Paul Jaffard

Problèmes universels, foncteurs représentables et foncteurs adjoints

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, n° 1 (1965-1966), exp. n° 1, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_1_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
19e année, 1965/66, n° 1

15 novembre 1965

PROBLÈMES UNIVERSELS, FONCTEURS REPRÉSENTABLES ET FONCTEURS ADJOINTS

par Paul JAFFARD

Sans prétendre à beaucoup d'originalité, nous nous proposons ici d'exposer des liens qui unissent certaines notions fondamentales en théorie des catégories.

Sauf mention expresse du contraire, les catégories intervenant ici ne seront pas supposées telles que leurs objets forment des ensembles. Nous emploierons le mot "foncteur" pour "foncteur covariant".

1. Problèmes universels.

Soit un foncteur $D : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ d'une catégorie $\mathcal{C}'$ dans une catégorie $\mathcal{C}$.

a étant un objet de $\mathcal{C}$, on appelle objet de $\mathcal{C}'$ attaché à l'objet a par le foncteur D ou solution relative à l'objet a du problème universel posé par D, la donnée d'un objet $G(a)$ de $\mathcal{C}'$ et d'une flèche $\pi_a : a \to DG(a)$ telle que, pour tout autre flèche de la forme $s : a \to D(b)$, il existe une flèche unique $u : G(a) \to b$ telle que $s = D(u).\pi_a$. Ceci revient évidemment à dire que, pour tout objet b de $\mathcal{C}'$, l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(G(a)\,,\,b) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(a\,,\,D(b)) \\ u &\leadsto D(u).\pi_a \end{aligned}$$

est une bijection.

Une telle donnée n'existe pas nécessairement.

Exemples.

1° Soient $\mathcal{C}$ la catégorie des corps commutatifs, les flèches étant les isomorphismes, $\mathcal{C}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée par les corps algébriquement clos, et D le foncteur d'inclusion. On peut prendre pour flèche π_a tout plongement du corps a dans une de ses clôtures algébriques b (ici $D(b) = b$).

2° Soient $\mathcal{C}$ la catégorie des ensembles, $\mathcal{C}'$ la catégorie des groupes, et D le foncteur "oubli de structure" qui fait correspondre à tout groupe son ensemble sous-jacent. Etant donné un ensemble a, on peut prendre pour $G(a)$ le groupe libre engendré par a, et pour flèche π_a l'inclusion canonique de a dans l'ensemble sous-jacent à $G(a)$.

3° Rappelons que le foncteur D est dit <u>pleinement fidèle</u> si, pour tout couple (b_1 , b_2) d'objets de $\mathcal{C}'$, l'application

$$\mathrm{Hom}(b_1 , b_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(D(b_1) , B(b_2))$$
$$u \rightsquigarrow D(u)$$

est une bijection. Ceci posé, on a le lemme suivant.

LEMME 1. - *Si* D *est un foncteur pleinement fidèle et si* b *est un objet de* $\mathcal{C}'$, *alors* $(b , 1_{D(b)})$ *est objet de* $\mathcal{C}'$ *attaché à* $D(b)$ *par* D .

Soient en effet $x \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}'$, et une flèche $s : D(b) \to D(x)$. Comme D est pleinement fidèle, il existe une, et une seule, flèche u de la forme $b \to x$ telle que $s = D(u)$, c'est-à-dire telle que $s = D(u)\ 1_{D(b)}$. D'où le lemme.

Nous aurons également besoin du lemme suivant.

LEMME 2. - *Si* $(G(a) , \pi_a : a \to DG(a))$ *est un objet attaché à l'objet* a *par* D , *et si* $i : a' \to a$ *est un isomorphisme,* $(G(a) , \pi_a i : a' \to DG(a))$ *est un objet attaché à l'objet* a' *par* D .

Ceci résulte immédiatement des définitions.

En renversant dans $\mathcal{C}'$ et dans $\mathcal{C}$ le sens des flèches, on obtient la notion duale d'*objet de* $\mathcal{C}'$ *co-attaché à l'objet* a *par le foncteur* D , *ou solution relative à l'objet* a *du problème co-universel posé par* D . Un tel objet est donc la donnée d'un objet $G'(a)$ de $\mathcal{C}'$ et d'une flèche $\pi'_a : DG'(a) \to a$ telle que, pour tout autre flèche de la forme $s : D(b) \to a$, il existe une flèche unique $u : b \to G'(a)$ telle que $s = \pi'_a \circ D(u)$.

2. Interprétation par les objets initiaux.

Etant donnés le foncteur $D : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ et l'objet a de $\mathcal{C}$, on considère la catégorie I_a ainsi définie. Ses objets sont les couples $(b , s : a \to D(b))$ constitués par la donnée d'un objet b de $\mathcal{C}'$ et d'une flèche s de source a et de but $D(b)$. $(b_i , s_i : a \to D(b_i))$ $(i = 1 , 2)$ étant deux objets de I_a , une flèche $\tilde{\xi}$ de source (b_1 , s_1) et de but (b_2 , s_2) sera la donnée d'une flèche $\xi : b_1 \to b_2$ telle que $s_2 = D(\xi).s_1$. La composition des flèches est évidente.

<u>Remarque</u>. - Etant donnés la catégorie $\mathcal{C}_{\backslash a}$ des flèches de source a (duale de la catégorie des objets de $\mathcal{C}^0$ au-dessus de a^0), et le foncteur but $B : \mathcal{C}_{\backslash a} \to \mathcal{C}$

(qui associe à chaque flèche de source a son propre but), il est facile de voir que la catégorie I_a est le produit fibré $D \wedge B$:

$$\begin{tikzcd} I_a \arrow[r, "P_a"] \arrow[d] & \mathcal{C}' \arrow[d, "D"] \\ \mathcal{C}_{\backslash a} \arrow[r, "B"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (b\ ,\ s) \arrow[r, squiggly] \arrow[d, squiggly] & b \arrow[d, squiggly] \\ s \arrow[r, squiggly] & \text{but de } s = D(b) \end{tikzcd}$$

Ceci posé, on voit immédiatement à partir des définitions que l'on a le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - *Pour qu'un objet* $(b\ ,\ s : a \to D(b))$ *de* I_a *soit un objet de* $\mathcal{C}$ *attaché à l'objet* a *par* D , *il faut et il suffit qu'il soit un objet initial de la catégorie* I_a .

La résolution d'un problème universel peut donc se ramener à la recherche d'un objet initial. Réciproquement, *la recherche d'un objet initial peut se ramener à la résolution d'un problème universel*, comme le montre la considération suivante :

Etant donnée une catégorie $\mathcal{C}'$, on peut considérer la catégorie $\mathcal{C}$ ayant un seul objet a et une seule flèche, et le foncteur unique $D : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$.

Pour que $(b\ ,\ 1_a : a \to D(b) = a)$ soit attaché à l'objet a par le foncteur D , on voit immédiatement qu'il faut et il suffit que b soit un objet initial de la catégorie $\mathcal{C}'$.

3. Interprétation par les foncteurs représentables.

Etant donnés une catégorie $\mathcal{C}$ et un objet A de $\mathcal{C}$, nous noterons h'_A le foncteur $\mathrm{Hom}(A\ ,\ .)$ de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles (laquelle sera notée *Ens*) qui associe à tout objet X de $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathrm{Hom}(A\ ,\ X)$ des flèches de A dans X (l'action du foncteur h'_A sur les flèches de $\mathcal{C}$ est évidente).

Ceci posé, rappelons (cf. par exemple [3]) que, si F est un foncteur de $\mathcal{C}$ dans *Ens* , l'ensemble $\mathrm{Hom}(h'_A\ ,\ F)$ des morphismes fonctoriels de h'_A dans F correspond biunivoquement à l'ensemble $F(A)$ de la façon suivante :

A l'élément x de $F(A)$, correspond le morphisme fonctoriel $r : h'_A \to F$ ainsi défini : Si X est un objet de $\mathcal{C}$, la flèche

$$r_X : h'_A(X) = \mathrm{Hom}(A\ ,\ X) \longrightarrow F(X)$$

est l'application

$$u \rightsquigarrow (F(u))(x) \quad .$$

Réciproquement, au morphisme fonctoriel $r : h'_A \to F$, correspond l'élément $x = r_A(1_A)$ de $F(A)$.

En particulier, lorsque F est de la forme h'_B , la correspondance précédente définit une bijection de $\mathrm{Hom}(h'_A , h'_B)$ sur $\mathrm{Hom}(B , A)$.

L'existence de ces bijections peut se traduire de la façon suivante : on peut considérer le foncteur contravariant h' de la catégorie $\mathcal{C}$ dans la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C} , \underline{\mathrm{Ens}})$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\underline{\mathrm{Ens}}$, ce foncteur h' associant à l'objet a de $\mathcal{C}$ le foncteur h'_a . On peut d'ailleurs considérer h' comme covariant en remplaçant $\mathcal{C}$ par sa catégorie duale $\mathcal{C}^0$. L'existence des bijections précédentes montre alors que le foncteur h' est pleinement fidèle.

Ceci posé, un foncteur F de $\mathcal{C}$ dans $\underline{\mathrm{Ens}}$ est dit <u>représentable</u> s'il est isomorphe à un foncteur de la forme h'_A . Un tel isomorphisme $r : h'_A \to F$ étant défini comme on vient de l'indiquer par un élément x de $F(A)$, on dira que le foncteur F est <u>représenté</u> par le couple (A , x) . On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - <u>Soient un foncteur</u> D <u>d'une catégorie</u> $\mathcal{C}'$ <u>dans une catégorie</u> $\mathcal{C}$, <u>et un objet</u> a <u>de</u> $\mathcal{C}$. <u>Pour qu'il existe un objet de</u> $\mathcal{C}'$ <u>attaché à l'objet</u> a <u>par</u> D , <u>il faut et il suffit que le foncteur</u> $F = \mathrm{Hom}(a , D.)$ <u>de</u> $\mathcal{C}'$ <u>dans</u> $\underline{\mathrm{Ens}}$, <u>qui fait correspondre à l'objet</u> x <u>de</u> $\mathcal{C}'$ <u>l'ensemble</u> $\mathrm{Hom}(a , D(x))$, <u>soit représentable. De façon plus précise, pour que le foncteur</u> F <u>soit représenté par le couple</u> (b , π) (b <u>étant un objet de</u> $\mathcal{C}'$, <u>et</u> $\pi \in F(b)$ <u>étant une flèche</u> $a \to D(b)$), <u>il faut et il suffit que le couple</u> (b , π) <u>soit un objet de</u> $\mathcal{C}'$ <u>attaché à l'objet</u> a <u>par le foncteur</u> D .

Le couple (b , π) définit le morphisme fonctoriel $r : h'_b \to F$ tel que si x est un objet quelconque de $\mathcal{C}'$, la flèche

$$r_x : h'_b(x) = \mathrm{Hom}(b , x) \longrightarrow F(x) = \mathrm{Hom}(a , D(x))$$

soit l'application

$$\xi \rightsquigarrow (F(\xi))(\pi) = D(\xi).\pi \quad .$$

Dire que r est un isomorphisme revient à dire que, pour tout objet x de $\mathcal{C}'$, l'application r_x est une bijection, mais ceci revient à dire que (b , π) est attaché à l'objet a par D . D'où le théorème.

La notion de problème universel peut donc se ramener à celle de foncteur représentable. Nous allons voir qu'à son tour on peut définir la représentabilité d'un foncteur en termes de problème co-universel, c'est-à-dire en fin de compte en termes de problème universel.

Etant donnée une catégorie $\mathcal{C}'$, on peut considérer la catégorie $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C}', \underline{\mathrm{Ens}})$ des foncteurs de $\mathcal{C}'$ dans $\underline{\mathrm{Ens}}$ et le foncteur contravariant $h' : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$. Ceci posé, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - Etant donné le foncteur F de $\mathcal{C}'$ dans $\underline{\mathrm{Ens}}$, pour qu'il soit représentable il faut et il suffit qu'il existe une solution relative à F du problème co-universel posé par h' .

Nécessité. - Supposons que F soit représentable. Il existe alors un objet B de $\mathcal{C}'$ et un isomorphisme fonctoriel de la forme $r : h'_B \to F$. Du fait que h' est pleinement fidèle, la nécessité se déduit immédiatement des lemmes 1 et 2.

Suffisance. - Supposons que $(B , r : h'_B \to F)$ soit une solution du problème co-universel posé par h' . Nous allons montrer que r est un isomorphisme, ce qui montrera que r est représentable.

Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout objet X de $\mathcal{C}'$, la flèche

$$r_X : h'_B(X) = \mathrm{Hom}(B , X) \to F(X)$$

est une bijection.

On va montrer pour cela que r_X est le produit de deux bijections :

$$f : \mathrm{Hom}(B , X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(h'_X , F)$$

et

$$g : \mathrm{Hom}(h'_X, F) \longrightarrow F(X) .$$

La première bijection f résulte des hypothèses de co-universalité. Elle associe à toute flèche $u : B \to X$ une flèche $f(u) = t : h'_X \to F$ telle que $t = rh'_u$.

La seconde bijection g associe, comme on l'a dit plus haut, à la flèche $t : h'_X \to F$ l'élément $x = t_X(1_X)$ de $F(X)$.

On a donc

$$x = t_X(1_X) = r_X(h'_u)_X (1_X) .$$

Mais l'application $(h'_u)_X : \mathrm{Hom}(X , X) \to \mathrm{Hom}(B , X)$ est telle que

$$(h'_u)_X (1_X) = 1_X . u = u$$

et $x = r_X(u)$. On a donc bien $gf = r_X$, ce qui achève de montrer le théorème.

4. Interprétation par les limites gauches.

Rappelons brièvement comment on définit la limite gauche (ou limite projective) d'un foncteur $F : I \to \mathfrak{A}$.

On appellera F-système projectif la donnée d'un objet X de $\mathfrak{A}$ et d'un morphisme π du foncteur constant $X_I : I \to \mathfrak{A}$ dans le foncteur F , c'est-à-dire encore la donnée pour tout objet i de I d'une flèche $\pi_i : X \to F_i$ ($= F(i)$) telle que tous les diagrammes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[dr, "\pi_j"'] & F_i \arrow[d, "F_u"] \\ & F_j \end{tikzcd}$$

soient commutatifs ($u : i \to j$ parcourant la collection des flèches de I).

Une <u>limite gauche</u> du foncteur F sera la donnée d'un F-système projectif $\lambda : L_I \to F$ tel qu'à tout F-système projectif $\pi : X_I \to F$, on puisse associer une flèche unique $u : X \to L$ telle que l'on ait toujours les relations de commutativité $\pi_i = \lambda_i u$ ($\forall i \in \mathrm{Ob}\, I$) :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "\pi_i"] & \\ L \arrow[r, "\lambda_i"] & F_i \end{tikzcd}$$

Ceci revient à dire que λ est objet final dans la catégorie aisément définissable des F-systèmes projectifs (sous-catégorie de la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(I , \mathcal{A})$ des foncteurs de I dans $\mathcal{A}$). On dit encore que les flèches λ_i font de L la limite projective du foncteur F.

Ceci posé, étant donné un autre foncteur $H : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, on dit que H <u>commute à la limite gauche de</u> F si F admet une limite gauche $(\lambda_i : L \to F_i \quad (i \in \mathrm{Ob}\, I))$ et si les flèches $(H(\lambda_i) : H(L) \to (HF)_i)$ font de $H(L)$ la limite gauche de HF.

Nous dirons que <u>le foncteur</u> H <u>commute aux limites gauches</u> si, pour tout foncteur F de but $\mathcal{A}$ admettant une limite gauche, le foncteur H commute à cette limite gauche.

Nous dirons qu'une catégorie $\mathcal{A}$ <u>a des limites gauches</u> ou est <u>complète à gauche</u>, si tout foncteur $F : I \to \mathcal{A}$, où I est une <u>petite catégorie</u> (c'est-à-dire telle que la collection $\mathrm{Ob}(I)$ des objets de I soit un ensemble), admet une limite gauche. Nous dirons que la catégorie $\mathcal{A}$ est <u>absolument complète à gauche</u> si tout foncteur $F : I \to \mathcal{A}$ (sans faire de restrictions ensemblistes sur la catégorie I) admet une limite gauche. Tandis que les catégories complètes à gauche sont assez répandues et d'un usage courant, les catégories absolument complètes à gauche sont relativement rares. Montrons par exemple le lemme suivant.

LEMME 3. - <u>Une catégorie abélienne ayant au moins un élément non nul et admettant un générateur ne peut pas être absolument complète à gauche</u>.

Pour le voir, raisonnons par l'absurde, et supposons l'existence d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ absolument complète à gauche et admettant un générateur. Soit I une <u>catégorie discrète</u> (c'est-à-dire n'ayant pas de flèches autres que celles de la forme 1_i ($i \in \mathrm{Ob}\, I$) dont les objets ne forment pas un ensemble (on peut prendre pour I la catégorie des ensembles rendue discrète par exemple). Considérons un foncteur de la forme $F ; I \to \mathcal{A}$, les objets F_i étant tous distincts de 0 (on peut prendre pour F un foncteur constant à valeurs dans un objet non nul de $\mathcal{A}$). Supposons que les flèches $\lambda_i : L \to F_i$ fassent de L la limite gauche de F . L'objet L étant le produit (indexé par $\mathrm{Ob}\, I$) des objets F_i , on peut associer à tout objet i de I un monomorphisme $t_i : F_i \to L$ ainsi défini :

$$\lambda_i\, t_i = 1_{F_i} \qquad \text{et} \qquad \lambda_j\, t_i = 0_{A_j A_i} \quad \text{si} \quad i \neq j \ .$$

Les relations $\lambda_i\, t_i = 1_{F_i}$ montrent que ces t_i sont des monomorphismes. Comme ils définissent des sous-objets de L tous distincts, on voit que ceux-ci sont trop nombreux pour former un ensemble contrairement à l'hypothèse faite sur l'existence d'un générateur. D'où le lemme.

Ceci posé, reprenons les notations du théorème 1, c'est-à-dire que l'on considère un foncteur $D : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, un objet a de $\mathcal{C}$, la catégorie I_a , et le foncteur $P_a : I_a \to \mathcal{C}'$ qui associe à l'objet (x , u) de I_a l'objet x de $\mathcal{C}'$. On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - <u>Pour qu'il existe un objet attaché à l'objet</u> a <u>par le foncteur</u> D , <u>il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées</u> :

1° <u>La catégorie</u> I_a <u>n'est pas vide et le foncteur</u> P_a <u>admet une limite projective</u>.

2° <u>Le foncteur</u> D <u>commute à la limite projective du foncteur</u> P_a (*).

<u>Suffisance</u>. - Supposons que les conditions 1° et 2° soient vérifiées. Supposons que les flèches de $\mathcal{C}'$: $\pi_{(x,u)} : a' \to x$ ($(x , u) \in \mathrm{Ob}\, I_a$) fassent de a' la limite projective du foncteur P_a .

Soit une flèche de I_a : $\tilde{\xi} : (x_1 , u_1) \to (x_2 , u_2)$. On aura $u_2 = D(\xi)u_1$, et, en vertu de la définition d'un système projectif :

$$\xi\pi_{(x_1,u_1)} = \pi_{(x_2,u_2)} \ , \tag{1}$$

(*) Ce théorème est dû à BENABOU.

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[d, "\pi(x_1,u_1)"'] \arrow[dr, "\pi(x_2,u_2)"] & \\ x_1 \arrow[r, "\xi"] & x_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[d, "u_1"'] \arrow[dr, "u_2"] & \\ D(x_1) \arrow[r, "D(\xi)"] & D(x_2) \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, les flèches $D(\pi_{(x,u)})$ font de $D(a')$ la limite projective du foncteur DP_a . Mais

$$DP_a(x\ ,\ u) = D(x) \qquad \text{et} \qquad DP_a(\tilde{\xi}) = D(\xi) \quad .$$

On voit donc que, si on associe à tout objet $(x\ ,\ u)$ de I_a la flèche

$$u\ :\ a \to D(x) = DP_a(x\ ,\ u) \quad ,$$

ces flèches forment un DP_a-système projectif.

Il existe donc une flèche $v\ :\ a \to D(a')$ définie de façon unique par les égalités

(2) $$u = D(\pi_{(x,u)})v \qquad (\ \forall\ (x\ ,\ u) \in \mathrm{Ob}\ I_a\ ) \quad .$$

Nous nous proposons de montrer que $(a'\ ,\ v\ :\ a \to D(a'))$ est un objet de $\mathcal{C}'$ attaché à a par D .

$(a'\ ,\ v)$ étant un objet particulier de I_a , il lui est attaché une flèche

$$\pi_{(a',v)}\ :\ a' \to a' \quad .$$

$(x\ ,\ u)$ étant un objet quelconque de I_a l'égalité (2) montre l'existence d'une flèche de I_a :

$$\pi_{(x,u)}\ :\ (a'\ ,\ v) \to (x\ ,\ u) \quad ,$$

et l'égalité (1) montre alors que

(3) $$\pi_{(x,u)}\ \pi_{(a',v)} = \pi_{(x,u)} \quad .$$

Mais a' étant la limite projective de P_a , il n'y a qu'une seule flèche $t\ :\ a' \to a'$ telle que

$$\pi_{(x,u)}\ t = \pi_{(x,u)} \qquad (\ \forall\ (x\ ,\ u) \in \mathrm{Ob}\ I_a\ ) \quad ,$$

c'est la flèche $t = 1_{a'}$. Donc,

(4) $$\pi_{(a',v)} = 1_{a'} \quad .$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que $(a'\ ,\ v)$ est un objet de $\mathcal{C}'$ attaché à a par D . En effet, si on a une flèche $u\ :\ a \to D(x)$, la flèche $\pi_{(x,u)}\ :\ a' \to x$ vérifie l'égalité $u = D(\pi_{(x,u)})v$ d'après (2). Si, d'autre part, on a une flèche $h : a' \to x$ telle que $u = D(h)v$, on a la flèche

$$\tilde{h} : (a' , v) \to (x , u) \quad ,$$

et la relation (1) entraîne alors

$$h\,\pi_{(a',v)} = \pi_{(x,u)} \quad ,$$

c'est-à-dire $h = \pi_{(x,u)}$ en vertu de (4).

D'où la démonstration de la suffisance.

<u>Nécessité</u>. - Soit $(a' , v : a \to D(a'))$ un objet attaché à a par D . La catégorie I_a n'est pas vide puisque $(a' , v) \in \mathrm{Ob}\, I_a$. Etant donné un objet (x , u) de I_a , on peut lui attacher une flèche $\pi_{(x,u)} : a' \to x$ définie de manière unique par l'égalité

$$(5) \qquad u = D(\pi_{(x,u)})v \quad .$$

Montrons que les flèches $\pi_{(x,u)}$ font de a' la limite projective du foncteur P_a .

Soit une flèche de I_a : $\tilde{\xi} : (x_1 , u_1) \to (x_2 , u_2)$. On a l'égalité

$$(6) \qquad u_2 = D(\xi)u_1 \quad ,$$

et

$$D(\xi\pi_{(x_1,u_1)})v = D(\xi)\; D(\pi_{(x_1,u_1)})v = D(\xi)u_1 = u_2 \quad .$$

Comme $u_2 = D(\pi_{(x_2,u_2)})v$, la propriété d'unicité de la flèche $\pi_{(x_2,u_2)}$ et l'égalité

$$D(\pi_{(x_2,u_2)})v = D(\xi\pi_{(x_1,u_1)})v$$

entraînent

$$\pi_{(x_2,u_2)} = \xi\pi_{(x_1,u_1)} \quad ,$$

et montrent que les flèches $\pi_{(x,u)}$ définissent un P_a-système projectif.

Soit maintenant un P_a-système projectif $\delta_{(x,u)} : b \to x$ ($\forall\ (x , u) \in I_a$). Etant donnée la flèche $\tilde{\xi} : (x_1 , u_1) \to (x_2 , u_2)$, on a donc

$$(7) \qquad \delta_{(x_2,u_2)} = \xi\delta_{(x_1,u_1)} \quad .$$

On a en particulier la flèche $\delta = \delta_{(a',v)} : b \to a'$. Si (x , u) est un objet de I_a , l'égalité (5) montre que l'on a la flèche

$$\tilde{\pi}_{(x,u)} : (a' , v) \to (x , u) \quad ,$$

et l'égalité (7) que

(8) $$\delta_{(x,u)} = \pi_{(x,u)}\,\delta \qquad (\forall\ (x\ ,\ u) \in \mathrm{Ob}\ I_a\ ) .$$

Pour montrer que les flèches $\pi_{(x,u)}$ font de a' la limite projective du foncteur P_a , il suffit de montrer que les égalités (8) définissent complètement la flèche δ .

Soit donc une flèche $\delta' : b \to a'$ telle que

(8') $$\delta_{(x,u)} = \pi_{(x,u)}\,\delta' \qquad (\forall\ (x\ ,\ u) \in \mathrm{Ob}\ I_a\ ) .$$

On aura en particulier

(9) $$\delta_{(a',v)} = \pi_{(a',v)}\,\delta' .$$

Mais comme $v = D(1)v$, l'égalité (5) entraîne $\pi_{(a',v)} = 1_{a'}$, et l'égalité (9) s'écrit $\delta = \delta'$, ce qui achève de montrer que les flèches $\pi_{(x,u)}$ font de a' la limite projective de $P_{a'}$.

Il nous reste à montrer que les flèches $D(\pi_{(x,u)})$ font de $D(a')$ la limite projective de DP_a . Ces flèches définissent évidemment un DP_a-système projectif. Supposons maintenant que l'on se donne un DP_a-système projectif

$$q_{(x,u)} :\ c \to D(x) \qquad (\forall\ (x\ ,\ u) \in \mathrm{Ob}\ I_a\ ) .$$

On a en particulier une flèche $q = q_{(a',v)} :\ c \to D(a')$. Etant donnée la flèche $\tilde{\pi}_{(x,u)} :\ (a'\ ,\ v) \to (x\ ,\ u)$, on aura l'égalité

$$q_{(x,u)} = DP_a(\tilde{\pi}_{(x,u)})\, q_{(a',v)} ,$$

ou

(10) $$q_{(x,u)} = D(\pi_{(x,u)})q \qquad (\forall\ (x\ ,\ u) \in \mathrm{Ob}\ I_a\ ) .$$

Il reste à montrer que la flèche q est complètement définie par les égalités (10). Soit donc une flèche

$$q' :\ c \to D(a')$$

telle que

$$q_{(x,u)} = D(\pi_{(x,u)})q' \qquad (\forall\ (x\ ,\ u) \in \mathrm{Ob}\ I_a\ ) .$$

On a en particulier

$$q_{(a',v)} = D(\pi_{(a',v)})q' ,$$

et comme $\pi_{(a',v)} = 1_{a'}$, cette dernière égalité se lit $q = q'$, ce qui achève la démonstration du théorème 4.

5. Interprétation par les foncteurs adjoints.

Rappelons qu'étant donnés deux foncteurs

$$D : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$$
$$G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}' \quad ,$$

le foncteur G est dit adjoint à gauche du foncteur D, ou encore le foncteur D est dit adjoint à droite du foncteur G, si les deux foncteurs

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot\, , D\cdot) : (a , a') \leadsto \mathrm{Hom}(a , D(a'))$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(G\cdot\, , \cdot) : (a , a') \leadsto \mathrm{Hom}(G(a) , a')$$

sont isomorphes.

On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - Pour que le foncteur $D : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ admette un adjoint à gauche, il faut et il suffit qu'à tout objet a de $\mathcal{C}$ soit attaché un objet de $\mathcal{C}'$ par le foncteur D.

Nécessité. - Supposons que D admette un adjoint à gauche G, et soit l'isomorphisme de bifoncteurs :

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(G\cdot\, , \cdot) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot\, , D\cdot) \quad .$$

Soient a un objet quelconque de $\mathcal{C}$, et b un objet quelconque de $\mathcal{C}'$. Etant donnée une flèche $u : G(a) \to b$, le fait que Φ est un morphisme de bifoncteurs entraîne la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(Ga , Ga) \arrow[r, "\Phi(a,Ga)"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(Ga , u)"] & \mathrm{Hom}(a , DGa) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(a , Du)"] \\
\mathrm{Hom}(Ga , b) \arrow[r, "\Phi(a,b)"'] & \mathrm{Hom}(a , Db)
\end{tikzcd}$$

En notant π_a l'image de la flèche 1_{Ga} par l'application $\Phi_{(a,Ga)}$, on voit donc que la bijection $\Phi_{(a,b)}$ fait correspondre à la flèche u la flèche $D(u)\,\pi_a$. Il résulte alors de la bijectivité de $\Phi_{(a,b)}$ que (Ga , π_a) est un objet de $\mathcal{C}'$ attaché à a par le foncteur D.

Suffisance. - Voir par exemple [3], § 7, n° 3.

COROLLAIRE. - Soit $\mathcal{C}'$ une catégorie absolument complète à gauche. Pour qu'un foncteur $D : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ admette un adjoint à gauche, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1° Le foncteur D commute aux limites gauches.

2° Pour tout objet a de $\mathcal{C}$, il existe une flèche de source a ayant pour but un élément de la forme $D(b)$.

Nécessité. - Supposons que D admette un adjoint à gauche G, et soit un isomorphisme

$$\Phi : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(G. , .) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(. , D.) .$$

Il est classique que la condition 1° est vérifiée. Si a est un objet de $\mathcal{C}$, la flèche $\pi_a = \Phi_{(a,Ga)}(1_{Ga})$ est de la forme $a \to DG(a)$, donc la condition 2° est vérifiée.

Suffisance. - Supposons les conditions 1° et 2° vérifiées, et soit a un objet de $\mathcal{C}$. La condition 2° montre que la catégorie I_a n'est pas vide. $\mathcal{C}'$ étant absolument complète à gauche, le foncteur P_a admet alors une limite projective et, d'après la condition 2°, le foncteur D commute à cette limite projective. Le théorème 4 montre donc qu'il existe un objet attaché à l'objet a par le foncteur D, et le théorème 5 achève de montrer la suffisance.

Remarque. - Le fait qu'il y ait peu de catégories absolument complètes à gauche limite beaucoup la portée de ce théorème. On peut toutefois obtenir des résultats (cf. [2], ch. III, exercices) dans le cas où la catégorie $\mathcal{C}'$ est seulement supposée complète à gauche en cherchant des conditions pour que chaque catégorie de la forme I_a admette une petite sous-catégorie cofinale (ou pseudo-cofinale) J_a. En effet, les hypothèses faites sur $\mathcal{C}'$ entraînent alors que la restriction à J_a du foncteur P_a admet une limite gauche. On voit alors facilement qu'il en est de même du foncteur P_a lui-même.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENABOU (Jean). - Critères de représentabilité des foncteurs, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 752-755.

[2] FREYD (Peter). - Abelian categories. - New York, Harper and Row, 1964 (Harper's Series in modern Mathematics).

[3] POITOU (G.) et JAFFARD (P.). - Introduction à la théorie des catégories. - Paris, Offilib, 1965 (Université de Lille).