lesquelles $f_{p+1} = \varphi$.

Si $\exists\, i$ $[\mathcal{E}_{p+1} \subseteq \mathcal{E}_i]$, $i \leqslant p$, on supprime f_{p+1} , et on fait un nouvel essai.

Si $\exists\, i$ $[\mathcal{E}_{p+1} \supset \mathcal{E}_i]$, on supprime f_i , et on adjoint f_{p+1} à la liste.

Dans tous les autres cas, on adjoint f_{p+1} à la liste. En fait on n'adjoint pas toutes ces fonctions, mais on fait une série d'essais (par exemple, appliquer un opérateur déterminé, avec comme entrées toutes les fonctions existantes) et on garde seulement la fonction (ou la première des fonctions) qui augmente le plus l'un des ensembles $\mathcal{E}_i$.

De telles méthodes ont la particularité que leurs mérites relatifs ne peuvent être connus que par des essais pratiques.