Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Claude Benzaken

Treillis des familles de fonctions booléennes croissantes applications au coloriage d'un graphe

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, n° 1 (1965-1966), exp. n° 2, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_1_A2_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
19e année, 1965/66, n° 2

22 novembre 1965

TREILLIS DES FAMILLES DE FONCTIONS BOOLÉENNES CROISSANTES
APPLICATIONS AU COLORIAGE D'UN GRAPHE

par Claude BENZAKEN

1. Familles de fonctions booléennes

La notion de famille de fonctions booléennes, introduite dans [4], est destinée à répondre à la question de l'existence d'une solution au problème suivant :

Etant donnés une fonction booléenne finie f (c'est-à-dire une application $f : 2^n \to 2$ ([1])) et un ensemble fini d'opérateurs standards, réalisant chacun (par voie technologique) une application $f_i : 2^{n_i} \to 2$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$: peut-on, par utilisation combinatoire de ces opérateurs, réaliser la fonction f. La réponse à cette question est entièrement résolue par la théorie des familles.

1.1. Définition des familles de fonctions booléennes.

1.1.1. Les opérations élémentaires de réduction et composition. - Dans l'ensemble Ω de toutes les applications de $2^n \to 2$, $n \in N$, on considère les deux opérations élémentaires suivantes :

Réduction d'une fonction. - On considère une partition π de l'ensemble des n variables de f : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en p classes : $T_1, T_2, \ldots, T_p$ $(p \leqslant n)$, et on rend les variables de chaque classe T_i égales entre elles et à la variable indépendante t_i. On obtient ainsi une application de $2^p \to 2$, notée f_π ; f_π sera appelée une réduite de f selon la partition π.

Composition des fonctions. - Soient f et g deux fonctions booléennes. Si l'on considère une variable particulière x de f dans une expression $f(a, b, \ldots, u, x, t, \ldots, z)$, et que l'on remplace x par le résultat $g(y_1, y_2, \ldots, y_q)$, on obtient une fonction

$$\varphi(a,b,\ldots,u,t,\ldots,z,y_1,y_2,\ldots,y_q) = f(a,b,\ldots,u,g(y_1,\ldots,y_q),\ldots,z) ,$$

que l'on notera symboliquement

$$f \overset{x}{\circ} g .$$

([1]) 2 est pris pour la chaîne élémentaire $\{0, 1\}$, $0 < 1$; 2^n est la puissance cardinale n-ième de 2.

1.1.2. Remarques sur les opérations élémentaires. - Nous noterons que les fonctions booléennes sont considérées en tant qu'applications, et donc que le nom donné aux variables n'a pas d'importance.

Soit f_π une réduite de f selon une partition π de l'ensemble X des variables de f. On désigne par T le quotient X/π ; pour toute valeur $T \in 2^p$, on désigne par $T \times \pi$ la valeur correspondante de $X \in 2^n$ (quand T parcourt l'ensemble 2^p, $T \times \pi$ parcourt une sous-algèbre de Boole de 2^n). Nous avons donc

$$f_\pi(T) = f(\pi \times T) \quad .$$

Notons qu'en composant des réductions, on obtient encore des réductions. Toute réduite d'une fonction donnée peut être obtenue par une suite de réductions élémentaires, chacune d'elles consistant à confondre seulement deux variables.

Si l'on considère la composée

$$\varphi(Z) = f(g(Z)\ ,\ Z) \qquad \text{où} \quad Z \in 2^n \ ,$$

et si l'on réduit φ, selon une partition π de Z, on a, en désignant par $\pi \cup x$ la partition des variables x, Z qui prolonge celle de Z en ajoutant la classe réduite au seul élément x :

$$\varphi_\pi(T) = f(g_\pi(T)\ ,\ \pi \times T) = (f \overset{x}{\circ} g)_\pi\ (T)$$

1.1.3. Famille de fonctions booléennes.

DÉFINITION. - On désigne, sous le nom de famille, toute partie $\mathfrak{F} \subseteq \Omega$ fermée (ou stable) par rapport aux opérations élémentaires.

En d'autres termes : $f \in \mathfrak{F} \implies f_\pi \in \mathfrak{F} \quad (\forall\, \pi)$,

$$f\ ,\ g \in \mathfrak{F} \implies f \overset{x}{\circ} g \in \mathfrak{F} \quad (\forall\, x)\ .$$

PROPOSITION. - L'intersection au sens des ensembles de familles est une famille. Ω est une famille.

Cette propriété suffit à démontrer que l'ensemble des familles est un treillis par inclusion (on rajoute la famille vide).

La notion de famille engendrée par une partie $S \subseteq \Omega$ s'en déduit automatiquement.

La borne supérieure de deux familles $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ est la famille engendrée par $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$.

1.2. Propriétés générales du treillis des familles.

1.2.1. DÉFINITION. - On dit que $\mathfrak{F}$ est une famille maximale dans la famille $\mathfrak{G}$ (ou $\mathfrak{F}$ est une famille maximale de $\mathfrak{G}$) si elle est couverte par $\mathfrak{G}$ (couverture au sens du treillis).

PROPOSITION. - Pour que les familles $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, ..., $\mathfrak{F}_p$, telles qu'aucune d'elles n'est contenue dans une autre, soient des familles maximales de $\mathfrak{F}$, et les seules, il faut et il suffit que toute partie $S \subseteq \Omega$, constituée de p fonctions f_i satisfaisant $f_i \in \mathfrak{F}$, $f_i \notin \mathfrak{F}_i$, engendre la famille $\mathfrak{F}$.

Condition nécessaire. - Si $\mathfrak{F}_0$ est engendrée par S, on ne peut avoir $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$ (signe d'inclusion stricte), sans quoi $\exists\, i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}_i$ (absurde).

Condition suffisante. - Chaque $\mathfrak{F}_i$ est maximale, sinon $\exists\, \mathfrak{F}_0 < \mathfrak{F}$ telle que $\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{F}_0$. Alors $\mathfrak{F}_0 \not\subseteq \mathfrak{F}_j$, $\forall\, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. On pourrait alors trouver une partie $S \subseteq \mathfrak{F}_0$ satisfaisant aux conditions de la proposition, et la famille $\overline{S}$ engendrée par S est telle que $\overline{S} \neq \mathfrak{F}$.

Un procédé analogue prouverait que ce sont les seules familles maximales.

Cette proposition est la base pratique de la détermination complète et exhaustive du treillis des familles.

Nous pouvons ajouter qu'il existe une propriété de symétrie dans ce treillis, mise en lumière par les résultats suivants.

1.2.2. Duale d'une fonction booléenne. Dualité dans les familles, duale d'une fonction. - La duale d'une fonction f est la fonction f^* définie par

$$f^*(X) = (f(X'))'$$

($'$ étant le signe de complémentation échangeant 0 et 1, X' étant le complément de $X \in 2^n$).

La duale d'une fonction s'obtient lorsque cette fonction est donnée sous forme polynomiale en échangeant les opérations $\vee$ et $\wedge$.

LEMME. - f et g étant deux fonctions quelconques, nous avons :

(a) $(f_\pi)^* = (f^*)_\pi$ pour toute réduction π,

(b) $(f \overset{X}{\circ} g)^* = f^* \overset{X}{\circ} g^*$.

- Soit T le quotient X/π. Nous avons

$$(f_\pi)^* (T) = (f_\pi(T'))' = (f(\pi \times T'))' = f^*(\pi \times T) = (f^*)_\pi (T) \quad .$$

- Soit $\varphi(Z) = f(g(Z) , Z) = (f \overset{X}{\circ} g)(Z)$. Alors

$$f^* \overset{X}{\circ} g^*(Z) = [f((g^*(Z))' , Z')]' \quad ,$$

mais $g^*(Z) = (g(Z'))'$, donc $(g^*(Z))' = g(Z')$, d'où

$$f^* \overset{X}{\circ} g^*(Z) = [f(g(Z') , Z')]' = (\varphi(Z'))' = \varphi^*(Z) \quad .$$

Nous pouvons alors déduire :

PROPOSITION. - <u>Si</u> $\mathfrak{F}$ <u>est une famille, l'ensemble</u> $\mathfrak{F}^*$ <u>constitué de toutes les duales de</u> $f \in \mathfrak{F}$ <u>est une famille</u>.

<u>Si</u> $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, <u>alors</u> $\mathfrak{F}^* \subset \mathfrak{G}^*$, <u>et si</u> $\mathfrak{F} < \mathfrak{G}$, <u>alors</u> $\mathfrak{F}^* < \mathfrak{G}^*$.

Cette proposition apportera des simplifications dans la recherche du treillis des familles. Ce treillis a été complètement exhibé [4]. Il contient (comme particularité essentielle) huit chaînes infinies dénombrables.

Nous allons étudier rapidement le sous-treillis $[\phi , \mathfrak{M}]$ qui est le plus petit pour lequel existe cette particularité.

2. Familles de fonctions croissantes strictes

2.1. Les fonctions croissantes strictes.

DÉFINITION. - Une fonction booléenne croissante stricte est une application de $2^n \to 2$ telle que :

(a) $X_1 \geqslant X_2 \implies f(X_1) \geqslant f(X_2)$,

(b) $\exists\, X , Y$ tels que $X > Y$, $f(X) = 1 > f(Y) = 0$.

Le point (b) peut être remplacé par :

(b') $f(\bar{0}) = 0$, $f(\bar{1}) = 1$, en désignant par $\bar{0}$ et $\bar{1}$ les bornes de 2^n .

Si l'on désigne par $X = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$, nous pouvons toujours écrire :

$$f(X) = \mu_1 \vee \mu_2 \vee \ldots \vee \mu_q \quad ,$$

avec $\mu_i = x_{j_1} \wedge x_{j_2} \wedge \ldots \wedge x_{j_{s(i)}}$, l'expression de f étant irrédondante.

Nous remplacerons les notations $\vee$ et $\wedge$ respectivememt par $+$ et $\cdot$ pour des questions évidentes de priorité des opérations.

Chaque terme μ_i s'écrit alors $x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_{s(i)}}$. On l'appellera un monôme de f (irréductible). Le nombre de lettres du monôme sera appelé degré du monôme.

La duale de f s'obtiendra en échangeant les opérations $+$ et $.$, et en développant, puis éliminant les termes réductibles.

Exemple :

$$f(a, b, c) = a.b + a.c ,$$

$$f^*(a, b, c) = (a + b)(a + c) = a + \overbrace{ac + ab} + bc = a + bc .$$

DÉFINITION. - Une fonction f est dite respectivement, impaire, surimpaire, sousimpaire, si :

$$f(X) = f^*(X) \quad (\text{resp. } f(X) \geqslant f^*(X) , \text{ resp. } f(X) \leqslant f^*(X)) \quad \forall X \in 2^n .$$

THÉORÈME. - En désignant par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des fonctions croissantes strictes, $\mathfrak{M}$ est une famille auto-duale ($\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^*$).

La démonstration est évidente.

2.2. Réduction des fonctions croissantes. Indice d'une fonction croissante.

2.2.1. Quelques fonctions croissantes particulières. Règles de calcul. - On définit les fonctions suivantes :

- fonction e (identité) : $e(x) = x$,
- fonctions s et p : $s(x, y) = x + y$, $p = s^*$: $p(x, y) = x.y$,
- fonctions σ et π : $\sigma(x, y, z) = x + yz$, $\pi = \sigma^*$: $\pi(x, y, z) = xy + xz$.

Notons que s et σ sont surimpaires, e est impaire, p et π sont sousimpaires.

- fonction $s_{q,n}$: c'est la fonction des n variables, complètement symétrique et homogène de degré q ($\leqslant n$).

$$s_{q,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1, i_2, i_q \in C_n^q} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_q} .$$

Elle comporte C_n^q monômes. Nous avons

$$s^*_{q,n} = s_{n+1-q,n} .$$

Comme cas particuliers :

$$s_{2,n} = \sum x_i x_j , \quad s_{2,2} = p , \quad s_{2,3} = s^*_{2,3} , \quad s^*_{2,n} = s_{n-1,n} .$$

Donc $s_{2,n}$ est sousimpaire pour $n = 2$, impaire pour $n = 3$, surimpaire non impaire pour $n \geqslant 4$.

2.2.2. Indice d'une fonction croissante.

PROPOSITION. - Si une fonction croissante f est telle que son expression polynomiale $f(X)$ ne comporte aucun monôme du 1er degré, alors f est réductible à une fonction du type $s_{2,r}$.

Soit $f = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_q$ l'expression polynomiale irrédondante de f .

S'il y a un monôme (mettons μ_1) de degré supérieur à 2 , on partage les lettres de ce monôme en deux paquets non vides disjoints S_1 , S_2 , et on réduit les lettres S_1 en la lettre t_1 et les lettres S_2 en la lettre t_2 . f se réduit alors à une fonction n'ayant aucun monôme du 1er degré (sinon c'est que μ_1 est un monôme rédondant).

En continuant ainsi, on parvient à une fonction homogène du 2nd degré de ℓ variables.

S'il y a C_ℓ^2 monômes irrédondants, cette réduite est $s_{2,\ell}$; sinon, il manque par exemple le monôme $t_1 t_2$.

La réduction $t_1 = t_2$ réduit d'une unité le nombre de variables, et n'amène pas de monômes du 1er degré. Comme $C_2^2 = 1$ et que les réduites conservent au moins un monôme, on arrivera bien, pour conclure, à réduire f à une fonction $s_{2,n}$.

Le résultat dépend manifestement de la manière d'opérer. Cela nous conduit à la définition suivante.

DÉFINITION. - On appelle nombres caractéristiques d'une fonction croissante f , n'ayant pas de monôme du 1er degré, les entiers p_1 , p_2 , ... , p_s tels que f est réductible à s_{2,p_i} .

On appelle indice de f l'entier $p = \inf(p_i)$.

Par convention, une fonction ayant un monôme du 1er degré sera d'indice $+\infty$.

Nous noterons $\nu(f)$ l'indice de f .

Exemple : $f(a , b , c , d) = abc + abd + cd$.

Les nombres caractéristiques de f sont 2 ou 3 , mais

$f(a, a, c, d) = ac + ad + cd = s_{2,3}(a, c, d)$ et $f(a, b, a, b) = ab = s_{2,2}(a, b)$.

Les nombres caractéristiques sont 2 et 3 . L'indice de f est 2 .

2.3. Le sous-treillis $[\phi , \mathfrak{M}]$ des familles croissantes.

Nous pouvons énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME. - Le sous-treillis $[\phi , \mathcal{M}]$ du treillis des familles est représenté par le diagramme symétrique de la figure (1), dans lequel deux familles symétriques sont duales l'une de l'autre, la définition des familles pouvant être donnée (à la dualité près) comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{M}S = \{f \; ; \; f \in \mathcal{M} , \; f \geqslant f^* \; \text{(surimpaire)}\} \\ \mathcal{M}I = \{f \; ; \; f \in \mathcal{M} , \; f = f^* \; \text{(impaire)}\} \\ \mathcal{M}S_i = \{f \; ; \; f \in \mathcal{M} , \; \nu(f) \geqslant i\} \quad i = 2 , 3 , \ldots \\ \mathcal{M}\Sigma = \mathcal{M}S_\infty = \{f \; ; \; f \in \mathcal{M} , \; f \text{ ayant un monôme du 1er degré}\} \\ \Sigma = \{s_{1,n} \; ; \; n \in N\} \\ \{e\} = \{e = s_{1,1}\} \end{cases}$$

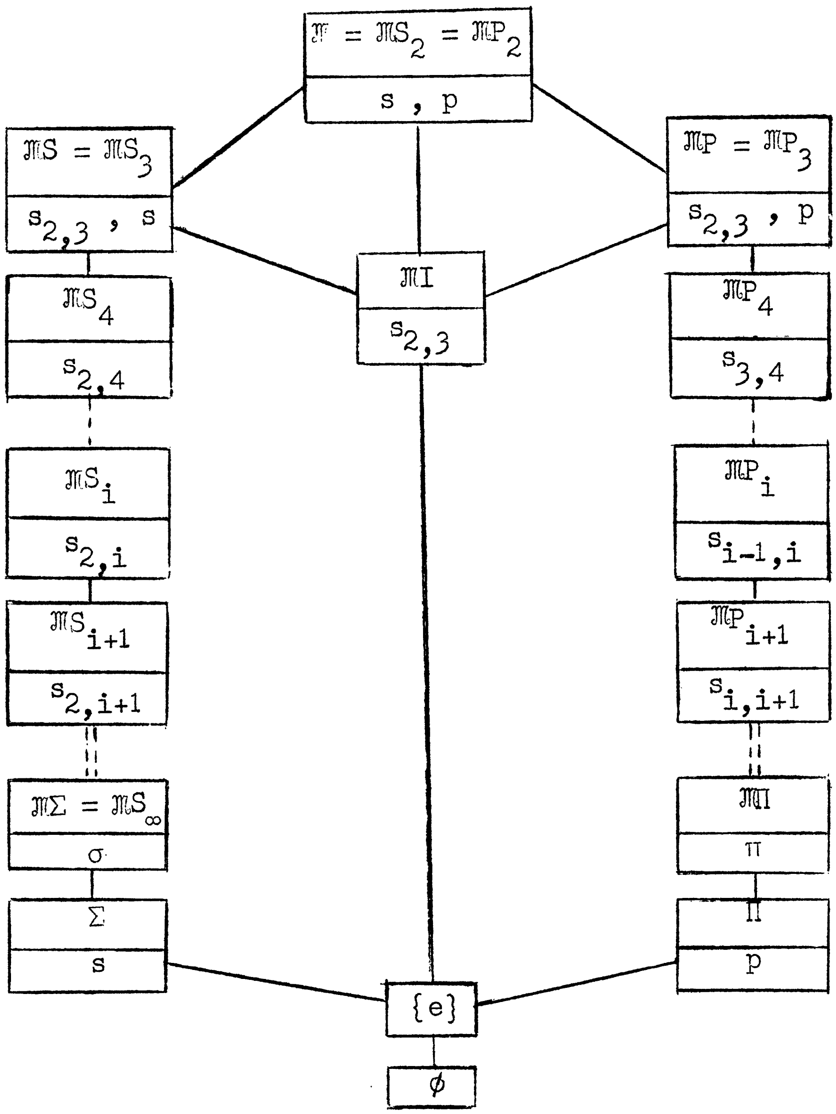


figure (1)

Nous renvoyons le lecteur, pour la démonstration, à [1] , [4].

Nous avons indiqué, en bas de chaque rectangle entourant une famille, un ensemble générateur de cette famille (minimum).

D'après le résultat de ce théorème, on peut constater que $s_{2,i} \in \mathfrak{M}S_i$, $\notin \mathfrak{M}S_{i+1}$.

En conséquence, $s_{2,i+1}$ ne peut engendrer $s_{2,i}$.

3. Applications à la théorie des graphes.

3.1. Critères d'appartenance d'une fonction croissante aux familles de $[\phi , \mathfrak{M}]$.

Nous supposons donnée f par une expression polynomiale irrédondante :

$$f(a_1 , a_2 , \dots , a_n) = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_q \quad .$$

Nous désignerons par A l'ensemble des variables de f ,

$$A = \{a_1 , a_2 , \dots , a_n\} \quad .$$

L'appartenance de f aux familles $\mathfrak{M}\Sigma$, Σ ou Π , est immédiate d'après l'expression de f . Par ailleurs, en calculant f^* , on aura facilement un critère d'appartenance de f à $\mathfrak{M}\Pi$ ($f^* \in \mathfrak{M}\Sigma$) ou encore à $\mathfrak{M}S$, $\mathfrak{M}P$, $\mathfrak{M}I$ (respectivement $f \geqslant f^*$, $f \leqslant f^*$, $f = f^*$).

Reste le problème de l'appartenance de f à $\mathfrak{M}S_i$ (ou $\mathfrak{M}P_i$). Cela revient à déterminer l'indice de f (ou f^*).

3.1.1. Points caractéristiques de f .

DÉFINITION. - On appelle point caractéristique de première espèce (resp. deuxième espèce) de f , tout point $X \in 2^n$ tel que :

$$\begin{cases} f(X) = 1 \quad (\text{resp. } f(X) = 0), \\ \forall\ Y < X \quad (\text{resp. } Y > X), \quad f(Y) = 0 \quad (\text{resp. } f(Y) = 1). \end{cases}$$

Nous savons, par ailleurs, que l'algèbre de Boole 2^n est isomorphe à l'ensemble $\wp(A)$ (ensemble des parties de A), l'isomorphisme pouvant être défini comme suit : à $X \in 2^n$, on fait correspondre $S_X \in \wp(A)$ comme l'ensemble des variables ayant la valeur 1 dans X .

Réciproquement, à $S \in \wp(A)$ on fait correspondre $X_S \in 2^n$, vecteur dont les composantes sont 1 pour les seules variables S .

Les points caractéristiques de première espèce de f sont associés biunivoquement aux monômes irrédondants de f .

Si μ est un monôme de f , alors $f(X_\mu) = 1$ et $Y < X_\mu \Longrightarrow S_Y \subset \mu$ (μ est assimilé à une partie de A), et $f(Y) = 0$ sinon S_Y est un monôme de f et μ serait rédondant.

Réciproquement, si X est de première espèce, S_X est un monôme irrédondant de f .

Les points caractéristiques de deuxième espèce de f sont les compléments respectifs des points de première espèce de f^* .

En effet, X de deuxième espèce de f entraîne $f(X)=0$ et $Y>X \Longrightarrow f(Y)=1$. Cela donne $f^*(X') = 1$ et $Z < X' \Longrightarrow f^*(Z) = 0$.

3.1.2. Classes de réduction permise. Classes saturées. - Si $S \in \mathcal{P}(A)$, on désigne par π_S la partition de A constituée de la classe S et des autres classes réduites à un seul élément.

DÉFINITION. - Si $f \notin \mathcal{M}\Sigma$, on désigne sous le nom de :
- classe permise de f , toute partie $S \in \mathcal{P}(A)$ telle que $f_{\pi_S} \notin \mathcal{M}\Sigma$,
- classe saturée de f , toute classe permise de f maximale par inclusion.

Nous avons évidemment le résultat :

S est une classe permise de f si $f(X_S) = 0$. Réciproquement, si $f(X) = 0$, alors S_X est classe permise de f . Plus précisément :

PROPOSITION. - Les images S_X , où X parcourt les points de deuxième espèce de f , représentent toutes les classes saturées de f .

En effet, si S est saturée,

$$f(X_S) = 0 \quad \text{et} \quad Y > X_S \Longrightarrow f(Y) = 1 \quad .$$

Réciproquement, si X est de deuxième espèce de f , alors :

$$f(X) = 0 \quad \text{et} \quad Y > X \Longrightarrow f(Y) = 1 \quad ,$$

mais alors S_X est classe permise. En outre, S_X est saturée, car

$$T \supset S_X \Longrightarrow X_T > X \quad \text{et} \quad f(X_T) = 1 \quad ,$$

d'où T non permise.

3.1.3. Critère fondamental de détermination de l'indice de f .

CRITÈRE fondamental. - Soit f une fonction croissante, n'appartenant pas à $\mathcal{M}\Sigma$, de variables A et de classes saturées $S_1, S_2, \dots, S_n$. L'indice p de f est le plus petit des ordres des recouvrements de A par les classes saturées de f. (L'ordre d'un recouvrement est le nombre de termes de ce recouvrement.)

Soit en effet p l'indice de f. Il existe alors une partition

$$\pi = \{T_1, T_2, \dots, T_p\} \quad \text{de } A$$

et $f_\pi = s_{2,p}$. Chaque classe T_i est permise, donc incluse, dans une classe saturée S_i. Par suite, $\{S_1, S_2, \dots, S_p\}$ est un recouvrement de A.

Réciproquement, soit un recouvrement de A (d'ordre minimum p) par des classes saturées $\{S_1, S_2, \dots, S_p\}$. On peut supposer que ce recouvrement est irrédondant, soit $S_i \not\subset \bigcup_{j\neq i} S_j$, $\forall\, i = 1, 2, \dots, p$.

Alors considérons la partition $\pi = \{T_1, T_2, \dots, T_p\}$ définie par $T_1 = S_1$, $T_2 = S_2 - T_1$, $\dots$, $T_i = S_i - \bigcup_{j<i} T_j$. Il s'agit d'une partition, car $T_i \neq \emptyset$, $\forall\, i$, sinon le recouvrement est rédondant. Montrons que $f_\pi = s_{2,p}$.

En désignant par e_i les atomes de 2^p, nous avons

$$\pi \times e_i = X_{T_i}, \qquad \text{donc} \quad f_\pi(e_i) = f(\pi \times e_i) = f(X_{T_i}) = 0 \quad ,$$

car T_i est une classe permise.

Par ailleurs, si $(i \neq j)$, alors

$$\pi \times (e_i + e_j) = X_{T_i \cup T_j} \qquad \text{et} \qquad f_\pi(e_i + e_j) = f(X_{T_i \cup T_j}) \quad .$$

Le résultat est forcément 1, sinon $T_i \cup T_j$ est une classe permise contenue dans une classe saturée S_{p+1} et on aurait

$$\{S_1, S_2, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_{j-1}, S_{j+1}, \dots, S_p, S_{p+1}\}$$

comme recouvrement de A d'ordre $p-1$. En effet, c'est un recouvrement, car ou bien $a \in A$ est couvert par S_k ($k \neq i$ et $k \neq j$), ou bien a est couvert par l'un au moins des T_i, T_j, donc par $T_i \cup T_j \subseteq S_{p+1}$.

Cela suffit à prouver que $f_\pi = s_{2,p}$.

3.2. Applications à la théorie des graphes. Problèmes de coloriage.

3.2.1. Fonctions croissantes attachées à un graphe. Notion de polygraphe. – Considérons un graphe Γ, sans point isolé, de sommets $A, B, C, \dots, L$. Soit n le nombre de ces sommets. Attachons à chaque sommet une variable booléenne indépendante. Soit $A = \{a, b, c, \dots, \ell\}$ l'ensemble de ces variables (ou sommets). On considère la fonction booléenne $\gamma(a , b , c , \dots , \ell)$ telle que

$$\gamma(X) = 1 \iff \text{l'ensemble } S_X \text{ de sommets est lié par une arête au moins} .$$

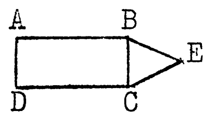
Cette fonction est manifestement croissante. On obtient son polynôme irrédondant tout-à-fait simplement :

$$\gamma(a , b , \dots , \ell) = \sum \mu_i ,$$

où les μ_i sont tous les monômes du second degré $a_j\, a_{j'}$ tels que les sommets A_j et $A_{j'}$ sont liés par une arête.

Cette fonction, par ailleurs, résume complètement les informations concernant les liaisons entre les noeuds de Γ .

<u>Exemple</u> :

(Γ) 

$$\gamma(a , b , c , d , e) = ab + bc + cd + da + be + ec .$$

Notons que les points de deuxième espèce de γ donnent tous les <u>ensembles intérieurement stables maximaux de</u> Γ [3].

En effet, si X est un tel point, S_X est intérieurement stable maximal, et réciproquement.

Or nous avons vu que la recherche de ces points revient à dualiser γ .

Exemple : $\gamma^* = (a + b)(b + c)(c + d)(d + a)(b + c)(e + c)$.

Le calcul donne $\gamma^* = ebd + eac + bcd + bca$. Donc les classes saturées de γ sont respectivement :

$$ac = \complement_A\, ebd , \quad bd = \complement_A\, eac , \quad ae = \complement_A\, bcd \quad \text{et} \quad de = \complement_A\, bca .$$

Nous obtenons bien les ensembles intérieurement stables de Γ . On retrouve, sous une forme très voisine, mais plus synthétique, les résultats de [5].

Nous pouvons enfin déduire de manière évidente :

PROPOSITION. - <u>L'indice de la fonction</u> γ <u>attachée au graphe</u> Γ <u>n'est autre que le nombre chromatique de</u> Γ .

Cela résulte du critère fondamental.

Or puisque les fonctions booléennes attachées aux divers graphes restent très particulières (homogènes du second degré), pour entrer complètement dans le cadre de la théorie des familles, il semble souhaitable d'introduire la notion suivante :

DÉFINITION. - Désignons sous le nom de <u>polygraphe</u>, associé à un complexe simplicial fini, l'ensemble de tous les simplexes maximaux par inclusion.

En quelque sorte, un polygraphe est la donnée :

d'un ensemble fini $A = \{a , b , c , \dots , \ell\}$ = ensemble des sommets,
et d'une partie $\mathbb{S} \subset \mathcal{P}(A) = \{S_1 , S_2 , \dots , S_q\}$ telle que $\forall\ i$, $s_i \not\subset s_j$ $(\forall\ j \neq i)$.

Si tous les éléments S_i n'ont que deux sommets, le polygraphe est un graphe sans point isolé.

On attachera alors à tout polygraphe Γ une fonction γ telle que

$$\gamma(X) = 1 \iff S_X \supseteq S_i \quad \text{pour un } i \text{ au moins .}$$

Cette fonction se détermine comme dans le cas d'un graphe.

L'avantage est que l'ensemble des polygraphes peut être assimilé à l'ensemble $\mathfrak{M}$.

On pourra facilement interpréter géométriquement les notions de réduction d'un polygraphe et composition de polygraphes.

Nous allons donner, à titre d'exemple, une conjecture équivalente à celle des quatre couleurs.

3.2.2. Le problème des quatre couleurs.

DÉFINITION 1. - Appelons fonction booléenne droite, toute fonction booléenne réductible à une fonction homogène du second degré, image d'un graphe planaire, et respectivement polygraphe droit, tout polygraphe associé à une fonction droite.

DÉFINITION 2. - Appelons fonction booléenne gauche une fonction non droite, et respectivement polygraphe gauche, un polygraphe non droit.

Notons qu'un graphe peut être non planaire, mais droit. C'est le cas, en particulier, si son nombre chromatique est $\leqslant 4$.

Un graphe planaire, par définition, est droit.

PROPOSITION. - Sont équivalentes à la conjecture des quatre couleurs les deux propositions suivantes :

(a) La fonction $s_{2,5}$ ne peut engendrer de fonctions droites.

(b) L'ensemble des fonctions gauches est la famille $\mathfrak{M}S_5$.

Désignons par (c) la conjecture des quatre couleurs.

(c) $\Longrightarrow$ (a) . - Car une fonction associée à un graphe planaire, étant d'indice $\leqslant 4$, ne peut être engendrée par $s_{2,5}$, sinon $s_{2,5}$ engendre $s_{2,p}$, $p \leqslant 5$ (impossible sur les familles). Par ailleurs, une fonction droite ne peut être engendrée par $s_{2,5}$ car, comme cette fonction droite se réduit à une fonction planaire, on aurait le résultat que $s_{2,5}$ engendre une fonction planaire.

(a) $\Longrightarrow$ (c) . - Car si un graphe planaire n'était pas d'indice $\leqslant 4$, alors sa fonction aurait pour indice 5 et serait engendrée par $s_{2,5}$.

(a) $\Longleftrightarrow$ (b) . - En effet, désignons par $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions gauches. Nous avons manifestement $\mathcal{G} \subset \mathfrak{M}S_5$, car une fonction d'indice $\leqslant 4$ est droite. Par ailleurs, (a) $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{M}S_5 \subseteq \mathcal{G}$. D'où $\mathfrak{M}S_5 = \mathcal{G}$.

Pour conclure, il serait certainement présomptueux de prétendre que ces conjectures équivalentes fourniront une solution au problème (2).

Toutefois, la relation étroite qui existe entre ces problèmes de coloriage et la théorie des familles croissantes nous fait comprendre qu'il est intéressant d'introduire la notion de polygraphe et des opérations géométriques élémentaires sur ces polygraphes.

A ce titre, il était bon de donner cet exemple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAKEN (Claude). - Définition et propriétés de certaines familles de fonctions booléennes croissantes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 259, 1964, p. 1369-1371.

[2] BENZAKEN (Claude). - Les familles de fonctions booléennes déduites de certaines familles de fonctions booléennes croissantes. Critères de détermination de l'indice d'une fonction croissante, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 1528-1531.

[3] BERGE (Claude). - Théorie des graphes et ses applications. - Paris, Dunod, 1958 (Collection universitaire de Mathématiques, 2) ; The theory of graphs and its applications. - London, Methuen and Co, 1962.

[4] KUNTZMANN (Jean). - Algèbre de Boole. - Paris, Dunod, 1965.

[5] MAGHOUT (Khaled). - Sur la détermination des nombres de stabilité et du nombre chromatique d'un graphe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 3522-3523.

(2) Il faut faire intervenir obligatoirement la notion essentiellement topologique de planéarité.