Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Pierre-Antoine Grillet
Alain Gérente

Demi-groupes compacts

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, nº 2 (1964-1965), exp. nº 29, p. 1-34
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_2_A9_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 29

DEMI-GROUPES COMPACTS (*)

par Pierre-Antoine GRILLET et Alain GÉRENTE

La théorie des demi-groupes topologiques constitue une branche importante de la théorie des demi-groupes, mais s'en distingue par la haute importance qu'y prend la topologie. Comme la théorie des demi-groupes, elle s'est développée dans des directions assez variées, parmi lesquelles on peut citer les problèmes de structuration d'un espace topologique donné en demi-groupe topologique, l'étude de la dimension et de la cohomologie des demi-groupes topologiques, enfin l'étude des propriétés algébriques de certains demi-groupes topologiques (les plus généraux n'en présentant pas de supplémentaires).

Nous avons choisi cette dernière direction pour le Groupe d'études d'Algèbre, en nous limitant à une classe de demi-groupes particulièrement étudiée et intéressante, celle des demi-groupes compacts. Voulant seulement donner une idée de la théorie, nous présentons d'abord quelques méthodes et résultats fondamentaux simples, puis des propriétés un peu plus profondes sur les idéaux maximaux, et enfin les résultats de KOCH sur les idempotents primitifs. Un certain nombre d'énoncés originaux précisent dans ces deux dernières questions les résultats classiques, sans rompre néanmoins l'homogénéité du texte.

Des connaissances élémentaires de topologie sont requises du lecteur (limite ou valeur d'adhérence suivant un filtre ou une base de filtre, espaces séparés, compacts, connexes ; cf. BOURBAKI, Topologie générale, Chapitre 1), ainsi qu'une bonne connaissance de la théorie algébrique [cf. CLIFFORD and PRESTON, The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7)].

Nous nous sommes largement inspirés des mémoires suivants :

[1] NUMAKURA (Katsumi). - On bicompact semigroups, Math. J. Okayama Univ., t. 1, 1952, p. 99-108.

pour les lemmes du chapitre II ;

[2] WALLACE (A. D.). - The structure of topological semigroups, Bull. Amer. math. Soc., t. 61, 1955, p. 95-112.

(*) Ces exposés ont été faits au Groupe d'études d'Algèbre dirigé par P. DUBREIL.

pour les résultats généraux ;

[3] KOCH (R. J.) and WALLACE (A. D.). - Maximal ideals in compact semigroups, Duke math. J., t. 21, 1954, p. 681-685.

pour les idéaux maximaux (chapitre V) ;

[4] FAUCETT (W. M.), KOCH (R. J.) and NUMAKURA (K.). - Complements of maximal ideals in compact semigroups, Duke math. J., t. 22, 1955, p. 655-661.

pour les idéaux maximaux (chapitre VI) ;

[5] KOCH (R. J.). - Remarks on primitive idempotents in compact semigroups with zero, Proc. Amer. math. Soc., t. 5, 1954, p. 828-833.

pour les idempotents primitifs (chapitre VII).

[6] Nous avons utilisé aussi un résultat de KOCH, non publié, mais cité par CLIFFORT et PRESTON, dans leur livre, p. 66, exercice 4.

Le lecteur désirant une première idée sur la théorie pourra lire [2]. Les lemmes du chapitre II sont utilisés ou redécouverts par un certain nombre d'auteurs sous diverses formes. Le résultat sur les demi-groupes compacts monothétiques semble dû indépendamment à NUMAKURA [1], à SCHWARZ (Stefan) [On Hausdorff bicompact semigroups, Czech. math. J., t. 5, 1955, p. 1-23] et à KOCH (R. J.) [Dissertation, Tulane University of Louisiana, 1953, malheureusement inaccessible]. On pourra trouver des compléments sur cette question dans HEWITT (Edwin) [Compact monothetic semigroups, Duke math. J., t. 23, 1955, p. 447-458].

On trouvera également une autre façon d'étudier la structure des demi-groupes simples compacts (chapitre IV) dans WALLACE (A. D.) [Retractions in semi-groups, Pacific J. of Math., t. 7, 1957, p. 1513-1517]. Pour les chapitres suivants, nous ne pouvons que renvoyer le lecteur aux mémoires originaux [3], [4], [5].

Ce paragraphe est destiné à préciser la part de travail original des auteurs. Nous entendons le mot original modulo notre connaissance des mémoires publiés, qui n'est pas complète. Les démonstrations des chapitres I à IV sont toutes originales, néanmoins la démonstration du théorème 4.1 est calquée sur la démonstration analogue de [3]. Dans les chapitres suivants, les énoncés 5.6 à 5.10, 5.21, 5.22, 6.1, 6.2, 6.6, 6.10, 6.11, 6.12, 6.16, 7.10, 7.15 à 7.19 sont originaux au sens ci-dessus. La considération des idéaux maximaux triviaux et non triviaux permet au chapitre VI de préciser les énoncés 6.4, 6.5, 6.9. La présentation du théorème 7.9 est également originale. Les énoncés 6.13, 6.15, 7.11, 7.13, 7.15 sont des énoncés classiques plus ou moins améliorés. Enfin les démonstrations des énoncés 5.11, 6.5, 6.7, 6.9, 6.14, 7.9 sont originales ou plus ou moins améliorées.

Les deux auteurs se sont partagé le travail de la manière suivante. Les chapitres I à IV et l'introduction viennent du premier. Pour les chapitres V à VII, le choix des énoncés et démonstrations classiques, tous les énoncés originaux et presque toutes les démonstrations originales ont été faits par le second auteur, le premier ayant seulement fait une bonne partie du travail de pure rédaction.

Nous avons enfin profité, au cours de l'exposé de ces questions, d'utiles remarques provenant des membres du Groupe d'études, en particulier MM. LALLEMENT, CRESTEY, ENGUEHARD, ce dont nous les remercions ici.

I. Premières propriétés des demi-groupes topologiques.

A. Demi-groupes topologiques en général.

1. *Définition*. - On appelle *demi-groupe topologique* le triple $(S\,,\,.\,,\,\mathcal{T})$ d'un ensemble *non vide* S, d'une loi de composition interne *associative* $.$ sur S (toujours notée ici multiplicativement) et d'une topologie *séparée* $\mathcal{T}$ sur S, tels que la loi de composition soit une application *continue* de $S \times S$ dans S.

Par exemple, on obtient un demi-groupe topologique (dit *discret*) en munissant un demi-groupe arbitraire de la topologie discrète. D'autre part un groupe topologique est en particulier un demi-groupe topologique. On prendra garde qu'un demi-groupe topologique, dont le demi-groupe sous-jacent est un groupe, n'est pas en général un groupe topologique (l'application $x \leadsto x^{-1}$ n'étant pas en général continue).

Le demi-groupe topologique $(S\,,\,.\,,\,\mathcal{T})$ est généralement noté S comme son support. On notera aussi $\mathcal{V}(a)$ le filtre des voisinages de $a \in S$ et $\bar{A}$ l'adhérence de $A \in \mathfrak{P}(S)$ (la fermeture topologique ayant toujours priorité sur les fermetures algébriques).

2. - De la continuité de la multiplication résultent les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.1. - $(\forall\, A\,,\, B \in \mathfrak{P}(S))\ \bar{A}\,\bar{B} \subseteq \overline{AB}$.

Si $x \in \bar{A}\,\bar{B}$, il existe $\alpha \in \bar{A}$ et $\beta \in \bar{B}$ tels que $x = \alpha\beta$; donc, pour tout $U \in \mathcal{V}(x)$, il existe $V \in \mathcal{V}(\alpha)$, $W \in \mathcal{V}(\beta)$ tels que $VW \subseteq U$, et, comme V rencontre A et que W rencontre B , VW , donc U , rencontre AB ; par suite $x \in \overline{AB}$.

PROPOSITION 1.2. - L'adhérence d'une partie stable est une partie stable.

Si A est une partie stable, $\bar{A}\,\bar{A} \subseteq \overline{AA} \subseteq \bar{A}$.

PROPOSITION 1.3. - L'adhérence d'un idéal (g) (resp. d , b) est un idéal (g) (resp. d , b).

Si A est un idéal (g) , $S\overline{A} = \overline{S}\,\overline{A} \subseteq \overline{SA} \subseteq \overline{A}$, et $\overline{A}$ est un idéal (g) . Dualement l'adhérence d'un idéal (d) est un idéal (d) . Par suite l'adhérence d'un idéal (b) est un idéal (b) .

3. Comme la topologie est séparée, on a, de plus, les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.4. - Soient $a_1 , \dots , a_n , b_1 , \dots , b_p \in S$. Pour que

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{j=1}^{p} b_j ,$$

il faut et il suffit que

$$(\forall\, V_i \in \mathcal{V}(a_i))\ (\forall\, W_j \in \mathcal{V}(b_j)) \qquad \prod_{i=1}^{n} V_i \ \text{rencontre}\ \prod_{j=1}^{p} W_j .$$

Remarquons que l'application $(x_1 , \dots , x_q) \rightsquigarrow \prod_{k=1}^{q} x_k$ de S^q dans S est continue, donc tout $U \in \mathcal{V}(\prod_{k=1}^{q} x_k)$ contient un ensemble $\prod_{k=1}^{q} U_k$, où $U_k \in \mathcal{V}(x_k)$. La condition étudiée entraîne donc que tout $V \in \mathcal{V}(\prod_{i=1}^{n} a_i)$ rencontre tout $W \in \mathcal{V}(\prod_{j=1}^{p} b_j)$ et est par suite suffisante. Elle est trivialement nécessaire.

La séparation entraîne d'autre part des propriétés de fermeture et de passage à l'adhérence.

PROPOSITION 1.5. - L'ensemble E des idempotents est fermé.

En effet l'ensemble E des $x \in S$, en lesquels les applications continues $x \rightsquigarrow x$ et $x \rightsquigarrow x^2$ de S dans S prennent la même valeur, est fermé.

PROPOSITION 1.6. - Si $e \in S$ neutralise à gauche (resp. à droite, des deux côtés) tout élément de $A \in \mathfrak{P}(S)$, il neutralise de même tout élément de $\overline{A}$.

En effet, l'ensemble des $x \in S$, en lesquels les applications continues $x \rightsquigarrow x$ et $x \rightsquigarrow ex$ de S dans S prennent la même valeur, est fermé ; s'il contient A , il contient $\overline{A}$. Dualement, on a la propriété dans le cas "à droite", donc aussi dans le cas "des deux côtés".

PROPOSITION 1.7. - Si $A , B \in \mathfrak{P}(S)$ commutent élément par élément, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ commutent élément par élément. (En particulier l'adhérence d'un sous-demi-groupe abélien est un sous-demi-groupe abélien.)

Si $x \in S$, l'ensemble c_x des $y \in S$ qui commutent avec x est fermé, car c'est l'ensemble des $y \in S$ en lesquels les applications continues $y \leadsto xy$ et $y \leadsto yx$ de S dans S prennent la même valeur. L'ensemble des éléments qui commutent avec tout élément de A est l'intersection des c_a pour $a \in A$ et est donc fermé ; s'il contient B , il contient $\overline{B}$. De même, l'ensemble des éléments qui commutent avec tout élément de $\overline{B}$ est fermé, et, contenant A , contient $\overline{A}$.

B. Demi-groupes compacts.

Un demi-groupe compact est un demi-groupe topologique tel que l'espace topologique sous-jacent soit compact. Un demi-groupe discret est compact si et seulement si il est fini ; la condition de compacité apparaît donc en première analyse comme une condition de finitude ; cet aspect se précisera dans la suite à l'aide de propriétés fournies au fur et à mesure par la topologie.

PROPOSITION 1.8. - Dans un demi-groupe compact, tout produit de parties fermées est fermé.

Si $A_1 , \ldots , A_n \in \mathfrak{P}(S)$ sont fermées, donc compactes, leur produit, image du compact $A_1 \times \ldots \times A_n$ par l'application continue $(a_1 , \ldots , a_n) \leadsto a_i$ de S^n dans S , est compact, donc fermé.

PROPOSITION 1.9. - Dans un demi-groupe compact, tout idéal (g) , (d) ou (b) engendré par une partie fermée, en particulier tout idéal principal, est fermé.

En effet, si $A \in \mathfrak{P}(S)$ est fermée, SA , AS , SAS sont fermées, puisque produits de parties fermées.

PROPOSITION 1.10. - Tout demi-groupe compact a un noyau, qui est fermé.

La famille des SxS , pour $x \in S$, est une base de filtre car $SxyS \subseteq SxS \cap SyS$, formée de parties fermées ; par suite $N = \bigcap_{x \in S} SxS \neq \emptyset$. N est un idéal (b) non vide fermé ; et, si A est un idéal (b) non vide, il existe $a \in A$ et

$$N \subseteq SaS \subseteq A \ ;$$

N est donc un noyau, donc le noyau du demi-groupe.

C. Sous-groupes d'un demi-groupe compact.

Leur existence sera établie ultérieurement (voir III), nous étudions ici leurs propriétés topologiques. Soit S un demi-groupe compact.

Si $e \in E$, on notera H_e le sous-groupe maximal contenant e ; et $H = \bigcup_{e \in E} H_e$;

si $x \in H$, x appartient à un sous-groupe maximal unique, on notera $\eta(x)$ son élément unité et $\theta(x)$ l'inverse de x dans ce sous-groupe.

1. THÉORÈME 1.11. - Dans un demi-groupe compact, H est fermé, η et θ sont continues.

Soit $x \in \overline{H}$; la famille des $V \cap H$, pour $V \in \mathcal{V}(x)$, est une base de filtre, donc aussi la famille des $\theta(V \cap H)$. Soit donc q une valeur d'adhérence de cette base de filtre (l'existence de q est assurée par la compacité).

On a les propriétés algébriques suivantes :

(a) $qx = xq$. Soient V , $V' \in \mathcal{V}(x)$, W , $W' \in \mathcal{V}(q)$; $W \cap W'$ rencontre $\theta(V \cap V' \cap H)$, donc il existe $h \in V \cap V' \cap H$ tel que $\theta(h) \in W \cap W'$; on a

$$\theta(h)h = \eta(h) = h\theta(h) \in WV \cap V'W' .$$

Par suite $qx = xq$ (prop. 1.4).

(b) $qxq = q$. Soient $V \in \mathcal{V}(x)$, W' , W'' , $W''' \in \mathcal{V}(q)$; $W = W' \cap W'' \cap W''' \in \mathcal{V}(q)$ donc rencontre $\theta(V \cap H)$ et il existe $h \in V \cap H$ tel que $\theta(h) \in W$; on a

$$\theta(h)h\,\theta(h) = \theta(h) \in WVW \cap W \subseteq W'VW'' \cap W''' .$$

Par suite $qxq = q$ (prop. 1.4).

(c) $xqx = x$. Soient V' , V'' , $V''' \in \mathcal{V}(x)$, $W \in \mathcal{V}(q)$; W rencontre $\theta(V \cap H)$, où $V = V' \cap V'' \cap V'''$, donc il existe $h \in V \cap H$ tel que $\theta(h) \in W$; on a

$$h\theta(h)h = h \in VWV \cap V \subseteq V'WV'' \cap V''' .$$

Par suite $xqx = x$ (prop. 1.4).

Il en résulte que $e = xq = qx \in E$, car $ee = xqxq = xq = e$. De plus,

$$ex = xqx = x , \quad xe = xqx = x , \quad eq = qxq = q , \quad qe = qxq = q .$$

Par suite $x \in H_e$, donc $x \in H$; et H est fermé.

D'autre part $q = \theta(x)$; et la base de filtre des $\theta(V \cap H)$, où $V \in \mathcal{V}(x)$, a donc une seule valeur d'adhérence $\theta(x)$. Le demi-groupe étant compact, cette base de filtre converge vers $\theta(x)$, et θ est donc une application continue de H dans H .

Enfin η , qui est telle que $\eta(x) = x\theta(x)$ pour tout $x \in H$, est aussi une application continue de H dans H .

2. Ce théorème a les corollaires suivants :

PROPOSITION 1.12. - Dans un demi-groupe compact, les sous-groupes maximaux sont fermés (donc compacts).

Si $e \in E$, $H_e = \eta^{-1}(e)$ est fermé dans H , puisque η est continue, donc fermé, puisque H est fermé.

PROPOSITION 1.13. - Dans un demi-groupe compact, l'adhérence d'un sous-groupe est un sous-groupe.

Soient K un sous-groupe, e son élément unité ; on a $K \subseteq H_e$. H_e étant fermé, $\overline{K} \subseteq H_e$; $\overline{K}$ est stable (prop. 1.2) ; enfin $\theta(K) = K$ entraîne, puisque θ est continue, $\theta(\overline{K}) = \overline{K}$; $\overline{K}$ est donc un sous-groupe de H_e .

PROPOSITION 1.14. - Un demi-groupe compact, dont le demi-groupe sous-jacent est compact, est un groupe topologique compact.

L'application $\theta : x \rightsquigarrow x^{-1}$ est alors continue.

PROPOSITION 1.15. - Les sous-groupes maximaux d'un demi-groupe compact sont des groupes topologiques compacts.

Ceci résulte des propositions 1.12 et 1.14.

D. Demi-groupes connexes.

L'hypothèse de connexité servira ici à préciser certains résultats. On se borne pour l'instant à deux énoncés.

PROPOSITION 1.16. - Dans un demi-groupe connexe, tout produit de parties connexes est connexe.

Si $A_1 , \dots , A_n$ sont connexes, leur produit $\prod_{i=1}^{n} A_i$, image du connexe $A_1 \dots A_n$ par l'application continue de S^n dans S $(x_1 , \dots , x_n) \rightsquigarrow \prod_{i=1}^{n} x_i$, est connexe.

PROPOSITION 1.17. - Si S est un demi-groupe connexe ayant un élément unité à gauche, tout idéal (b) de S est connexe.

Si A est un idéal (b) de S , Sx et xS sont connexes (prop. 1.16) pour tout $x \in A$; choisissant $a \in A$, Sx rencontre aS , donc $Sx \cup aS$ est connexe. Or, S ayant un élément unité à gauche, $x \in Sx$ pour tout $x \in A$, et A est réunion des connexes $Sx \cup aS$ tels que $x \in A$; ces derniers ayant une intersection non vide, A est connexe.

II. Quelques lemmes.

Avant de continuer l'étude des demi-groupes compacts, nous avons besoin de propriétés plus puissantes que les précédentes.

1. LEMME 2.1 (continuité d'inclusion). - Dans un demi-groupe compact, si $A_1 , \dots , A_n$ sont fermés et si U est un ouvert contenant $A_1 \dots A_n$, il existe des ouverts $U_1 , \dots , U_n$ contenant respectivement $A_1 , \dots , A_n$ et tels que U contienne $U_1 \dots U_n$.

La démonstration se fera par récurrence sur n . Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer, mais nous avons besoin du cas $n = 2$.

Soient donc A , B fermés et U ouvert tels que $AB \subseteq U$. Supposons d'abord $B = \{b\}$. La multiplication étant continue, il existe, pour tout $a \in A$, un ouvert $V(a) \in \mathcal{V}(a)$ et un ouvert $W(a) \in \mathcal{V}(b)$ tels que $V(a)\, W(a) \subseteq U$. Les $V(a)$ recouvrent A qui est fermé, donc compact, donc il existe une famille finie $(a_i)_{i\in I} \subseteq A$ telle que $A \subseteq V = \bigcup_{i\in I} V(a_i)$; alors $W = \bigcap_{i\in I} W(a_i)$ est un ouvert contenant b et tel que $VW \subseteq U$.

Si maintenant B est un fermé quelconque, il existe, pour tout $b \in B$, d'après l'énoncé qui vient d'être établi, un ouvert $V(b)$ contenant A et un ouvert $W(b)$ contenant b tels que $V(b)\, W(b) \subseteq U$. Les $W(b)$ recouvrent B qui est fermé, donc compact, donc il existe une famille finie $(b_i)_{i\in I} \subseteq B$ telle que $B \subseteq W = \bigcup_{i\in I} W(b_i)$ alors $V = \bigcap_{i\in I} V(b_i)$ est un ouvert contenant A et $VW \subseteq U$.

(Cette démonstration utilise deux fois l'axiome de choix.)

Admettons maintenant le lemme pour la valeur $n - 1 \geqslant 1$, et soient $A_1, \dots , A_{n-1}, A_n$ fermés et U ouvert contenant $A_1 \dots A_{n-1} A_n$. $A' = A_1 \dots A_{n-1}$ est fermé (prop. 1.8), donc, d'après le cas $n = 2$, il existe des ouverts U' , U_n contenant respectivement A' , A_n et tels que $U'U_n \subseteq U$; d'après l'hypothèse de récurrence, il existe des ouverts $U_1 , \dots , U_{n-1}$ contenant respectivement $A_1 , \dots , A_{n-1}$ et tels que $U_1 \dots U_{n-1} \subseteq U'$; alors $U_1 \dots U_{n-1} U_n \subseteq U'U_n \subseteq U$, et le lemme est vrai pour la valeur n .

2. - De ce lemme résulte immédiatement le lemme suivant :

LEMME 2.2 (séparation). - Dans un demi-groupe compact, des fermés $A_1 , \dots , A_n$, $B_1 , \dots , B_p$ sont tels que $A_1 \dots A_n \cap B_1 \dots B_p = \emptyset$ si et seulement si il existe des ouverts $U_1 , \dots , U_n$, $V_1 , \dots , V_p$ contenant respectivement $A_1 , \dots , A_n$, $B_1 , \dots , B_p$ tels que $U_1 \dots U_n \cap V_1 \dots V_p = \emptyset$.

Les produits $A_1 \ldots A_n$ et $B_1 \ldots B_p$ sont fermés (prop. 1.8) ; s'ils sont disjoints, il existe, puisqu'un espace compact est normal, deux ouverts disjoints les contenant, et la condition est nécessaire d'après le lemme précédent ; elle est évidemment suffisante.

Ce lemme peut aussi s'énoncer :

LEMME 2.3. - Dans un demi-groupe compact, des fermés $A_1 , \ldots , A_n$, $B_1 , \ldots , B_p$ sont tels que $A_1 \ldots A_n$ rencontre $B_1 \ldots B_p$ si et seulement si, quels que soient les ouverts $U_1 , \ldots , U_n$, $V_1 , \ldots , V_p$ contenant respectivement $A_1 , \ldots , A_n$, $B_1 , \ldots , B_p$, $U_1 \ldots U_n$ rencontre $V_1 \ldots V_p$.

3. - Ces lemmes peuvent être démontrés dans un demi-groupe topologique quelconque en prenant $A_1 , \ldots , A_n$ et éventuellement $B_1 , \ldots , B_p$ non seulement fermés mais <u>compacts</u>.

4. - Du lemme de séparation résultent des lemmes très utiles concernant des suites d'éléments. Dans ce paragraphe, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et (a_n) , (b_n) , (c_n) trois suites telles que $a_n = b_n c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; on note respectivement A , B , C leurs ensembles de valeurs d'adhérence (non vides dans un demi-groupe compact), qui sont fermés.

LEMMES 2.4, 2.5, 2.6. - Dans un demi-groupe compact :

(2.4) : $(\forall\ \alpha \in A)\ (\exists\ \beta \in B)\ (\exists\ \gamma \in C) \qquad \alpha = \beta\gamma$

(2.5) : $(\forall\ \beta \in B)\ (\exists\ \alpha \in A)\ (\exists\ \gamma \in C) \qquad \alpha = \beta\gamma$

(2.6) : $(\forall\ \gamma \in C)\ (\exists\ \alpha \in A)\ (\exists\ \beta \in B) \qquad \alpha = \beta\gamma$.

Remarquons d'abord que :

LEMME 2.7. - Dans un espace topologique compact, si un ouvert U contient toutes les valeurs d'adhérence d'une suite (x_n) , il contient tous les termes de la suite (x_n) à partir d'un certain rang.

Dans le cas contraire, il existerait une sous-suite contenue dans $\complement U$; et il existerait une valeur d'adhérence de cette sous-suite, appartenant à $\complement U$ qui est fermé ; donc il existerait une valeur d'adhérence de la suite n'appartenant pas à U .

Soient alors $\alpha \in A$, et des ouverts U , V , W contenant respectivement α , B , C ; il existe p , q tels que $b_n \in V$ dès que $n \geqslant p$, et $c_n \in W$ dès que $n \geqslant q$; et il existe $n \geqslant \sup(p , q)$ tel que $a_n \in U$, puisque α est valeur d'adhérence de (a_n) ; alors $a_n = b_n c_n \in U \cap VW$. Par suite $\alpha \in BC$ (lemme 2.3), ce qui établit l'énoncé (2.4).

De même, soient $\beta \in B$, et des ouverts U, V, W contenant respectivement A, β, C ; il existe p, q tels que $a_n \in U$ dès que $n \geqslant p$, et $c_n \in C$ dès que $n \geqslant q$, et il existe $n \geqslant \sup(p, q)$ tel que $b_n \in V$; alors $a_n = b_n c_n \in U \cap VW$. Par suite A rencontre βC (lemme 2.3), ce qui établit l'énoncé (2.5). L'énoncé (2.6) est dual.

On a les corollaires suivants :

LEMMES 2.8, 2.9, 2.10. - Dans un demi-groupe compact :

(2.8) : si (a_n) converge vers α, $(\forall\ \beta \in B)\ (\exists\ \gamma \in C)\quad \alpha = \beta\gamma$;
(2.9) : si (b_n) converge vers β, $(\forall\ \alpha \in A)\ (\exists\ \gamma \in C)\quad \alpha = \beta\gamma$,
(2.10) : si (b_n) converge vers β, $(\forall\ \gamma \in C)\ (\exists\ \alpha \in A)\quad \alpha = \beta\gamma$.

Une limite étant unique valeur d'adhérence, (2.8) résulte de (2.5), (2.9) de (2.4), et (2.10) de (2.6). Nous n'énonçons pas les corollaires duaux des précédents. Tous ces corollaires s'appliquent en général quand l'une des trois suites est non seulement convergente mais constante.

5. - Nous avons énoncé ces lemmes avec des suites comme dans le cas classique, mais ils s'énoncent de la même façon avec trois applications a_λ, b_λ, c_λ d'un ensemble Λ dans S liées par $a_\lambda = b_\lambda c_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, en prenant les valeurs d'adhérence suivant un filtre de Λ.

On peut d'autre part les démontrer dans un demi-groupe topologique quelconque en supposant alors que les suites (a_n), (b_n), (c_n), ou les familles (a_λ), (b_λ), (c_λ), sont contenues dans des sous-ensembles compacts.

III. Demi-groupes compacts monothétiques.

A. Propriétés des demi-groupes compacts monothétiques.

Définition. - On appelle demi-groupe monothétique, tout demi-groupe topologique S contenant un sous-demi-groupe monogène C partout dense.

Le théorème suivant, qui précise la structure des demi-groupes compacts monothétiques, peut être considéré comme une extension du théorème de Rees pour les demi-groupes cycliques finis.

S étant un demi-groupe compact monothétique, on note : x un générateur du sous-demi-groupe cyclique partout dense C ; C_n l'ensemble $\{x^{n+1}, x^{n+2}, \dots\}$; $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{C}_n$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$, non vide puisque S est compact.

THÉORÈME 3.1. - K est un groupe abélien, c'est le seul sous-groupe maximal de S et c'est aussi le noyau de S. De plus $S = K \cup (C - K)$, et $C - K$ est un ouvert discret de S.

La démonstration se fera en plusieurs points. Remarquons tout de suite que K est fermé, et que S est abélien (prop. 1.7). D'autre part, si C est fini, $S = C$, et le théorème résulte du théorème de Rees ; on suppose donc dans la suite C infini.

(a) Montrons que K est un groupe. Tout d'abord K est stable ; soient $a, b \in K$, $V \in \mathcal{V}(a)$, $W \in \mathcal{V}(b)$, et U un ouvert contenant K. Il existe $n \in \underset{\sim}{N}$ tel que $C_n \subseteq U$ (lemme 2.7) ; comme il existe $p, q > n$ tels que $x^p \in V$, $x^q \in W$, il existe $r > n$ (à savoir $p + q$) tel que $x^r \in VW$; donc VW rencontre U. Par suite, $ab \in K$ (lemme 2.3) ; et K est un sous-demi-groupe.

Soient alors $a, b \in K$, U, V, W, n comme ci-dessus $(C_n \subseteq U)$. Il existe $p \in \underset{\sim}{N}$ tel que $x^p \in W$, et $q > n + p$ tel que $x^q \in V$; alors $r = q - p > n$, et par suite $x^q = x^r x^p \in V \cap UW$. Donc $a \in Kb$ (lemme 2.3) ; et le sous-demi-groupe K admet des quotients à gauche ; comme il est abélien, c'est un groupe.

(b) On a $S = K \cup C$; en effet, si $a \in S - K$, il existe $n \in \underset{\sim}{N}$ tel que $a \notin \overline{C}_n$; mais $(C - C_n) \cup \overline{C}_n$ est un fermé contenant C, donc égal à S, et $a \in C$.

(c) K est donc un idéal ; soient en effet $a \in K$ et $y \in S$; si $y \in K$, $ay \in K$; si $y \notin K$, $y \in C$ et, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$,

$$ay \in \overline{C}_n \, C \subseteq \overline{C}_n \, \overline{C} \subseteq \overline{C_n \, C} = \overline{C_{n+1}} \subseteq \overline{C}_n ,$$

donc $ay \in K$. K, étant un sous-groupe et un idéal, est un noyau (si A est un idéal non vide, A rencontre K puisque K est un idéal, et $K \subseteq A$ puisque K est un groupe). K est donc le noyau de S.

(d) K est de même un sous-groupe maximal de S, car, si G est un sous-groupe contenant K, il a même élément unité e et, K étant un idéal, $G = eG \subseteq K$. K est d'ailleurs le seul sous-groupe maximal de S, car si S contient un idempotent non situé dans K, C contient un idempotent, et est donc fini d'après le théorème de Rees, alors que nous le supposons maintenant infini.

(e) Enfin $C - K = S - K$ est ouvert puisque K est fermé ; pour prouver que la topologie induite par S sur $C - K$ est discrète, il suffit de montrer que $\overline{A} \cap (C - K) = A$ pour toute $A \in \mathfrak{P}(C - K)$. Si $a \in \overline{A} \cap (C - K)$, il existe $n \in \underset{\sim}{N}$ tel que $a \notin \overline{C}_n$; or $\overline{A} = (A \cap (C - C_n)) \cup (\overline{A} \cap \overline{C}_n)$; en effet le membre de droite est contenu dans $\overline{A}$, mais c'est un fermé contenant A ; de $a \in \overline{A} - \overline{C}_n$ résulte alors $a \in A$, ce qui achève la démonstration.

B. Application aux demi-groupes compacts quelconques.

1. - Soit maintenant S un demi-groupe compact quelconque. On appliquera le théorème précédent en considérant, pour tout $x \in S$, le demi-groupe cyclique $C(x)$ engendré par x, et sa fermeture $\Gamma(x)$ qui est un sous-demi-groupe (prop. 1.2) évidemment compact et monothétique. (On peut aussi appliquer ce théorème en considérant seulement, dans un demi-groupe topologique quelconque, les x tels que $\Gamma(x)$ soit compact.) Il vient aussitôt :

PROPOSITION 3.2. - Dans un demi-groupe compact, il existe des idempotents (donc des sous-groupes maximaux).

Il suffit de considérer le noyau de $\Gamma(x)$, que l'on note $K(x)$, et qui est un groupe.

Rappelons qu'un bi-idéal de S est une partie A de S stable et telle que $ASA \subseteq A$ (exemples : idéaux (g), (d), (b)).

PROPOSITION 3.3. - Dans un demi-groupe compact, si A est un idéal (g), (d), (b), ou un bi-idéal, et si $x \in A$, alors $\Gamma(x) \subseteq A$.

Il suffit de le montrer si A est un bi-idéal. Soit e l'élément unité de $K(x)$; $K(x)$ rencontre A, car $xex \in K(x) \cap A$; comme $K(x)$ est un groupe, $K(x) \subseteq A$ (si $y \in K(x) \cap A$, $K(x) = yK(x)y \subseteq A$). Or A est stable, donc $C(x) \subseteq A$, et $\Gamma(x) \subseteq A$.

2. - Il sera aussi intéressant de savoir que $\Gamma(x)$ est un groupe.

PROPOSITION 3.4. - Si l'idempotent e de $\Gamma(x)$ est neutre à gauche ou à droite pour $\Gamma(x)$, $\Gamma(x)$ est un groupe.

Alors $\Gamma(x) = e\,\Gamma(x)$ (ou $\Gamma(x)\,e$) $\subseteq K(x)$, donc $\Gamma(x) = K(x)$ est un groupe.

3. - On a d'autre part les lemmes suivants :

LEMME 3.5. - Dans un demi-groupe compact S, si $a, x, y \in S$ sont tels que $ax = ay$, l'idempotent e de $\Gamma(a)$ est tel que $ex = ey$.

En effet, l'ensemble des $u \in S$ en lesquels les deux applications continues $u \rightsquigarrow ux$ et $u \rightsquigarrow uy$ de S dans S prennent la même valeur, est fermé ; contenant a, il contient évidemment toute puissance de a, donc $\Gamma(a)$, et e (c'est-à-dire que $ex = ey$).

LEMME 3.6. - Dans un demi-groupe compact S , soient $a , x \in S$, g l'idempotent de $\Gamma(a)$, e l'idempotent de $\Gamma(x)$; si $a = xa$, on a $a = ea$, et, si $x \in E$, $g = xg$.

On a alors $a = x^n a$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$; e étant valeur d'adhérence de la suite $(x^n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$, $a = ea$ résulte du lemme 2.8.

D'autre part $a \in xS$, donc (prop. 3.3), $g \in xS$; si $x \in E$, ceci entraîne $g = xg$.

LEMME 3.7. - Dans un demi-groupe compact S , si $a , x , y \in S$ sont tels que $a = xay$, on a $a = eau$, où $e \in E \cap \Gamma(x)$, $u \in K(y)$.

On a alors, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $a = x^n ay^n$; e étant valeur d'adhérence de la suite (x^n) , il existe (lemme 2.8), une valeur d'adhérence β de la suite (ay^n) telle que $a = e\beta$; il existe aussi (lemme 2.9), une valeur d'adhérence u de la suite (y^n) telle que $\beta = au$; on a donc $a = eau$, avec $u \in K(y)$.

Nous n'énonçons pas les trois lemmes duaux.

PROPOSITION 3.8. - Dans un demi-groupe compact S , si $x \in S$ et $A \in \mathfrak{P}(S)$ fermée sont tels que $xA \subseteq A$, on a, pour tout $k \in K(x)$:

$$kA = \bigcap_{n \in \underset{\sim}{N}} x^n A .$$

On a alors, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $x^n A \subseteq A$; il en résulte que $kA \subseteq x^n A$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$. Soient en effet $a \in A$ et des ouverts U , U_1 , V , W contenant respectivement A , a , k , x^n ; il existe $p > n$ tel que $x^p \in V$; et $x^p a = x^n x^{p-n} a \in x^n A$, donc $x^p a \in VU_1 \cap WU$; par suite $ka \in x^n A$ (lemme 2.3).

D'autre part, $\bigcap_{n \in \underset{\sim}{N}} x^n A \subseteq kA$; soient en effet $z \in \bigcap_{n \in \underset{\sim}{N}} x^n A$, et des ouverts U , V , W contenant respectivement A , z , k ; il existe $n \in \underset{\sim}{N}$ tel que $x^n \in W$, et $a \in A$ tel que $z = x^n a \in V \cap WU$; par suite $z \in kA$ (lemme 2.3).

IV. Demi-groupes simples compacts.

A. Idéaux minimaux d'un demi-groupe compact.

Soit S un demi-groupe compact.

THÉORÈME 4.1. - Dans un demi-groupe compact, tout idéal (g) non vide contient un idéal (g) minimal, et tout idéal (g) minimal est fermé.

Nous n'énonçons pas le théorème dual ; d'autre part le cas bilatère est trivial (prop. 1.10). Soit donc A un idéal (g) non vide.

L'ensemble des idéaux (g) non vides fermés contenus dans A est non vide, puisque tout idéal (g) principal est fermé (prop. 1.9). Il existe donc, d'après le lemme de Zorn, une chaîne maximale $\mathcal{C}$ d'idéaux (g) fermés non vides contenus dans A . $\mathcal{C}$ est stable pour l'intersection puisque c'est une chaîne ; c'est donc une base de filtre, et, S étant compact, l'intersection M des idéaux de $\mathcal{C}$ est non vide. M est un idéal (g) fermé non vide contenu dans A .

M est un idéal minimal, car si M contenait strictement un idéal (g) non vide, il contiendrait strictement un idéal (g) principal, donc fermé et non vide, I , et $\mathcal{C} \cup \{I\}$ serait une chaîne d'idéaux (g) fermés non vides contenus dans A , contenant strictement $\mathcal{C}$, ce qui est impossible. A contient donc un idéal (g) minimal.

Si A est lui-même minimal, A contient d'après ce qui précède un idéal (g) minimal fermé M , donc $A = M$, et A est fermé.

Ce théorème ne s'étend pas au cas des idéaux 0-minimaux d'un demi-groupe compact ayant un zéro. En effet le demi-groupe compact multiplicatif des nombres réels du segment $[0 , 1]$ n'a pas d'idéaux (g) 0-minimaux (ses idéaux étant les $[0 , h]$ pour $h \in [0 , 1]$).

Du théorème 4.1 et de son dual résulte immédiatement :

PROPOSITION 4.2. - Un demi-groupe simple compact est complètement simple.

La structure algébrique d'un demi-groupe simple compact est donc complètement connue ; nous allons voir qu'il en est de même de sa structure topologique.

B. Structure des demi-groupes simples compacts.

1. - Il est d'abord utile de rappeler quelques résultats algébriques sur les demi-groupes complètement simples.

Un demi-groupe complètement simple D est un demi-groupe simple admettant des idéaux (g) et (d) minimaux. Les idéaux (g) minimaux forment alors une partition de D et de même les idéaux (d) minimaux. De plus, tout idéal (g) minimal rencontre tout idéal (d) minimal. On note $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{R}$) l'ensemble des idéaux (g) (resp. (d)) minimaux. On sait que si $L \in \mathcal{L}$, et si $e \in E \cap L$, $x = xe$ pour tout $x \in L$; de même, si $R \in \mathcal{R}$, et si $e \in E \cap R$, $x = ex$ pour tout $x \in R$.

Si $L \in \mathcal{L}$, $R \in \mathcal{R}$, $R \cap L$ est un groupe ; on note e_{RL} son élément unité. Les groupes $R \cap L$ sont tous isomorphes (l'application $a \rightsquigarrow e_{R'L}\, a\, e_{RL'}$ de $R \cap L$ vers $R' \cap L'$ est l'isomorphisme cherché de $R \cap L$ sur $R' \cap L'$, l'isomorphisme inverse étant $a' \rightsquigarrow e_{RL'}\, a'\, e_{R'L}$).

Enfin, si on choisit $R_0 \in \mathcal{R}$, $L_0 \in \mathcal{L}$, on obtient une bijection φ de D vers $(R_0 \cap L_0) \times \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ en posant $\varphi(x) = (exe)_{RL}$ si $x \in R \cap L$ et si $e = e_{R_0L_0}$; si $exe = t \in R_0 \cap L_0$, on a d'ailleurs $x = e_{RL_0}\, t\, e_{R_0L}$. Si $\varphi(x) = (t)_{RL}$, $\varphi(x') = (t')_{R'L'}$, on a enfin $\varphi(xx') = (tp_{LR'}\, t')_{RL'}$, où $p_{LR'} = e_{R_0L}\, e_{R'L_0}$.

Réciproquement, si G est un groupe, I , Λ deux ensembles et p une application de $\Lambda \times I$ dans G , on obtient un demi-groupe complètement simple en munissant $G \times I \times \Lambda$ de la multiplication définie par $(t)_{i\lambda}\ (t')_{i'\lambda'} = (tp_{\lambda i'}\, t')_{i\lambda'}$; ce demi-groupe est noté $\mathfrak{M}(G\ ;\ I\ ,\ \Lambda\ ;\ p)$. On a ainsi exhibé un isomorphisme du demi-groupe complètement simple étudié sur un demi-groupe $\mathfrak{M}(G\ ;\ I\ ,\ \Lambda\ ;\ p)$ avec $G = R_0 \cap L_0$, $I = \mathcal{R}$, $\Lambda = \mathcal{L}$, p définie comme ci-dessus. Ceci est le théorème de Rees.

2. - Le théorème de structure pour les demi-groupes simples compacts s'énonce alors comme suit :

THÉORÈME 4.3. - Un demi-groupe simple compact est isomorphe algébriquement et topologiquement à un demi-groupe $\mathfrak{M}(G\ ;\ I\ ,\ \Lambda\ ;\ p)$, où G est un groupe topologique compact, I , Λ deux espaces topologiques compacts et p une application continue de $\Lambda \times I$ dans G , la topologie étant la topologie produit.

La partie algébrique résulte du théorème de Rees et de la proposition 4.2. Pour la partie topologique, la réciproque est triviale, car la topologie produit fait de $G \times I \times \Lambda$ un espace compact, et l'application

$$(t\ ,\ i\ ,\ \lambda\ ,\ t'\ ,\ i'\ ,\ \lambda') \rightsquigarrow (tp_{\lambda i'}\, t'\ ,\ i\ ,\ \lambda')$$

est une application continue de $G \times I \times \Lambda \times G \times I \times \Lambda$ dans $G \times I \times \Lambda$; pour la partie directe, on procèdera en plusieurs étapes, en se donnant un demi-groupe simple compact S et en gardant à part cela les notations ci-dessus. On sait déjà que $R_0 \cap L_0$ est un groupe topologique compact (prop. 1.15).

3. - On va d'abord munir $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ de topologies.

LEMME 4.4. - Les parties $\mathcal{U}$ de $\mathcal{L}$ telles que $\hat{\mathcal{U}} = \cup\ (L\ ;\ L \in \mathcal{U})$ soit ouvert, sont les ouverts d'une topologie d'espace compact.

Appelant provisoirement ouverts de telles parties $\mathcal{U}$, on vérifie en effet que la réunion d'une famille $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ d'ouverts est un ouvert (en effet $\widehat{\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i} = \bigcup_{i\in I} \hat{\mathcal{U}}_i$) que $\emptyset$ est ouvert (en effet $\hat{\emptyset} = \emptyset$) ; que l'intersection de deux ouverts $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ est un ouvert (en effet $\widehat{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2} = \hat{\mathcal{U}}_1 \cap \hat{\mathcal{U}}_2$ puisque $\mathfrak{L}$ est une partition de S).

Les autres propriétés de la topologie résultent des lemmes suivants.

LEMME 4.5. - Dans un demi-groupe compact S, si U est ouvert, le plus grand idéal (g), (d) ou (b) $J(U)$ contenu dans U, est ouvert.

Dans le cas (g), soit $a \in J(U)$; alors $a \cup Sa \subseteq J(U) \subseteq U$ et, d'après le lemme 2.1, il existe un ouvert V contenant a tel que $SV \subseteq U$; alors $W = U \cap V$ est un ouvert contenant a et tel que $W \cup SW \subseteq U$, donc contenu dans $J(U)$; et $J(U)$ est ouvert. On procède similairement dans les cas (d) et (b).

Il en résulte que la topologie de $\mathfrak{L}$ est séparée. Soient en effet $L, L' \in \mathfrak{L}$; L, L' sont fermés (théorème 4.1) et disjoints ; S étant compact, donc normal, il existe des ouverts disjoints U, U' contenant respectivement L, L' ; si J (resp. J') est le plus grand idéal (g) contenu dans U (resp. U'), J et J' sont réunion d'idéaux minimaux, donc il existe $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \mathfrak{P}(\mathfrak{L})$ tels que $\hat{\mathcal{U}} = J$, $\hat{\mathcal{U}}' = J'$; $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont ouverts puisque J et J' le sont, disjoints comme J et J' et contiennent respectivement L et L'.

LEMME 4.6. - L'application qui, à $x \in S$, fait correspondre l'unique $L \in \mathfrak{L}$ le contenant, est continue.

En effet, l'image réciproque de l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathfrak{L}$ est l'ouvert $\hat{\mathcal{U}}$ de S.

S étant compact, il en résulte que $\mathfrak{L}$ est compact.

$\mathfrak{R}$ est dualement muni d'une topologie d'espace compact, et on a le lemme dual du lemme 4.6.

4. - Il reste alors à étudier les applications φ et p.

LEMME 4.7. - φ est un homéomorphisme.

L'application $x \rightsquigarrow exe$ de S dans $R_0 \cap L_0$ est continue. Les applications qui, à $x \in S$ font correspondre l'unique $R \in \mathfrak{R}$ et l'unique $L \in \mathfrak{L}$ tels que $x \in R \cap L$, sont continues (lemme 4.6 et son dual). φ est donc continue ; comme φ est bijective et S compact, φ est bicontinue.

LEMME 4.8. - p est continue.

L'application qui, à $e \in E$, fait correspondre l'unique $(R, L) \in \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ tel que $e \in R \cap L$, est continue comme ci-dessus. Comme E est fermé (prop. 1.5) donc compact, et que cette application est continue, l'application inverse $(R, L) \rightsquigarrow e_{RL}$ est continue. Par suite l'application p, définie par $p_{LR'} = e_{R_0L}\, e_{R'L_0}$ est continue.

Ceci achève la démonstration.

5. - On notera que l'on a pris pour G un sous-groupe $R_0 \cap L_0$ arbitraire. Ceci est sans importance car on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.9. - Les sous-groupes maximaux d'un demi-groupe simple compact sont isomorphes algébriquement et topologiquement.

En effet les isomorphismes algébriques explicités ci-dessus sont continus, ainsi que leurs inverses puisque les sous-groupes maximaux sont fermés (prop. 1.12) donc compacts.

C. Applications.

Les deux énoncés qui suivent résultent de ce que le noyau d'un demi-groupe compact est un demi-groupe compact (prop. 1.10) et simple, donc complètement simple.

PROPOSITION 4.10. - Tout demi-groupe compact unipotent est un homogroupe.

Son noyau est en effet un demi-groupe complètement simple unipotent, donc un groupe.

PROPOSITION 4.11. - Tout demi-groupe compact abélien est un homogroupe.

Son noyau est en effet un demi-groupe complètement simple abélien, donc un groupe.

On a déjà vu qu'un demi-groupe compact monothétique est un homogroupe.

V. Idéaux maximaux d'un demi-groupe compact.

Soit S un demi-groupe compact. Nous noterons, si $A \in \mathfrak{P}(S)$, $J_b(A)$ (resp. $J_g(A)$, $J_d(A)$) le plus grand idéal (b) (resp. (g), (d)) contenu dans A (et éventuellement vide). De plus l'adjectif "bilatère" sera fréquemment sous-entendu pour les idéaux.

A. Existence et propriétés des idéaux maximaux.

1. THÉORÈME 5.1. - Si $c \in \{g, d, b\}$, tout idéal (c) propre de S est contenu dans un idéal (c) maximal ; tout idéal (c) maximal est ouvert.

Si A est un idéal (c) propre, et si $x \in S - A$, $J_c(S - x)$ est un idéal (c) propre contenant A , et ouvert (lemme 4.5). (Si en particulier A est maximal, $A = J_c(S - x)$ est ouvert.)

Il en résulte, d'après le lemme de Zorn, qu'il existe une chaîne maximale $\mathcal{C}$ d'idéaux (c) propres ouverts contenant A . Soit $M = \bigcup (I \,;\, I \in \mathcal{C})$. M est un idéal (c) ouvert contenant A . M est propre car il est non vide comme A , et différent de S car sinon S , recouvert par les éléments de $\mathcal{C}$ qui sont ouverts, serait par compacité égal à une réunion finie d'éléments de $\mathcal{C}$, donc appartiendrait à $\mathcal{C}$ qui est une chaîne, ce qui est absurde. Si enfin M n'était pas maximal, il existerait un idéal (c) propre, donc un idéal (c) propre ouvert B , tel que $M \subset B$, et $\mathcal{C} \cup \{B\}$ serait une chaîne d'idéaux (c) propres ouverts contenant A ; comme $\mathcal{C}$ est maximale, M est maximal.

2. - Si de plus S est connexe, on peut ajouter que

PROPOSITION 5.2. - Si S est connexe, tout idéal (c) maximal est partout dense ($c \in \{g , d , b\}$) .

Si J est un idéal (c) maximal, $\overline{J}$ est un idéal (c) (prop. 1.3) ; $\overline{J} = J$ est impossible car S est connexe et J propre et ouvert ; donc $\overline{J} = S$.

D'autre part :

PROPOSITION 5.3. - Si un idéal maximal J contient E , il contient S^2 .

Soit $A = S - J$. On a tout d'abord $SAS \subseteq J$. Sinon il existe $a \in A$ tel que $SaS \nsubseteq J$; $J \cup SaS$ est alors un idéal contenant strictement J , donc égal à S , de sorte que $a \in SaS$, et il existe $x , y \in S$ tels que $a = xay$; il existe alors $e \in E$ et $u \in S$ tels que $a = eau$ (lemme 3.7) ; et comme $E \subseteq J$, $a \in J$, ce qui est absurde.

Puisque $SAS \subseteq J$, $S^3 = S(A \cup J)S \subseteq J$. Alors, si $S^2 \nsubseteq J$, $J \cup S^2$ est un idéal contenant strictement J , donc égal à S , et $S^2 = S(J \cup S^2) \subseteq J$, contrairement à l'hypothèse. Donc $S^2 \subseteq J$.

B. Applications.

1. - Il résulte des propriétés précédentes que :

PROPOSITION 5.4. - Si $S = S^2$, $SES = S$.

Si $SES \subset S$, il existe (théorème 5.1) un idéal maximal J contenant SES , donc E ; J contient donc (prop. 5.3) $S^2 = S$, ce qui est absurde.

PROPOSITION 5.5. - Si $S = S^2$ et si S est unipotent, S est un groupe.

Soient e l'unique idempotent de S, et K son noyau (prop. 1.10) ; K contient un idempotent (prop. 3.2), donc contient e. K est unipotent, et complètement simple (prop. 4.2), donc c'est un groupe. Mais $SeS = S$ (prop. 5.4) et $e \in K$ entraînent $S = K$.

2. - On peut étendre ces résultats à l'aide du lemme suivant :

LEMME 5.6. - Soit $R = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S^n$; R est un idéal fermé, non vide, et $R = R^2$.

$(S^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne décroissante de fermés (prop. 1.8), donc une base de filtre, et R est non vide, et évidemment compact ; c'est un idéal comme tous les S^n. Si d'autre part on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \in S^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, R contient toute valeur d'adhérence x de la suite, car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in \overline{\{x_n , x_{n+1} , \dots \}} \subseteq S^n$.

Soit alors $x \in R$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe, puisque $x \in S^{2n}$, y_n, $z_n \in S^n$ tels que $x = y_n z_n$; il existe donc une valeur d'adhérence y de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une valeur d'adhérence z de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telles que $x = yz$ (lemme 2.4) ; comme y, $z \in R$, $x \in R^2$; et $R \subseteq R^2$. Comme R est un idéal, $R = R^2$.

THÉORÈME 5.7. - On a $SES = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S^n$.

En effet $E \subseteq R$; donc $SES \subseteq R$. Mais, R étant un demi-groupe compact tel que $R = R^2$, on a $R = RER \subseteq SES$ (prop. 5.4).

PROPOSITION 5.8. - Si K est le noyau de S et si $E \subseteq K$, $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S^n$; si de plus $S = S^2$, S est complètement simple.

On a en effet $R = SES \subseteq K \subseteq R$. Et, si de plus $S = S^2$, $R = S$ et $S = K$ est complètement simple (prop. 4.2).

On retrouve de plus la proposition 5.5, qui s'étend ainsi :

PROPOSITION 5.9. - Si S est unipotent, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S^n$ est le noyau de S, et c'est un groupe.

En effet, K contient E, et c'est un groupe comme à la proposition 5.5. On retrouve aussi la proposition 4.10.

Enfin :

PROPOSITION 5.10. - Si S a un zéro et pas d'autre idempotent, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S^n = \{0\}$.

En effet, (théorème 5.7), $R = SES = \{0\}$.

C. Etude de P et Q .

Il est intéressant d'avoir des conditions sous lesquelles S a un seul idéal maximal. On en obtiendra par l'étude des parties P et Q (éventuellement vides) définies par

$$P = \{a \in S \ ; \ aS = S\} \ , \qquad Q = \{a \in S \ ; \ Sa = S\} \ .$$

1. PROPOSITION 5.11. - P est un sous-demi-groupe compact de S .

Si $a , b \in P$, $abS = aS = S$ et $ab \in P$. Montrons que P est fermé ; c'est évident si $P = S$; si $S - P$ est non vide, montrons qu'il est ouvert. Si $x \in S - P$, il existe $y \in S$ tel que $xS \subseteq S - y$; comme $S - y$ est ouvert, il existe (lemme 2.1) un ouvert U contenant x et tel que $US \subseteq S - y$; il est clair que $U \subseteq S - P$.

PROPOSITION 5.12. - Un idempotent appartient à P si et seulement si il est élément unité à gauche.

Tout élément unité à gauche appartient à P ; réciproquement, si $e \in E \cap P$, il existe, pour tout $x \in S$, un $y \in S$ tel que $x = ey$, et $ex = eey = ey = x$, donc e est élément unité à gauche.

PROPOSITION 5.13. - Tout élément de P est simplifiable à gauche.

Soient $a \in P$, $x , y \in S$ tels que $ax = ay$. Si e est l'idempotent de $\Gamma(a)$, on a $ex = ey$ (lemme 3.5). Mais $\Gamma(a) \subseteq P$ (prop. 5.11), donc e est élément unité à gauche (prop. 5.12), et $x = y$.

PROPOSITION 5.14. - P est consistant $(xy \in P \implies x \in P$ et $y \in P)$.

Si $xy \in P$, $S = xyS \subseteq xS \subseteq S$, donc $x \in P$. D'autre part, pour tout $s \in S$, il existe $z \in S$ tel que $xyz = xs$; donc tel que $yz = s$ (prop. 5.13), et par suite $y \in P$.

PROPOSITION 5.15. - On a $P = \bigcup (H_e \ ; \ e \in E \cap P)$.

Si $e \in E \cap P$, et si $x \in H_e$, on a $x\theta(x) = e \in P$, donc $x \in P$ (prop. 5.14) ; et $H_e \subseteq P$.

Réciproquement, si $a \in P$, il existe $e , a' \in S$ tels que $ae = a$, $aa' = e$. Alors, pour tout $x \in S$, $aex = ax$, donc $ex = x$ (prop. 5.13), et $e \in E \cap P$ (prop. 5.12) ; et $aa'a = ea = a = ae$, d'où $a'a = e$ (prop. 5.13) ; enfin $aa'e = e = aa'$, d'où $a'e = a'$. On a donc $ae = ea = a$, $a'e = ea' = a'$, $aa' = a'a = e$, et $a \in H_e$, avec $e \in E \cap P$.

2. - On peut alors classer les demi-groupes compacts suivant la vacuité de P ou Q .

PROPOSITION 5.16. - P est non vide si et seulement si il existe un élément unité à gauche.

La condition est suffisante (prop. 5.12). Et, si P n'est pas vide, il contient un idempotent (prop. 5.11 et 3.2), donc S a un élément unité à gauche (prop. 5.12).

Par suite : $P = Q = \emptyset$ quand il n'y a pas d'élément unité à droite ou à gauche ; $P \neq \emptyset$ et $Q = \emptyset$ quand il y a un élément unité à gauche et non à droite ; $P = \emptyset$ et $Q \neq \emptyset$ quand il y a un élément unité à droite et non à gauche ; et, pour le dernier cas,

PROPOSITION 5.17. - P et Q sont non vides si et seulement si S a un élément unité e , et alors $P = Q = H_e$.

La dernière assertion résulte de la proposition 5.15 et de sa duale.

3. - On a alors la condition suffisante suivante pour l'existence d'un idéal maximal unique :

PROPOSITION 5.18. - Si S a un élément unité à gauche e , si $S \neq P$, $S - P$ est l'unique idéal maximal de S ; si $S = P$, S est complètement simple.

Soit A un idéal propre de S ; s'il existe $a \in A \cap P$, $S = aS \subseteq A$, ce qui est absurde ; tout idéal propre est donc contenu dans $S - P$. Or $S - P$ est un idéal, d'après la proposition 5.14 ; si $P \subset S$, c'est un idéal propre, unique idéal maximal d'après ce qui précède ; si $P = S$, il n'y a pas d'idéal propre et S est simple, donc complètement simple (prop. 4.2).

PROPOSITION 5.19. - Si de plus S est connexe, $S - P$ est un ouvert partout dense connexe.

Ceci résulte des propositions 5.2 et 1.17.

4. - Enfin les propriétés de P ont des conséquences générales pour les demi-groupes compacts. Notons K le noyau de S .

PROPOSITION 5.20. - Si P rencontre K , S est complètement simple.

Si $a \in P \cap K$, $S = aS \subseteq K$, et $S = K$ est simple, donc complètement simple (prop. 4.2).

PROPOSITION 5.21. - Les conditions suivantes sont suffisantes pour que S soit complètement simple :

(a) S vérifie la règle de simplification à gauche,

(b) tout idempotent de S est simplifiable à gauche,

(c) tout idempotent de S est élément unité à gauche.

On a (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) . Comme K contient un idempotent (prop. 3.2), si S vérifie (c) , il est complètement simple (prop. 5.20).

PROPOSITION 5.22. - Si S a un seul idempotent e , et si e est élément unité à gauche, ou simplifiable à gauche, ou si S vérifie la règle de simplification à gauche, S est un groupe.

En effet, S est complètement simple (prop. 5.21) et unipotent.

VI. Quotient par un idéal maximal.

Soit S un demi-groupe compact.

A. Classification des idéaux maximaux.

1. - Si $a \in S - S^2$, $S - a$ est un idéal car $S(S - a) \subseteq S^2 \subseteq S - a$, $(S - a)S \subseteq S^2 \subseteq S - a$, évidemment maximal. Un idéal maximal de ce type sera dit *trivial*.

Par exemple :

PROPOSITION 6.1. - Si $E \subseteq K$, tout idéal maximal de S est trivial.

Tout idéal maximal de S contient E , donc contient S^2 (prop. 5.3) et est par suite trivial. (On remarquera que si $S = S^2$, il n'y a pas d'idéal maximal (prop. 5.8).)

PROPOSITION 6.2. - Si S a un zéro et est unipotent et non réduit à zéro, tout idéal maximal est trivial et il en existe.

Puisque $S \neq 0$, $S^2 \subset S$ (prop. 5.10). La proposition résulte alors de la précédente.

PROPOSITION 6.3. - Si S a un élément unité à gauche, l'unique idéal maximal de S , s'il existe, est non trivial.

Il est alors égal à $S - P$ (prop. 5.18) et ne contient pas S^2 , car P est stable (prop. 5.11), donc est non trivial.

2. - Les idéaux maximaux non triviaux ont les propriétés suivantes.

LEMME 6.4. - Si J est un idéal maximal non trivial de S, $S - J$ contient un idempotent.

Si l'on avait $E \subseteq J$, J contiendrait S^2 (prop. 5.3) et serait trivial. Donc $S - J$ rencontre E.

On note dans la suite (A) l'idéal engendré par $A \in \mathfrak{P}(S)$, J_a la classe de $a \in S$ pour l'équivalence $\mathcal{J}$ de Green $(a \mathcal{J} b \iff (a) = (b))$ qui est aussi l'ensemble des générateurs de (a), $I_a = (a) - J_a$ l'idéal maximal unique de (a).

Nous dirons que $a \in S$ est $\mathcal{J}$-<u>maximal</u> si et seulement si (a) est maximal dans l'ensemble des idéaux principaux (donc si et seulement si J_a est un élément maximal de $S/\mathcal{J}$). Dans un demi-groupe simple, ou 0-simple, tout élément $(\neq 0)$ est $\mathcal{J}$-maximal.

PROPOSITION 6.5. - Si S est non simple, les propositions suivantes sont équivalentes pour tout $J \in \mathfrak{P}(S)$:

(a) J est un idéal maximal non trivial ;
(b) $J = J_b(S - e)$, où e est un idempotent $\mathcal{J}$-maximal ;
(c) $S - J = J_e$, où e est un idempotent $\mathcal{J}$-maximal.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : si J est un idéal maximal non trivial, $S - J$ contient un idempotent e (lemme 6.4), et $J \subseteq S - e$, d'où $J \subseteq J_b(S - e)$, et $J = J_b(S - e)$ puisque J est maximal. Montrons que e est $\mathcal{J}$-maximal. Si $b \in S$ est tel que $(e) \subset (b)$, $b \notin (e)$; or $J \cup (e)$ est un idéal contenant strictement J, donc égal à S, de sorte que $b \in J$; donc $e \in (b) \subseteq J$, ce qui est absurde.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : montrons que $S - J_b(S - e) = J_e$. En effet

$$a \notin J_b(S - e) \iff (a) \nsubseteq S - e \iff e \in (a) \iff (e) \subseteq (a) \iff (e) = (a)$$

puisque e est $\mathcal{J}$-maximal.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : si $J = S - J_e$, J n'est pas vide, car S est non simple. J est un idéal car, si $x \in J$ est tel que J_e rencontre (x), on a $(e) \subseteq (x)$, et, e étant $\mathcal{J}$-maximal, $(e) = (x)$ ce qui est absurde, donc $(x) \subseteq J$. J est donc un idéal propre. Si A est un idéal contenant strictement J, A rencontre J_e, donc contient J_e et $A = S$; donc J est maximal. Enfin J est non trivial, car $S - J$ contient $e = e^2$.

PROPOSITION 6.6. - Si J est un idéal maximal non trivial, $S - J \subseteq SES - K$.

Si $e \in E$, $J_e \subseteq (E) = SES$. D'autre part, si $e \in K$, e n'est pas $\mathcal{J}$-maximal car, si $x \in S - J \subseteq S - K$, $(e) \subseteq K \subseteq (x)$; donc, si e est $\mathcal{J}$-maximal, $e \notin K$, et J_e ne rencontre pas K . La proposition résulte alors de la précédente (S étant non simple car J existe).

B. Structure de S/J où J est un idéal maximal.

1. - On sait que S/J est un demi-groupe nul d'ordre 2 ou 0-simple. S étant compact, on peut dire plus.

LEMME 6.7. - Si e , $f \in E$ sont tels que $f \in SeS$ et $e \in Sf$, alors $Se = Sf$.

Puisque $e \in Sf$, $ef = e$. Et, puisque $f \in SeS$, il existe $a \in Se$ et $b \in S$ tels que $f = ab$, avec $ae = a$. Soit g l'idempotent de $\Gamma(a)$; de $a \in Se \subseteq Sf$ résulte $g \in Se \subseteq Sf$ (prop. 3.3), et $gf = f$. D'autre part on a, pour tout $n \in \underline{N}$, $f = a^n b^n$; c'est vrai pour $n = 1$, et, si $f = a^{n-1} b^{n-1}$, alors

$$f = a^{n-1} eb^{n-1} = a^{n-1} efb^{n-1} = a^{n-1} fb^{n-1} = a^n b^n .$$

Par suite, il existe $u \in S$ tel que $f = gu$ (lemme 2.8) ; et $gf = f$. Donc $g = f$, et, comme $g \in Se$, $f \in Se$, et $Se = Sf$.

LEMME 6.8. - Si e , $f \in E$ sont tels que $f \in SeS$ et $e \in fSf$, alors $e = f$.

Comme $e \in fSf$, $fe = e$. D'autre part, $e \in Sf$; donc $Se = Sf$ (lemme 6.7), et $f \in Se$, d'où $fe = f$. Par suite $e = f$.

THÉORÈME 6.9. - Soit J un idéal maximal. Si J est trivial, S/J est nul d'ordre 2 . Si J est non trivial, S/J est complètement 0-simple.

Si J est trivial, la première assertion aussi (car $S - J = \{a\}$, avec $a^2 \in S^2 \subseteq J$).

Si J est non trivial, $S - J$ contient un idempotent e (lemme 6.4) et S/J n'est pas nul, donc est 0-simple. Il suffit de montrer que e est primitif dans S/J . Soit donc f un idempotent $\neq 0$ de S/J tel que $f \lesssim e$ dans S/J ; alors $f \in S - J$, et $f \lesssim e$ dans S (la relation d'ordre étant celle de Rees). On a donc $f \in eSe$. D'autre part, $J \cup SfS$ est un idéal contenant strictement J , donc égal à S , et $e \in SfS$. Donc $e = f$ (lemme 6.8).

Ce théorème a un corollaire important.

THÉORÈME 6.10. - Tout demi-groupe compact 0-simple est complètement 0-simple.

Si S est 0-simple, 0 est un idéal maximal, non trivial car sinon $S^2 = 0$. Donc $S/0 = S$ est complètement 0-simple.

2. - On peut d'autre part préciser la structure de $S - J$, J étant un idéal maximal, que l'on peut supposer non trivial.

Rappelons que, si D est un demi-groupe complètement 0-simple, les ensembles $eDf - 0$, où $e , f \in E$, sont, soit vides, soit de carré nul, soit des groupes ; ils recouvrent $D - 0$ et sont de plus deux à deux égaux ou disjoints (ce sont d'ailleurs les $\mathcal{H}$-classes de Green non nulles). Enfin $eDf - 0$ est un groupe si et seulement si $fe \neq 0$.

Les conditions suivantes sont donc équivalentes :

(a) D est réunion de groupes ;

(b) le produit de deux idempotents non nuls est non nul ;

(c) $D - 0$ est stable (et est alors complètement simple).

Si J est maintenant un idéal maximal non trivial de S , les propriétés précédentes s'appliquent à $A = S - J$ grâce au lemme suivant :

LEMME 6.11. - Si J est un idéal maximal non trivial de S et si $e , f \in E \cap A$, $e\, S/J\, f - 0 = eSf - J$; de plus $eSf - J$ est compact.

On a $eAf \subseteq eSf$; et $eSf - J = eAf - J$ car $S = A \cup J$, et $eJf \subseteq J$. Donc $e\, S/J\, f - 0 = eSf - J$. La dernière assertion est immédiate car eSf est fermé (prop. 1.8) et J ouvert (théorème 5.1).

Il résulte alors du théorème 6.9 le théorème suivant :

THÉORÈME 6.12. - Soit J un idéal maximal non trivial de S . Alors $A = S - J$ est réunion des ensembles $eSf - J$, qui sont deux à deux égaux ou disjoints. De plus, si $fe \notin J$, $eSf - J$ est un groupe, et, si $fe \in J$, $(eSf - J)^2 \subseteq J$.

Il est intéressant de savoir à quelles conditions A est réunion de groupes.

PROPOSITION 6.13. - Si J est un idéal maximal non trivial de S , les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $A = S - J$ est réunion de groupes disjoints.

(b) $(\forall\, a \in A)\ (\exists\, x \in S)$, $a = ax = xa$.

(c) $a \in A$ entraîne $a^2 \in A$.

(d) A est un sous-demi-groupe (compact) de S .

(e) J est complètement premier $(xy \in J \implies x \in J$ ou $y \in J)$.

(f) le produit de deux idempotents quelconques de A est dans A .

(g) S/J est un demi-groupe complètement simple avec 0 adjoint.

(h) A est un sous-demi-groupe complètement simple.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : évident (prendre $x = \eta(a)$).

(b) $\Longrightarrow$ (c) : soient $a \in A$, et $x \in S$ tels que $a = ax = xa$; si e est l'idempotent de $\Gamma(x)$, $a = ae = ea$ (lemme 3.4 et son dual) ; par suite $e \in A$ (sinon, $a \in J$). Comme $ee = e \notin J$, $eSe - J$ est un groupe contenu dans A (théorème 6.12) ; et $a^2 \in A$, puisque $a \in eSe - J$.

(c) $\Longrightarrow$ (d) : soient a , $b \in A$; considérons $T = J^{\circ}.\, b$. T est un idéal à gauche, car $tb \in J$ entraîne $xtb \in J$ pour tout $x \in S$; T contient J . D'autre part, T est un idéal à droite ; en effet

$$txb \in A \Longrightarrow txbtxb \in A \Longrightarrow bt \in A \Longrightarrow btbt \in A \Longrightarrow tb \in A ,$$

donc $tb \in J \Longrightarrow txb \in J$, pour tout $x \in S$. T est donc un idéal contenant J . Si on suppose $ab \notin A$, il en résulte $a \in T - J$, $J \subset T$, $T = S$, $b \in T$ et $b^2 \in J$ ce qui est absurde. Donc $ab \in A$.

(a) $\Longleftrightarrow$ (d) $\Longleftrightarrow$ (f) $\Longleftrightarrow$ (h) résulte immédiatement des énoncés 6.9 et 6.11 et des rappels algébriques ; et

(d) $\Longleftrightarrow$ (e) , (g) $\Longleftrightarrow$ (h) sont évidentes.

COROLLAIRE 6.14. - Si J est un idéal maximal non trivial de S , les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $A = S - J$ est un groupe.
(b) Il existe $z \in A$ qui commute avec tout élément de A .
(c) A contient un seul idempotent.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : évident.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : A est alors un demi-groupe complètement simple (prop. 6.13) ; or un demi-groupe complètement simple dont le centre est non vide est un groupe (immédiat dans la représentation en matrices de Rees), et contient donc un seul idempotent.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : A est alors un sous-demi-groupe complètement simple puisqu'il vérifie la condition (f) de la proposition 6.13 ; s'il est unipotent, c'est un groupe.

On notera que si S a un élément unité à gauche, et est différent de P , la condition (d) de la proposition 6.13 est vérifiée par l'idéal maximal unique (prop. 5.18) $S - P$; par suite :

PROPOSITION 6.15. - Si P est non vide, c'est un groupe à droite.

P est alors complètement simple ; un tel demi-groupe, s'il vérifie la règle de simplification à gauche, est un groupe à droite (en effet les idéaux à droite minimaux qui sont engendrés par des idempotents sont alors égaux à P, donc P est simple à droite et admet par suite des quotients à droite).

Enfin un cas où $S - J$ est un groupe est celui où S a un élément unité (le groupe est alors le sous-groupe maximal correspondant) (prop. 5.17 et 5.18).

3. - Le théorème 6.9 a enfin l'extension suivante aux idéaux compacts de S.

Si J est un idéal de S, un idéal L de S contenu strictement dans J sera appelé J-maximal s'il est maximal parmi les idéaux de S contenus dans J. On sait qu'alors J/L est 0-simple ou nul. On ne confondra pas un tel idéal avec un idéal maximal dans J (c'est-à-dire un idéal maximal du demi-groupe J), encore qu'un idéal de S maximal dans J soit J-maximal.

PROPOSITION 6.16. - Soient J un idéal fermé de S et L un idéal J-maximal de S ; alors J/L est complètement 0-simple ou de carré nul.

Si J/L n'est pas de carré nul, il est 0-simple, et alors L est un idéal maximal du demi-groupe compact J ; J/L est donc complètement 0-simple (théorème 6.9).

VII. Idempotents primitifs d'un demi-groupe compact.

Soit S un demi-groupe compact. Un idempotent e de S est dit primitif s'il est minimal pour la relation d'ordre de Rees, c'est-à-dire, si S est sans zéro, quand $f \in eSe \cap E$ entraîne $f = e$, et, si S a un zéro, quand $f \neq 0$ et $f \in eSe \cap E$ entraînent $f = e$.

A. Éléments nilpotents.

On suppose que S a un zéro.

PROPOSITION 7.1. - Pour tout $a \in S$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) $0 \in \Gamma(a)$;

(b) la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Si $0 \in \Gamma(a)$, 0 est l'idempotent de $\Gamma(a)$ et, comme $K(a)$ est un groupe, $K(a) = 0$. La suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a alors qu'une seule valeur d'adhérence qui est 0 et converge donc, S étant compact, vers 0. Ainsi (a) $\Longrightarrow$ (b) ; la réciproque est triviale.

Un élément $a \in S$ tel que $0 \in \Gamma(a)$ est dit <u>nilpotent</u>. L'ensemble des éléments nilpotents sera noté N . Une partie A de S est dite <u>nulle</u> si $A \subseteq N$.

On ne confondra pas un idéal (par exemple) <u>non nul minimal</u> (c'est-à-dire un idéal non nul A tel que tout idéal non nul contenu dans A soit égal à A) avec un idéal 0-<u>minimal non nul</u> (c'est-à-dire un idéal 0-minimal qui n'est pas contenu dans N) (la seconde propriété entraîne néanmoins la première).

LEMME 7.2. - Si $a \in N$, $\Gamma(a)$ est contenu dans N . Si $a \notin N$, $\Gamma(a)$ est disjoint de N .

Si $a \in N$, la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro, et il en est de même de toute suite $(a^{pn})_{n \in \mathbb{N}}$ où $p \in \mathbb{N}$; donc $C(a) \subseteq N$, et

$$\Gamma(a) = C(a) \cup K(a) = C(a) \cup \{0\} \subseteq N .$$

Si $a \in S$, et si $\Gamma(a)$ rencontre N , soit $x \in N \cap \Gamma(a)$; on a $0 \in \Gamma(x)$; mais $x \in \Gamma(a)$ entraîne $\Gamma(x) \subseteq \Gamma(a)$; donc $0 \in \Gamma(a)$ et $a \in N$. Par suite, si $a \notin N$, $\Gamma(a)$ est disjoint de N .

LEMME 7.3. - Tout bi-idéal non nul, en particulier tout idéal (g) , (d) ou (b) non nul, contient un idempotent non nul.

Si B est un tel bi-idéal, et si $a \in B - N$, $\Gamma(a) \subseteq B$ (prop. 3.3), et $\Gamma(a) \subseteq B - N$ (lemme 7.2) ; l'idempotent e de $\Gamma(a)$ appartient donc à $B - N$.

(On notera que N ne contient pas d'idempotent différent de 0 , donc qu'un idempotent non nul est la même chose qu'un idempotent différent de 0 .)

B. Théorème fondamental sur les idempotents primitifs.

1. THÉORÈME 7.4. - Si S a un zéro, les propositions suivantes sont équivalentes pour tout $e \in E - 0$:

(a) e est primitif ;
(b) eSe est un bi-idéal non nul minimal ;
(c) Se est un idéal (g) non nul minimal ;
(d) SeS est un idéal non nul minimal ;
(e) tout idempotent non nul de SeS est primitif.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : eSe est toujours un bi-idéal. Si B est un bi-idéal non nul contenu dans eSe , B contient un idempotent non nul f (lemme 7.3) ; comme $f \in eSe - 0$, et que e est primitif, $f = e$, $e \in B$, et $eSe \subseteq B$, donc $B = eSe$, et eSe est un bi-idéal, non nul car $e \in eSe - N$, minimal.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : Se étant un idéal (g) non nul, soit A un idéal (g) non nul contenu dans Se ; A contient un idempotent non nul f (lemme 7.3) ; $f \in Se$ entraîne $fe = f$; de même $Ae = A$.

eSf est alors un bi-idéal, contenu dans eSe car $f \in Se$. eSf est non nul car $ef \in E$ (en effet $efef = eff = ef$), $ef \neq 0$ (sinon $f = ff = fef = 0$), et $ef = eef \in eSf$. D'après l'hypothèse, $eSf = eSe$.

Par suite $e \in eSe = eSf \subseteq A$, et $A = Se$.

(c) $\Longrightarrow$ (d) : SeS étant un idéal non nul, soit A un idéal non nul contenu dans SeS ; A contient un idempotent non nul f (lemme 7.3) ; il existe a , $b \in S$ tels que $f = aeb$.

Soit alors $g = bae$. Sg^2 est un idéal (g) contenu dans Se , car $g \in Se$. Il est non nul : en effet $g^2 \in E$ car

$$g^2 = baebae = bfae\ , \quad g^3 = bfaebae = bffae = bfae = g^2\ ; \quad g^2 \neq 0$$

car sinon

$$f = aebf = aebfff = aebfaebf = aeg^2\, bf = 0\ ;$$

enfin $g^2 \in Sg^2$ puisque $g^2 = g^3$. D'après l'hypothèse, $Sg^2 = Se$.

Or $g^2 = bfae \in SfS$; donc $e = ee \in Sg^2 \subseteq SfS \subseteq A$, et $A = SeS$.

(d) $\Longrightarrow$ (e) : soit f un idempotent non nul de SeS ; si $g \in fSf \cap E$, avec $g \neq 0$, SgS est un idéal non nul contenu dans SeS , et, d'après l'hypothèse, $SgS = SeS$; de même $SfS = SeS$. Par suite $f \in SgS$; comme $g \in fSf$, $g = f$ (lemme 6.8) ; donc f est primitif.

(e) $\Longrightarrow$ (a) est évident.

2. - On peut alors préciser les bi-idéaux ou idéaux d'un côté non nuls minimaux.

PROPOSITION 7.5. - Si S a un zéro, tout bi-idéal (resp. idéal (g) , idéal (d) , idéal (b)) non nul minimal M est de la forme eSe (resp. Se , eS , SeS) où e est un idempotent primitif, et réciproquement. De plus tout idempotent non nul de M est primitif.

Si M est un bi-idéal (resp. idéal (g) , (d) , (b)) non nul minimal, M contient un idempotent non nul e (lemme 7.3) ; eSe (resp. Se , eS , SeS) est alors un bi-idéal (resp. idéal (g) , (d) , (b)) non nul contenu dans M , donc $M = eSe$ (resp. Se , eS , Ses). Comme M est minimal, e est primitif (théorème 7.4). La réciproque résulte également du théorème 7.4. Enfin, comme $eSe \subseteq SeSeS \subseteq SeS$ (resp. $Se \subseteq SeS$, $eS \subseteq SeS$, $SeS \subseteq SeS$), tout idempotent non nul de M est primitif (théorème 7.4).

C. Structure des bi-idéaux ou idéaux non nuls minimaux.

On suppose que S a un zéro.

1. LEMME 7.6. - Si e est primitif et si $x \in Se - N$, $Sx = Sex = Se$.

En effet Sx et Sex sont des idéaux (g) contenus dans Se, et non nuls car $xex = x^2 \notin N$ (lemme 7.2). Comme Se est minimal (théorème 7.4), $Sx = Se = Sex$.

LEMME 7.7. - Si e est primitif et si $a, b \in Se - N$, $ab \notin N$.

On a alors $Sa = Sea = Sb = Seb = Se$ (lemme 7.6). Il en résulte que $S(ab)^n = Se$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$; c'est vrai pour $n = 1$, car $Sab = Seb = Se$, et, si $S(ab)^{n-1} = Se$, alors

$$S(ab)^n = S(ab)^{n-1} ab = Seab = Seb = Se .$$

Si f est l'idempotent de $\Gamma(ab)$, on a alors $Sf = Se$ (prop. 3.8) ; donc $f \neq 0$, et $ab \notin N$. Nous n'énonçons pas le lemme dual.

THÉORÈME 7.8. - Si e est primitif, $H_e = eSe - N$, et réciproquement.

$eSe - N$ est un sous-demi-groupe car il est non vide, et, si $a, b \in eSe - N$, $ab \in eSe$, et $ab \notin N$ (lemme 7.7). Soit alors $a \in eSe - N$; on a $\Gamma(a) \subseteq eSe - N$ (prop. 3.3 et lemme 7.2) ; mais e, primitif, est le seul idempotent de $eSe - N$; c'est donc l'idempotent de $\Gamma(a)$. e étant élément neutre pour $\Gamma(a) \subseteq eSe$, $\Gamma(a)$ est un groupe (prop. 3.4). Par suite $a \in H_e$.

Réciproquement $H_e \subseteq eSe$; et H_e ne rencontre pas N, car s'il existe $x \in H_e \cap N$, $\Gamma(x) \subseteq H_e$ puisque H_e est fermé (prop. 1.12) et l'idempotent de $\Gamma(x)$ est à la fois e et 0, ce qui est absurde. Donc H_e est contenu dans $eSe - N$ et lui est égal.

La réciproque est immédiate : si $eSe - N$ est un groupe, e est seul idempotent non nul de eSe et est primitif.

THÉORÈME 7.9. - Soit M un bi-idéal (resp. idéal (g), idéal (d), idéal (b)) non nul minimal. $M - N$ est réunion des sous-groupes maximaux $H_f = fSf - N$ tels que $f \in M \cap E - 0$. De plus, si M est idéal (g) (resp. (d)), $M - N$ est un groupe à gauche (resp. à droite) ; si M est idéal (b), $M - N$ est réunion des $Sg - N$ tels que $g \in M \cap E - 0$.

Dans le premier cas, il existe un idempotent primitif e tel que $M = eSe$ (prop. 7.5) et le théorème résulte du précédent.

Si M est un idéal (g) non nul minimal, il existe un idempotent primitif e tel que $M = Se$ (prop. 7.5). $M - N$ est un sous-demi-groupe de S (lemme 7.7). Si f est un idempotent de $M - 0$, f est primitif (prop. 7.5), donc $H_f = fSf - N$ (théorème 7.8) et $H_f \subseteq Se - N$.

Réciproquement, si $a \in M - N$, $\Gamma(a) \subseteq M - N$ (prop. 3.3 et lemme 7.2) ; si f est l'idempotent de $\Gamma(a)$, $Sf = Se$ (lemme 7.6), donc $\Gamma(a) \subseteq Sf$ et f est élément neutre à droite pour $\Gamma(a)$, qui est un groupe (prop. 3.4). Par suite $a \in H_f$, où f est un idempotent non nul de M.

Si de plus L_e est l'ensemble des générateurs de l'idéal (g), $M = Se$, on a $M - N \subseteq L_e$ (car, si $a \in Se - N$, $Sa = Se$, lemme 7.6). $M - N$ est donc la réunion des sous-groupes contenus dans L_e (puisque $L_e \subseteq Se - 0$) ; comme il est non vide, on sait que c'est un groupe à gauche [6].

L'énoncé est vrai dualement si M est un idéal (d) non nul minimal. Enfin, si M est un idéal (b) non nul minimal, il existe un idempotent primitif e tel que $M = SeS$ (prop. 7.5), tout idempotent de M étant d'ailleurs primitif. Soit alors $J = J_b(M \cap N)$; J est un idéal nul, M-maximal car tout idéal contenu dans M et contenant strictement J est non nul, donc égal à M qui est non nul minimal. M contenant un idempotent non nul (lemme 7.3), M/J n'est pas de carré nul ; il est donc complètement 0-simple (prop. 6.16). En particulier, pour tout $x \in M - N \subseteq M - J$, il existe un idempotent non nul g de M tel que $x = xg$.

Il en résulte que $M - N$ est contenu dans la réunion des $Sg - N$ tels que g soit un idempotent non nul de M. Réciproquement, si g est un tel idempotent, $Sg - N \subseteq M - N$, ce qui démontre la dernière assertion. Comme tout idempotent non nul de M est primitif, la première résulte du cas déjà étudié de l'idéal (g) non nul minimal.

COROLLAIRE 7.10. - Il y a égalité entre les ensembles suivants ($\hat{E}$ désigne l'ensemble des idempotents primitifs) :

(i) $S\hat{E} - N$,

(ii) $\hat{E}S - N$,

(iii) $S\hat{E}S - N$,

(iv) $\cup (H_e \,;\, e \in \hat{E})$;

de plus, $S\hat{E}$ (resp. $\hat{E}S$, $S\hat{E}S$) est la réunion des idéaux (g) (resp. d , b) non nuls minimaux.

Ceci résulte des énoncés 7.5 et 7.9.

Signalons enfin la proposition suivante :

PROPOSITION 7.11. - Si M est un idéal (g) non nul minimal, $M \cap N$ est un idéal (g) de M.

Il existe un idempotent primitif e tel que $M = Se$ (prop. 7.5). Soient $a, b \in Se$ tels que $ab \notin N$. On a $Sab = Se$ (lemme 7.6), et $Sa \subseteq Se = Sab$. Par suite $Sab^n = Se$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; c'est vrai pour $n = 1$, et, si $Sab^{n-1} = Se$,

$$Se = (Sa)b^{n-1} \subseteq Sabb^{n-1} = Sab^n \subseteq Se .$$

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Seb^p = Sabb^p = Se$. Par suite, si f est l'idempotent de $\Gamma(b)$, $Sef = Se$ (prop. 3.8) ; et $f \neq 0$, donc $b \notin N$.

2. - Si S est connexe, on peut préciser la situation de $\hat{S}\hat{E}\hat{S} - N$.

LEMME 7.12. - Si S est connexe, et si e est un idempotent primitif, les ensembles eSe, Se, eS, SeS sont égaux et contenus dans $\overline{N}$.

Soit $J = J_b(eSe \cap N)$; on a $\emptyset \subset J \subset eSe$. De plus $eSe - N = H_e$ (théorème 7.8), et, comme H_e est fermé (prop. 1.12), $eSe \cap N$ est ouvert dans eSe ; J est donc ouvert dans eSe (lemme 4.5, appliqué au demi-groupe eSe, qui est compact (prop. 1.8)). Considérons $\overline{J}$, qui est un idéal (g) (prop. 1.3) contenu dans eSe ; si $\overline{J}$ est nul, il est contenu dans J donc égal à J, ce qui est impossible, car eSe est connexe (prop. 1.16) ; $\overline{J}$ n'est donc pas nul ; comme il est contenu dans SeS (qui contient eSe), et que SeS est un idéal non nul minimal, on a $\overline{J} = SeS$. Par suite

$$SeS = \overline{J} \subseteq eSe \subseteq Se \cap eS \subseteq Se \cup eS \subseteq SeS ,$$

donc $eSe = Se = eS = SeS$. De plus $J \subseteq N$, donc $SeS = \overline{J} \subseteq \overline{N}$.

THÉORÈME 7.13. - Si S est connexe, il y a identité entre les bi-idéaux non nuls minimaux et les idéaux (g), (d) ou (b) non nuls minimaux. Ils sont tous contenus dans $\overline{N}$. Enfin $\hat{S}\hat{E}\hat{S} - N \subseteq \overline{N} - N$.

La première et la seconde assertion résultent du lemme et de la proposition 7.5 ; la dernière du corollaire 7.10.

3. - La question de l'existence des idempotents primitifs dans S n'a pas encore été évoquée. Si S est 0-simple, il en existe (théorème 6.10). Si S est connexe et N fermé, il n'en existe pas (théorème 7.13) ; c'est le cas par exemple d'un sous-demi-groupe multiplicatif de R de support $[0, h]$, avec $h \in]0, 1[$.

D. Application aux demi-groupes compacts sans zéro.

1. - S est maintenant sans zéro. La théorie précédente s'applique à S par le biais d'un demi-groupe S^0 obtenu à partir de S par adjonction algébrique d'un zéro, que l'on notera 0 .

LEMME 7.14. - Il existe une topologie et une seule sur S^0 pour laquelle S est un sous-espace topologique de S^0 et 0 un point isolé. Pour cette topologie, S^0 est un demi-groupe topologique compact. Les bi-idéaux (resp. idéaux (g) , (d) , (b)) de S^0 sont la partie $\emptyset$ et les parties de S^0 résultant de l'adjonction de 0 à un bi-idéal (resp. idéal (g) , (d) , (b)) de S . Les idempotents primitifs de S^0 sont les idempotents primitifs de S . Dans S^0 , $N = \{0\}$.

La topologie de S^0 est parfaitement définie par une base d'ouverts formée des ouverts de S et de $\{0\}$. Elle fait de S^0 un espace compact car réunion de deux compacts, S et $\{0\}$. La continuité de la multiplication dans S^0 est immédiate ainsi que les autres assertions ; le lecteur non convaincu le deviendra sans peine.

Soit alors K le noyau de S ; K étant le seul idéal (b) minimal de S , le théorème suivant résulte immédiatement du lemme et du théorème 7.4 :

THÉORÈME 7.15. - Les propositions suivantes sont équivalentes pour tout idempotent e :

(a) e est primitif ;
(b) eSe est un bi-idéal minimal ;
(c) Se est un idéal (g) minimal ;
(d) $e \in K$.

Nous n'écrivons pas le (e) qui est alors trivial.

PROPOSITION 7.16. - Si $e \in K$, $H_e = eSe$, et réciproquement.

Ceci résulte alors du théorème 7.8.

Nous n'écrivons pas les autres propriétés que l'on pourrait obtenir de même, celles-ci pouvant être établies algébriquement. Notons seulement que S a toujours des idempotents primitifs.

2. - Le théorème 7.15 entraîne, pour les demi-groupes compacts, les énoncés suivants :

COROLLAIRE 1.17. - Un demi-groupe compact sans zéro contenant un idempotent primitif et neutre à gauche est complètement simple.

Ceci résulte alors de la proposition 5.20.

COROLLAIRE 7.18. - Si un demi-groupe compact sans zéro a un seul idempotent primitif, son noyau est un groupe.

En effet le noyau est complètement simple.

COROLLAIRE 7.19. - Si tout idempotent d'un demi-groupe compact sans zéro est primitif, le noyau de S est $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S^n$; si de plus $S = S^2$, S est complètement simple.

Ceci résulte alors de la proposition 5.8.