Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

D. D. Miller

Les axiomes de la théorie des treillis

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, n° 2 (1964-1965), exp. n° 25, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_2_A6_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 25

31 mai 1965

LES AXIOMES DE LA THÉORIE DES TREILLIS

par D. D. MILLER

0. Introduction.

Les six axiomes indépendants bien connus pour un treillis comportent trois couples de postulats, dits d'associativité, de commutativité, et d'absorption. Les deux axiomes d'absorption entraînent l'idempotence de chacune des opérations, et cette propriété, bien qu'elle soit une conséquence de la propriété absorptive, est souvent mise en évidence comme axiome dans les traîtés de la théorie des treillis. Nous proposons ici un nouveau système ipso-dual de sept axiomes indépendants, dont un seul exprime l'idempotence des opérations, une paire exprime leur associativité et encore une paire leur commutativité, enfin une paire dite "d'absorption conditionnelle" remplace les axiomes, plus forts, d'absorption.

Les axiomes d'absorption conditionnelle nous semblent intéressants pour trois raisons. D'abord, ils sont de forme implicative et ne portent que sur les "couples exceptionnels" d'éléments du treillis, tandis que les axiomes classiques d'absorption sont des identités portant sur tout couple d'éléments. Deuxièmement - un avantage technique mineur - ils affaiblissent suffisamment les axiomes d'absorption pour que, même en présence de l'hypothèse d'idempotence, l'indépendance d'un axiome d'associativité soit un peu plus facile à démontrer ; en fait, tous les exemples que nous donnons pour établir l'indépendance de nos axiomes sont d'ordre au plus 3 . Enfin, en présence d'éléments "extrêmes" 0 et I , les nouveaux axiomes apparaissent comme des cas spéciaux de la propriété bien connue de modularité, d'où nous trouvons de nouveaux systèmes d'axiomes pour les treillis modulaires ou distributifs avec 0 et I . On peut remarquer aussi des généralisations de la notion de treillis.

1. Axiomes pour un treillis.

Considérons d'abord les paires ipso-duales d'axiomes suivantes, respectivement d'idempotence, d'associativité, de commutativité, d'absorption conditionnelle, et d'absorption :

(1) $x \vee x = x$ (1') $x \wedge x = x$

(2) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (2') $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

(3) $x \vee y = y \vee x$ (3') $x \wedge y = y \wedge x$

(4) $z \vee x = z$ entraîne $x \wedge z = x$ (4') $z \wedge x = z$ entraîne $x \vee z = x$

(5) $x \wedge (y \vee x) = x$ (5') $x \vee (y \wedge x) = x$.

[Quoique les six premiers axiomes soient parfaitement symétriques, il n'en est pas de même pour les quatre derniers, ni pour les autres axiomes que nous allons introduire plus tard. A chaque tel axiome "à gauche" correspond, bien-entendu, un axiome "à droite" qui lui est équivalent en présence de (3) et (3'). Par exemple, à (4) correspond :

(4_d) $x \vee z = z$ entraîne $z \wedge x = x$.

Ceci est notre dernier mot au sujet de ces "versions à droite".]

On remarque que les axiomes d'absorption sont pris d'habitude sous les formes un peu moins symétriques de

(5 bis) $x \wedge (x \vee y) = x$ et (5' bis) $x \vee (x \wedge y) = x$.

Que les six axiomes (2), (2'), (3), (3'), (5 bis), (5' bis) soient indépendants et caractérisent un treillis est démontré, par exemple, dans [1], p. 26-29. En présence de (3), il est évident que (5) et (5 bis) sont équivalents ; et (5') équivaut à (5' bis) en présence de (3'). Il s'ensuit immédiatement que les axiomes (2), (2'), (3), (3'), (5), (5') caractérisent un treillis, et qu'ils sont indépendants sauf peut-être pour l'indépendance de l'un ou l'autre des axiomes de commutativité. En effet, l'exemple donné dans [1], p. 28 pour démontrer que (3') est indépendant de (2), (2'), (3), (5 bis), (5' bis), ne satisfait pas à (5') ; mais l'exemple (A_3 , M_5) que nous donnons plus loin montre que (3') est également indépendant de (2), (2'), (3), (5), (5'), et par symétrie (3) est indépendant de (2), (2'), (3'), (5), (5'). Nous concluons que (2), (2'), (3), (3'), (5), (5') sont des axiomes indépendants pour un treillis.

Pour chaque entier n qui désigne un axiome, il sera commode de noter (n*) la conjonction de (n) et (n'). En particulier, nous avons

(1*) $x \vee x = x = x \wedge x$

et

(4*) $z \vee x = z$ si et seulement si $x \wedge z = x$.

Chacun des axiomes d'absorption (5) et (5') entraîne un axiome d'absorption conditionnelle correspondant. En effet, supposons (5) vérifié, et soit $z \vee x = z$; alors $x \wedge z = x \wedge (z \vee x) = x$. Symétriquement, (5') entraîne (4'). Mais les implications réciproques ne sont pas valables sans hypothèses supplémentaires. En effet, notre exemple $(A_3\ ,\ M_3)$ (voir la fin de cette section) satisfait à huit de nos dix premiers axiomes - c'est-à-dire à tous, sauf (2') et (5') ; et $(A_1\ ,\ M_1)$ satisfait à tous, sauf (1), (1'), et (5'). Il semble alors que si nous laissons de côté ou l'idempotence, ou l'associativité d'une opération, l'absorption conditionnelle n'entraîne pas l'absorption inconditionnelle. Et c'est précisément cela : car si l'on suppose (1') et (2') vérifiés, on a, quels que soient x et y ,

$$(y \wedge x) \wedge x = y \wedge (x \wedge x) = y \wedge x \quad ,$$

d'où, en posant $z = y \wedge x$ dans (4'),

$$x \vee (y \wedge x) = x \ , \qquad \text{c'est-à-dire (5')} \ .$$

Symétriquement, (1), (2), (4) entraînent (5), et il s'ensuit que les huit axiomes (1), (1'), (2), (2'), (3), (3'), (4), (4') sont équivalents aux six axiomes (2), (2'), (3), (3'), (5), (5'), donc qu'ils caractérisent un treillis.

Mais ces huit axiomes ne sont pas indépendants, car, dans le cas spécial $z = x$, l'axiome (4) devient "(1) entraîne (1')" et (4') devient "(1') entraîne (1)". Si nous substituons aux axiomes (1) et (1') leur conjonction (1*), nous obtenons <u>un ensemble indépendant de sept axiomes pour un treillis</u>. Des exemples, qui démontrent que chacun de ces axiomes est indépendant des six autres, suivent immédiatement la liste ci-dessous de demi-treillis supérieurs et inférieurs, à laquelle ils se rapportent.

A_1

∨	a	b
a	a	a
b	a	a

A_2

∨	a	b
a	a	a
b	a	b

A_3

∨	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

A_4

∨	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	b

A_5

∨	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

A_6

∨	a	b	c
a	a	a	c
b	a	b	c
c	c	c	c

M_1

∧	a	b
a	a	b
b	b	a

M_2

∧	a	b
a	a	a
b	b	b

M_3

∧	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	a
c	c	a	c

M_4

∧	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	c

M_5

∧	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	b	c

M_6

∧	a	b	c
a	a	b	b
b	b	b	c
c	b	c	c

M_7

∧	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

M_8

∧	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

.

<u>Idempotence</u> : $(A_1\ ,\ M_1)$ satisfait à (2*), (3*), (4*), mais ni à (1) ni à (1').
<u>Associativité</u> : $(A_3\ ,\ M_3)$ satisfait à (1*), (2), (3*), (4*), non à (2').

[On remarquera que l'exemple donné dans [1], p. 28-29, pour démontrer que (2') est indépendant des axiomes (2), (3), (3'), (5 bis), (5' bis), est d'ordre 5 ; il est le plus petit exemple d'un système à deux opérations commutatives (en fait, elles sont aussi idempotentes), liées par les axiomes d'absorption, telles que l'une d'entre elles soit associative et que l'autre ne le soit pas.]

Commutativité : (A_3 , M_5) satisfait à (1*), (2*), (3), (4*), non à (3').

Absorption conditionnelle : (A_3 , M_4) satisfait à (1*), (2*), (3*), (4), non à (4').

Par symétrie, nous concluons que chacun des axiomes (2), (3), (4) est indépendant des six autres.

2. Une nouvelle famille de systèmes.

Soit X l'ensemble {(1) , (1') , (2) , (2') , (3) , (3') , (4) , (4')} que nous avons déjà trouvé dépendant. Le petit truc dont nous nous sommes servi pour réduire X à un ensemble indépendant - à savoir la combinaison de (1) et (1') dans un seul axiome (1*) - ne va pas évidemment pour les autres couples (n) , (n') . Mais toutefois, il est naturel de demander quels sont les sous-ensembles indépendants maximaux de X , c'est-à-dire les véritables sous-ensembles Y tels que l'adjonction à Y d'un élément de X - Y , ou bien produirait un ensemble dépendant, ou bien entraînerait encore un autre élément de X - Y . Outre le sous-ensemble {(1) , (1') , (2) , (2') , (3) , (3')} , qui ne présente aucun intérêt du point de vue d'un système à deux opérations, parce que chaque membre est un axiome ne portant que sur une seule opération, les seuls tels sous-ensembles indépendants maximaux de X sont

{(2) , (2') , (3) , (3') , (4) , (4')} ,   {(1') , (2) , (2') , (3) , (3') , (4)} ,

et le "dual" de celui-ci,

{(1) , (2) , (2') , (3) , (3') , (4')} .

Nous avons déjà cité un exemple du premier, à savoir (A_1 , M_1), mais nous n'avons pas trouvé d'exemples qui nous intéressent beaucoup. L'autre variété de système semble avoir quelque potentiel ; un exemple fini qui n'est pas un treillis est (A_4 , M_4), et on remarque qu'en prenant $\vee$ pour addition et $\wedge$ pour multiplication, tout anneau de Boole satisfait aux axiomes (1'), (2), (2'), (3), (3'), (4). Encore un exemple est fourni par la famille de tous les sous-ensembles d'un groupe G , si l'on prend pour $S \wedge T$ l'intersection des ensembles S et T , et pour $S \vee T$ le plus petit sous-groupe de G contenant S et T ; l'exemple reste valable si l'on n'admet que les sous-ensembles non vides de G .

3. Modularité et distributivité.

Du point de vue que nous adoptons ici, un système de double composition, ou système à deux opérations, est un ensemble muni de deux opérations binaires (éventuellement partielles) entre lesquelles au moins une liaison est postulée. Outre les liaisons entre les opérations, on peut douer chaque opération de certaines propriétés. Ainsi, de ce point de vue, un treillis peut être regardé comme un demi-treillis supérieur et un demi-treillis inférieur (ayant le même ensemble d'éléments) liés par l'axiome (4*) d'absorption conditionnelle, qui dit simplement que les ordres partiels coïncident. Ordinairement, une liaison modulaire entre deux demi-treillis n'est considérée que si une liaison absorptive existe déjà entre les deux opérations, mais une telle limitation n'est nullement nécessaire. Cependant, l'énoncé familier de la propriété de modularité, à savoir

$$x \leqslant z \quad \text{entraîne} \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z \ ,$$

doit être remplacé par les deux axiomes

(6) $z \vee x = z$ entraîne $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

(6') $z \wedge x = z$ entraîne $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$

dont chacun exprime la propriété de modularité, le premier si $\leqslant$ est l'ordre dans le demi-treillis supérieur, et le second s'il l'est dans le demi-treillis inférieur. Evidemment, (6) et (6') coïncident si les demi-treillis sont liés par (4*), et cette coïncidence n'est autre chose que l'ipso-dualité de la propriété de modularité dans un treillis. Les deux axiomes de modularité sont indépendants l'un de l'autre (en l'absence de la liaison absorptive, bien-entendu), comme le montre notre exemple (A_6 , M_7), qui satisfait à (1*), (2*), (3*), (6), mais non à (6'). Et les deux axiomes pris ensembles n'entraînent aucune absorption, même conditionnelle, comme le montre l'exemple (A_6 , M_8), qui satisfait à (1*), (2*), (3*), (6*), mais ni à (4), ni à (4').

Soit $(S , \vee , \wedge)$ un groupoïde commutatif par rapport à chacune des opérations $\vee$ et $\wedge$. Il se peut que S contienne un élément u tel que $s \vee u = s$, $\forall s \in S$, ou un élément v tel que $v \wedge s = v$, $\forall s \in S$, et si de tels éléments existent leur unicité est garantie par la commutativité des opérations. L'axiome (4) implique qu'un élément jouissant de la première propriété jouit aussi de la deuxième, et l'axiome (4') donne l'implication réciproque. En particulier, un élément d'un treillis est le plus petit élément 0 s'il jouit de l'une ou l'autre (donc toutes les deux) de ces propriétés. Nous sommes amenés ainsi à la définition suivante : Dans un système $(S , \vee , \wedge)$ à deux opérations commutatives, un élément 0 est un élément (unique s'il en existe) tel que :

$$s \vee 0 = s \quad \text{et} \quad 0 \wedge s = 0 \qquad \forall\, s \in S \; .$$

Supposons qu'un tel système contienne un élément 0 et que l'axiome (6) soit vérifié ; en y posant $y = 0$, on en conclut que si $z \vee x = z$, alors

$$x \vee (0 \wedge z) = (x \vee 0) \wedge z \quad ,$$

donc $x = x \wedge z$. En appelant "axiome (0)" l'hypothèse qu'un élément 0 existe, nous voyons que les axiomes (0) et (6) entraînent l'axiome (4). [Il est entendu ici, quand nous parlons de l'axiome (0), que (3*) est vérifié, mais cette supposition n'est pas nécessaire. En l'absence de commutativité, on peut définir un élément 0 par $0 \vee s = s \vee 0 = s$ et $0 \wedge s = s \wedge 0 = 0$, $\forall\, s \in S$, et de l'existence d'un tel élément et de l'axiome (6) on peut déduire l'axiome (4). Un tel procédé est nécessaire pour une étude complète de l'indépendance des axiomes, mais il est compliqué par la question d'unicité, et nous n'entendons pas le poursuivre ici.]

Symétriquement, si l'on définit un élément I , dans un système $(S , \vee , \wedge)$ à deux opérations commutatives, comme un élément (unique s'il en existe) tel que $I \vee s = I$ et $s \wedge I = s$, $\forall\, s \in S$, et si l'existence d'un tel élément est nommée "axiome (0')", on démontre que (0') et (6') entraînent (4'). En particulier, un système de double composition, qui satisfait aux axiomes (0*), (1*), (2*), (3*), (6*), est un treillis modulaire avec 0 et I . D'autre part, en l'absence de (0*), la modularité (et même la distributivité - nous citerons un exemple prochainement) n'entraîne pas (4) ou (4').

Les derniers axiomes que nous considérerons sont ceux de distributivité (à gauche), nommément

$$(7) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \qquad (7') \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad .$$

Si (3) et (7) sont vérifiés, et si $z \vee x = z$, alors $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$; donc (3) et (7) entraînent (6), et symétriquement (3') et (7') entraînent (6'). Un système commutatif de double composition est modulaire, alors, s'il est distributif, les axiomes (0*), (1*), (2*), (3*), (7*) suffisent pour un treillis distributif avec 0 et I . Que les deux axiomes de distributivité, même en présence de l'idempotence, l'associativité, et la commutativité des deux opérations, n'entraînent ni l'un ni l'autre des axiomes d'absorption conditionnelle, en l'absence des éléments 0 et I , est montré par l'exemple (A_6 , M_8) que nous avons cité ci-dessus en discutant de la modularité.

L'indépendance mutuelle des deux axiomes de distributivité est montrée par le même exemple (A_6 , M_7) qui sert pour l'indépendance des axiomes de modularité, car il satisfait à (1*), (2*), (3*), (7), mais non à (7'). L'exemple (A_2 , M_2) satisfait à (1*), (2*), (3), (4), (7*), mais non à (3'), ni à (4'). L'exemple (A_5 , M_7) satisfait à (1*), (2), (3*), (4'), (7*), mais non à (2'), ni à (4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.), CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

NOTE ajoutée le 13 juillet 1965

Mme M.-L. DUBREIL-JACOTIN vient d'attirer l'attention de l'auteur sur un article de Gabor SZÁSZ, dans les Publications de la Faculté des Sciences de l'Université J. E. Purkyně, Brno (Tchécoslovaquie) en septembre 1964, intitulé Über einige Axiomensysteme der Verbände. Cet article cite le travail de Masatada KOBAYASI, qui a paru dans les Proc. Imp. Acad. Tokyo, t. 19, 1943, p. 6-9, sous le titre On the axioms of the theory of lattice, dans lequel la notion que nous avons nommée "absorption conditionnelle" est introduite et où il est démontré que (1), (2), (2'), (3), (3'), (4), (4') sont un ensemble indépendant d'axiomes pour un treillis. Les exemples donnés par KOBAYASI pour démontrer l'indépendance des axiomes sont infinis, sauf un ; donc le § 1 du présent exposé, qui donne des exemples tous fini et le plus petit possible, peut encore présenter quelque intérêt.

Il est curieux que SZÁSZ dise, non seulement que les axiomes indépendants (1'), (2), (2'), (3), (3'), (4') suffisent pour un treillis (assertion contredite par le dual de notre exemple (A_3 , M_4)), mais que c'est KOBAYASI qui l'a démontré, et que des exemples d'indépendance le plus petit possible ont été donnés par R. CROISOT et par SZÁSZ lui-même. Nous n'avons pu trouver ces derniers dans la littérature, et R. CROISOT ne semble pas en avoir souvenir.